Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Ortenilton dos Santos Filho

Estimativas Aleksandrov-Bakelman-Pucci

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Boyan Slavchev Sirakov
Co-orientador: Prof. Gustavo da Silva Araújo

Rio de Janeiro
Agosto de 2023

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Ortenilton dos Santos Filho

Estimativas Aleksandrov-Bakelman-Pucci

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Boyan Slavchev Sirakov
Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Gustavo da Silva Araújo
Co-orientador
Universidade Estadual da Paraíba – UEPB

Prof. Disson Soares dos Prazeres
Universidade Federal de Sergipe – UFS

Prof. Edgard Almeida Pimentel
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Jefferson Abrantes dos Santos
Universidade Federal de Campina Grande – UFCG

Profa. Pammella Queiroz de Souza
Universidade Federal de Campina Grande – UFCG

Rio de Janeiro, 28 de Agosto de 2023

Ortenilton dos Santos Filho

Graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Sergipe (UFS) em 2021.

Ficha Catalográfica

Filho, Ortenilton dos Santos

Estimativas Aleksandrov-Bakelman-Pucci / Ortenilton dos Santos Filho; orientador: Boyan Slavchev Sirakov; co-orientador: Gustavo da Silva Araújo. – Rio de janeiro: PUC-Rio, Departamento de Matemática , 2023.

v., 66 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática .

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Solução L^p-viscosidade;. 3. Princípio do máximo ABP;. 4. EDPs elípticas;. 5. Ingredientes mensuráveis.. I. Sirakov, Boyan Slavchev. II. Araújo, Gustavo da Silva. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática . IV. Título.

CDD: 510

Aos meus pais, Ortenilton e Adriana (in memorian), e a minha namorada
Ellen. Obrigado por todo amor e inspiração.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida.

Ao meu pai, minha maior inspiração e motivação, por sempre me apoiar e incentivar a encarar os desafios da vida.

À minha namorada, Ellen, por seu amor, companheirismo e paciência. Obrigado por acreditar tanto no meu potencial e não me deixar esmorecer nos momentos adversos da vida.

Às minhas tias Osângela e Nete, por todo carinho e cuidado que sempre tiveram comigo; por também sempre me incentivarem nas minhas decisões.

Aos meus amigos da PUC-Rio. Em especial a Antônio, Anthony, Átila, Christopher, Claudemir, Fabrício, Gabriel Dias, Gabriel Gomes, Paulo, Raul, Rodrigo e Victor, por tornarem melhores os meus dias no Rio e por me ajudarem a chegar até aqui.

Ao meu orientador e amigo, Edgard, por me aceitar como seu aluno e me orientar de maneira muito qualificada ao longo desses dois anos. Obrigado por sempre enxergar e extrair o melhor de mim.

Aos meus coorientadores, professora Pammella Queiroz e professor Gustavo Araújo, por dedicarem seu tempo para que esse trabalho fosse concluído da melhor maneira.

Aos professores do DMat, por todos os ensinamentos ao longo desses dois anos, especialmente a Boyan Sirakov e Silvius Klein.

Aos funcionários do departamento de Matemática, por todo apoio e empenho para nos oferecer um excelente ambiente de estudo. Agradeço em especial a Creuza e Carlos.

Aos membros da banca, por aceitarem avaliar o meu trabalho e darem suas contribuições para a melhora do mesmo.

Aos meus ex-professores da UFS e amigos, Paulo Rabelo e Ivanete Batista, por me cederem espaço em suas respectivas salas, na UFS, durante o tempo em que as aulas estavam de maneira remota; principalmente por toda ajuda e apoio durante essa etapa da minha carreira acadêmica.

Aos amigos de fora da PUC-Rio, Alan Gois, Ginaldo, Pêdra e Thyagão, que sempre me ajudaram quando precisei.

A Ermelino, Nilda, Letícia, Magda, Alex e Leandro pelo apoio valoroso que me deram no início do mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro - FAPERJ, atráves do programa Bolsa Mestrado e Doutorado Nota 10.

Resumo

Filho, Ortenilton dos Santos; Sirakov, Boyan Slavchev; Araújo, Gustavo da Silva. **Estimativas Aleksandrov-Bakelman-Pucci**. Rio de Janeiro, 2023. 66p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática , Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Esta dissertação versa sobre a teoria das soluções de viscosidade para equações diferenciais parciais elípticas completamente não-lineares com ingredientes mensuráveis. Nosso principal objetivo é demonstrar o Princípio do Máximo de Aleksandrov-Bakelman-Pucci neste contexto.

Palavras-chave

Solução L^p-viscosidade; Princípio do máximo ABP; EDPs elípticas; Ingredientes mensuráveis.

Abstract

Filho, Ortenilton dos Santos; Sirakov, Boyan Slavchev (Advisor); Araújo, Gustavo da Silva (Co-Advisor). **Aleksandrov-Bakelman-Pucci Estimates**. Rio de Janeiro, 2023. 66p. Dissertação de mestrado – Departamento de Matemática , Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This dissertation deals with the theory of viscosity solutions for fully nonlinear elliptic partial differential equations with measurable ingredients. Our main objective is to demonstrate the Aleksandrov-Bakelman-Pucci Maximum Principle in this context.

Keywords

L^p-viscosity solution; ABP maximum principle; Elliptic PDEs; Measurable ingredients.

Sumário

Caminho se conhece andando
Então vez em quando é bom se perder.

Chico César, *Deus me proteja.*

1
Introdução

Equações diferenciais parciais (EDPs) de primeira ordem completamente não-lineares geralmente não possuem soluções clássicas, isto é, funções que sejam de classe C^1 em seu domínio e satisfaçam a equação em todo ponto. Em contrapartida, estas equações admitem infinitas soluções que são Lipschitz contínua e satisfazem a equação em quase todo ponto do domínio. O fato da equação não possuir uma estrutura divergente não nos permite que multipliquemos a equação por uma função teste e, por meio de uma integração por partes, obtenhamos uma definição de solução fraca.

Com o objetivo de estabelecer um critério de unicidade de solução para este tipo de equação, Michael G. Crandall e Pierre-Louis Lions [9] introduziram, em 1983, o conceito de solução de viscosidade, a qual chamaremos de soluções C-viscosidade neste trabalho. O termo *viscosidade* advém do método da *vanishing viscosity.*[1] Com essa noção de solução, desenvolveu-se toda uma teoria para as equações de primeira ordem. A generalização da teoria para equações de segunda ordem é devido a Pierre-Louis Lions [19], Hitoshi Ishii [14] e Robert Jensen [15].

Embora tenhamos uma teoria consistente, para as soluções C-viscosidade, esta noção de solução exige que os dados do problema a ser estudado sejam contínuos, o que a torna insuficiente, na questão da unicidade, quando o problema estudado não nos fornece dados contínuos, e sim, meramente mensuráveis. Necessitamos então de uma noção de solução de viscosidade que supra essa deficiência.

Esta noção mais ampla de solução, introduzida em 1996 por Luis Caffarelli, Michael G. Crandall, Maciej Kocan e Andrez Święch [4], é chamada solução L^p-viscosidade. Discutiremos, neste trabalho, acerca desta teoria. Mostraremos que a noção de solução L^p-viscosidade é consistente com a noção de solução C-viscosidade, isto é, quando os dados fornecidos pelo problema forem contínuos, soluções C-viscosidade são também soluções L^p-viscosidade.

Outrossim, mostraremos que soluções L^p-forte, isto é, soluções que são $W^{2,p}$ e satisfazem a equação em quase todo ponto do domínio, são também soluções L^p-viscosidade. Mostraremos também que funções em $W^{2,p}$

[1] Consultar [6, Seção 1.3] para uma discussão detalhada deste método.

são pontualmente duas vezes diferenciáveis. Com o objetivo de usar uma estratégia de aproximação para demonstrar o Princípio do Máximo de Aleksandrov-Bakelman-Pucci (ABP), abordaremos alguns resultados da sup e inf convoluções, que são regularizações de funções.

O Princípio do Máximo ABP desempenha um papel fundamental na teoria de regularidade para EDPs. Neste trabalho, faremos uma discussão detalhada acerca desse resultado. Mostraremos que, dada uma solução L^p-viscosidade para uma equação envolvendo os operadores extremais de Pucci, o supremo da solução no interior do conjunto é controlado pelo supremo da solução na fronteira somado a uma constante multiplicada pela norma L^p do termo fonte no conjunto de contato com o envelope côncavo.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira. No Capítulo 2, abordamos resultados e noções preliminares essenciais para o desenvolvimento do nosso trabalho. A Seção 2.1 contempla as definições e resultados da análise e da teoria da medida. Já a Seção 2.2 trata das principais desigualdades a serem utilizadas nas nossas demonstrações. Por fim, na Seção 2.3, reunimos resultados da teoria das EDPs elípticas de segunda ordem completamente não-lineares com ingredientes mensuráveis.

Por sua vez, no Capítulo 3, exploramos o objeto de estudo central desta dissertação, nomeadamente, as soluções L^p-viscosidade e o Princípio do Máximo ABP neste contexto. A Seção 3.1 versa sobre a soluções C-viscosidade e L^p-forte; já na Seção 3.2, abordamos a teoria das soluções L^p-viscosidade. Finalmente, na Seção 3.3, apresentamos os resultados necessários para a demonstrarmos o Princípio do Máximo ABP no contexto mencionado, bem como sua demonstração.

2
Resultados e noções preliminares

A seguir, reunimos algumas definições e resultados preliminares que nos auxiliarão no desenvolvimento deste trabalho. Nomeadamente, na Seção 2.1 apresentamos alguns resultados da análise e da teoria da medida. Por sua vez, na Seção 2.2, expomos algumas desigualdades. Por fim, na Seção 2.3 exibimos resultados acerca da teoria das equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem completamente não-lineares com ingredientes mensuráveis.

2.1
Fatos da análise e teoria da medida

Inicialmente, revisamos alguns conceitos e resultados da análise e da teoria da medida. Começamos com a definição de função convexa e função côncava.

Definição 2.1 (Função convexa/côncava) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto convexo. Uma função $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita convexa (côncava) se para quaisquer $x, y \in \Omega$ e $t \in [0,1]$, temos*

$$v(tx + (1-t)y) \leq tv(x) + (1-t)v(y)$$

$$(v(tx + (1-t)y) \geq tv(x) + (1-t)v(y)) \, .$$

Neste texto, trabalharemos com dois espaços de funções, nomeadamente os espaços de Lebesgue L^p e o espaço de Sobolev $W^{2,p}$, os quais definimos abaixo.

Definição 2.2 (Espaços de Lebesgue) *Sejam $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p < \infty$, e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Definimos*

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ é mensurável e } |f|^p \text{ é integrável em } \Omega\} \, .$$

Equipamos $L^p(\Omega)$ com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{1/p} .$$

Para $p = \infty$, definimos

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \begin{array}{l} f \text{ é mensurável e existe uma constante } C > 0 \\ \text{tal que } |f(x)| \leq C \quad \text{q.t.p. em } \Omega \end{array} \right\}.$$

Equipamos $L^\infty(\Omega)$ com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C : \ |f(x)| \leq C \quad \text{q.t.p. em } \Omega\}.$$

Dizer que uma propriedade vale q.t.p. (quase todo ponto) em um conjunto Ω, significa que tal propriedade vale em todo o conjunto, exceto num subconjunto A tal que $|A| = 0$.

Como já é conhecido da literatura, para $1 \leq p \leq \infty$, L^p é um espaço de Banach, ou seja, é um espaço vetorial normado e completo.[1] Denotamos por $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ o

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) := \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \in L^p(U) \text{ para cada } U \Subset \Omega\},$$

em que $U \Subset \Omega$ significa que $\overline{U} \subset \Omega$ e $\overline{U}$ é um conjunto compacto.

Definiremos agora o espaço de Sobolev $W^{2,p}$.

Definição 2.3 (Espaço de Sobolev $W^{2,p}$) *Sejam $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p \leq \infty$ e seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Definimos*

$$W^{2,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \begin{array}{l} \exists Du, D^2u \text{ no sentido fraco} \\ \text{e } \ Du, D^2u \in L^p(\Omega). \end{array} \right\}$$

Munimos $W^{2,p}(\Omega)$ com a norma

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|Du\|_{L^p(\Omega)} + \left\|D^2u\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Da mesma forma que os espaços de Lebesgue, para $1 \leq p \leq \infty$, $W^{2,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach. Denotamos por $W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ o conjunto

$$W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega) := \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \in W^{2,p}(U) \text{ para cada } U \Subset \Omega\}.$$

Uma discussão aprofundada sobre derivadas no sentido fraco pode ser encontrada em [3].

No que segue, definiremos o expoente conjugado de Sobolev.

[1]Este resultado é conhecido como Teorema de Fischer-Riesz. Para uma demonstração consultar [3, Teorema 4.8].

Definição 2.4 (Conjugado de Sobolev) *Seja $1 \leq p < d$. Definimos por*

$$p^* = \frac{dp}{d-p}$$

o conjugado de Sobolev de p.

Para $\delta > 0$, denotamos por Ω_δ o subconjunto de Ω dado por

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}.$$

Denotamos por $B_r(x)$ a bola aberta, de centro x e raio r, em $\mathbb{R}^d$, dada por

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| < r\}.$$

Quando o centro da bola for a origem de $\mathbb{R}^d$, denotaremos por B_r.

Agora, definimos o suavizador padrão.

Definição 2.5 (Suavizador padrão) *i) Definimos $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ por*

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right) & se \quad |x| < 1 \\ 0 & se \quad |x| \geq 1, \end{cases}$$

a constante $C > 0$ é escolhida de modo que $\int_{\mathbb{R}^d} \eta dx = 1$.

ii) Para cada $\delta > 0$, definimos

$$\eta_\delta(x) := \frac{1}{\delta^d} \eta\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

A função η definida acima é chamada suavizador padrão. As funções η_δ são de classe C^∞ e satisfazem

$$\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\delta dx = 1 \ \text{ e } \operatorname{supp}(\eta_\delta) \subset B_\delta,$$

em que $\operatorname{supp}(\eta_\delta) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : \eta_\delta(x) \neq 0\}}$ *é o suporte da função η_δ.*

Em seguida, definimos a suavização de uma função e enunciamos algumas de suas propriedades.

Definição 2.6 (Suavização padrão) *Seja $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente integrável. Definimos a suavização padrão de u por*

$$u_\delta := \eta_\delta * u \ \text{ em } \Omega_\delta.$$

Ou seja,

$$u_\delta(x) = \int_\Omega \eta_\delta(x-y)u(y)\,dy = \int_{B_\delta} \eta_\delta(y)u(x-y)\,dy$$

para $x \in \Omega_\delta$.

Agora, vejamos algumas propriedades das suavizações.

Teorema 2.7 (Propriedade da suavização) *Seja* u_δ *a suavização padrão de* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. *Então:*

i) Para cada $\delta > 0$, $u_\delta \in C^\infty(\Omega_\delta)$.

ii) Se $u \in C(\Omega)$, *então*

$$u_\delta \to u$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω.

iii) Se $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ *para algum* $1 \leq p < \infty$, *então*

$$u_\delta \to u \quad \text{em} \quad W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega).$$

A seguir, definimos o que são pontos de Lebesgue.

Definição 2.8 (Ponto de Lebesgue) *Seja* $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, *para algum* $1 \leq p < \infty$. *Dizemos que* $x \in \mathbb{R}^d$ *é um ponto de Lebesgue para* f *se vale*

$$\lim_{r\to 0} ⨍_{B_r(x)} |f - f(x)|\,dx = 0.$$

2.2 Algumas desigualdades

Nesta seção, apresentamos algumas desigualdades que usaremos ao longo deste trabalho.

Lema 2.9 *Sejam* $a, b, k \in \mathbb{R}$, *com* $a, b \geq 0$ *e* $k \geq 1$, *então vale*

$$(a+b)^k \leq 2^{k-1}(a^k + b^k). \tag{2-1}$$

Demonstração. Note que para $1 \leq k$ e $0 \leq x$, a função $f(x) = x^k$ é convexa. De fato, f é uma função potência e, portanto, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Calculando a segunda derivada de f, temos que

$$f''(x) = k(k-1)x^{k-2}.$$

Ou seja, a segunda derivada $f''(x)$ é sempre não negativa para $1 \leq k$ e $0 \leq x$. Portanto, a função $f(x) = x^k$ é convexa em seu domínio.

Consequentemente, como f é convexa, aplicamos a desigualdade de Jensen[2] para $f((a+b)/2)$ e obtemos que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Isto é,

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \leq \frac{a^k+b^k}{2}.$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade precedente por 2^k, concluímos que

$$(a+b)^k \leq 2^{k-1}(a^k+b^k).$$

■

O resultado seguinte é um análogo do lema anterior para $k \leq 1$.

Lema 2.10 *Sejam $a, b, k \in \mathbb{R}$, com $a, b \geq 0$ e $0 < k \leq 1$. Então, se a e b não são ambos iguais a zero, vale*

$$(a+b)^k \leq (a^k+b^k). \tag{2-2}$$

Demonstração. Com efeito, lembre que para $0 < k < 1$ a aplicação

$$x \mapsto x^{k-1}$$

é decrescente em $(0, \infty)$. Dessa forma, se a e b não são ambos iguais a zero, temos que

$$\begin{aligned}(a+b)^k &= (a+b)^{k-1}(a+b) \\ &= a(a+b)^{k-1} + b(a+b)^{k-1}.\end{aligned}$$

Como x^{k-1} é decrescente e $a, b \leq a+b$, segue que

$$(a+b)^{k-1} \leq a^{k-1} \quad \text{e} \quad (a+b)^{k-1} \leq b^{k-1}.$$

[2]Para uma discussão detalhada desta desigualdade, sugerimos ao leitor que consulte [13].

Por consequência,

$$\begin{aligned}(a+b)^k &\leq a \cdot a^{k-1} + b \cdot b^{k-1} \\ &= a^k + b^k.\end{aligned}$$

■

Lema 2.11 *Para cada $1 \leq p < \infty$, existe uma constante $C_1 = C_1(d,p)$ tal que*

$$\fint_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy \leq C_1 r^{d+p-1} \int_{B_r(x)} |Df(y)||y - z|^{1-d} dy, \tag{2-3}$$

para todo ponto de Lebesgue z de $f \in W^{1,p}(B_r(x))$.

Teorema 2.12 (Desigualdade de Poincaré em bolas) *Sejam $1 \leq p < d$ e $f \in W^{1,p}(B_r(x))$. Então, para cada p, existe uma constante $C_2 = C_2(d,p)$ tal que*

$$\left(\fint_{B_r(x)} |f(y) - f_{(x,r)}|^{p^*} dy\right)^{\frac{1}{p*}} \leq C_2 r \left(\fint_{B_r(x)} |Df(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2-4}$$

em que $f_{(x,r)} = \fint_{B_r(x)} f(y) dy$.

Teorema 2.13 (Desigualdade de Morrey) *Seja $f \in W^{1,p}(B_r(x))$. Então, para cada $d < p < \infty$, existe uma constante $C_3 = C_3(d,p)$ tal que*

$$|f(y) - f(z)| \leq C_3 r \left(\fint_{B_r(x)} |Df(w)|^p dw\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2-5}$$

para quase todos $y, z \in B_r(x)$.

Para as demonstrações e uma discussão detalhada do lema 2.11 e dos teoremas 2.12 e 2.13 indicamos ao leitor que consulte a seção 4.5 do livro [12].

2.3 Equações elípticas de segunda ordem completamente não-lineares

Nesta seção, exibimos algumas definições e resultados preliminares no que diz respeito a teoria das equações diferenciais parciais elípticas completamente não-lineares com ingredientes mensuráveis.

Estamos interessados em estudar equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem, completamente não-lineares, da forma

$$G(x, u, Du, D^2u) = 0 \text{ em } \Omega,$$

em que

$$G : (\Omega \setminus \mathcal{N}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathrm{S}(d) \to \mathbb{R}.$$

Aqui, Ω é um conjunto aberto e limitado em $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{N} \subset \Omega$ é um conjunto com medida de Lebesgue nula. Denotamos por $\mathrm{S}(d)$ o conjunto das matrizes simétricas $d \times d$ com entradas reais. Equipamos este conjunto com uma relação de ordem parcial, nomeadamente, dados $X, Y \in \mathrm{S}(d)$, dizemos que $X \leq Y$ se $0 \leq \langle (Y - X)\xi, \xi \rangle$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$, em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno Euclidiano.

Definição 2.14 (Elipticidade uniforme) *Seja* $G : (\Omega \backslash \mathcal{N}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathrm{S}(d) \to \mathbb{R}$*. Dizemos que* G *é uniformemente elíptico (UE) se, para constates* $0 < \lambda \leq \Lambda$*,* G *satisfaz*

$$G(x, r, p, X) - \Lambda \mathrm{tr}(P) \leq G(x, r, p, X + P) \leq G(x, r, p, X) - \lambda \mathrm{tr}(P), \quad \text{(UE)}$$

para todo $(x, r, p) \in (\Omega \setminus \mathcal{N}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *e* $X, P \in \mathrm{S}(d)$*, com* $P \geq 0$*.*

No que segue, definimos os operadores extremais de Pucci. Estes operadores desempenham papel fundamental na teoria das equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem, completamente não-lineares, especialmente no que se refere à teoria de regularidade para tais equações.

Definição 2.15 (Operadores extremais de Pucci) *Sejam* $0 < \lambda \leq \Lambda$ *constantes fixadas. Definimos os operadoes* $\mathcal{P}^{\pm}_{\lambda,\Lambda} : \mathrm{S}(d) \to \mathbb{R}$ *como*

$$\mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}(X) = -\Lambda \mathrm{tr}(X^+) + \lambda \mathrm{tr}(X^-)$$

e

$$\mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}(X) = -\lambda \mathrm{tr}(X^+) + \Lambda \mathrm{tr}(X^-),$$

em que X^+ *e* X^- *são a as partes positiva e negativa de* X*, respectivamente.*

Usamos os operadores extremais de Pucci para definir operadores elípticos com dependência explícita no gradiente e na variável espacial. A saber, definimos os operadores $G : (\Omega \setminus \mathcal{N}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathrm{S}(d) \to \mathbb{R}$ por

$$G(x, r, p, X) = \mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}(X) - \gamma|p| - f(x)$$

e $H : (\Omega \setminus \mathcal{N}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathrm{S}(d) \to \mathbb{R}$ por

$$H(x, r, p, X) = \mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}(X) + \gamma|p| - f(x),$$

em que $\gamma \geq 0$ e $f \in L^p(\Omega)$.

Os operadores definidos acima são exemplos de operadores uniformemente elípticos. De fato, sejam $X, P \in \mathrm{S}(d)$, com $P \geq 0$. Então,

$X + P = X^+ + P - X^-$ e, deste modo,

$$(X+P)^+ = X^+ + P^+ = X^+ + P \quad \text{e} \quad (X+P)^- = X^-.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X+P) &= -\lambda \mathrm{tr}((X+P)^+) + \Lambda \mathrm{tr}((X+P)^-) \\
&= -\lambda \mathrm{tr}(X^+ + P) + \Lambda \mathrm{tr}(X^-) \\
&= -\lambda \mathrm{tr}(X^+) + \Lambda \mathrm{tr}(X^-) - \lambda \mathrm{tr}(P) \\
&= \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X) - \lambda \mathrm{tr}(P).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X) - \Lambda \mathrm{tr}(P) &= -\lambda \mathrm{tr}(X^+) + \Lambda \mathrm{tr}(X^-) - \Lambda \mathrm{tr}(P) \\
&= -\lambda \mathrm{tr}(X^+ + P^+ - P^+) + \Lambda \mathrm{tr}((X+P)^-) - \Lambda \mathrm{tr}(P) \\
&= -\lambda \mathrm{tr}(X^+ + P^+) + \lambda \mathrm{tr}(P^+) + \Lambda \mathrm{tr}((X+P)^-) - \Lambda \mathrm{tr}(P) \\
&= -\lambda \mathrm{tr}((X+P)^+) + \Lambda \mathrm{tr}((X+P)^-) + (\lambda - \Lambda)\mathrm{tr}(P) \\
&\le \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X+P),
\end{aligned}$$

uma vez que $(\lambda - \Lambda)\mathrm{tr}(P) \le 0$. Portanto, mostramos que $\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}$ é uniformemente elíptico.

Já para $\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X+P) &= -\Lambda \mathrm{tr}((X+P)^+) + \lambda \mathrm{tr}((X+P)^-) \\
&= -\Lambda \mathrm{tr}(X^+ + P) + \lambda \mathrm{tr}(X^-) \\
&= -\Lambda \mathrm{tr}(X^+) + \lambda \mathrm{tr}(X^-) - \Lambda \mathrm{tr}(P) \\
&= \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X) - \Lambda \mathrm{tr}(P).
\end{aligned}$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X) - \lambda \mathrm{tr}(P) &= -\Lambda \mathrm{tr}(X^+) + \lambda \mathrm{tr}(X^-) - \lambda \mathrm{tr}(P) \\
&= -\Lambda \mathrm{tr}(X^+ + P^+ - P^+) + \lambda \mathrm{tr}((X+P)^-) - \lambda \mathrm{tr}(P) \\
&= -\Lambda \mathrm{tr}(X^+ + P^+) + \Lambda \mathrm{tr}(P^+) + \lambda \mathrm{tr}((X+P)^-) - \lambda \mathrm{tr}(P) \\
&= -\Lambda \mathrm{tr}((X+P)^+) + \lambda \mathrm{tr}((X+P)^-) + (\Lambda - \lambda)\mathrm{tr}(P) \\
&\ge \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X+P),
\end{aligned}$$

já que $(\Lambda - \lambda)\mathrm{tr}(P) \ge 0$.

Por fim,

$$\begin{aligned} G(x,r,p,X+P) &= \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X+P) - \gamma|p| - f(x) \\ &\leq \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X) - \lambda \mathrm{tr}(P) - \gamma|p| - f(x) \\ &= G(x,r,p,X) - \lambda \mathrm{tr}(P) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G(x,r,p,X+P) &= \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X+P) - \gamma|p| - f(x) \\ &= \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X) - \Lambda \mathrm{tr}(P) - \gamma|p| - f(x) \\ &= G(x,r,p,X) - \Lambda \mathrm{tr}(P). \end{aligned}$$

Portanto, G é uniformemente elíptico.

No que segue, definiremos a condição de estrutura que usaremos neste trabalho.

Definição 2.16 (Condição de estrutura) *Seja* $F : (\Omega \setminus \mathcal{N}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathrm{S}(d) \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função mensurável tal que* $F(x,\cdot,\cdot,\cdot) \in L^p(\Omega)$*, para algum* $p > d/2$*. Dizemos que* F *satisfaz uma condição de estrutura se, para cada* $R > 0$*, existe uma função contínua e não-decrescente* ω_R *tal que* $\omega_R(0) = 0$ *e*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X-Y) - \gamma|p-q| - \omega_R((s-r)^+) &\leq F(x,r,p,X) - F(x,s,q,Y) \\ &\leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X-Y) + \gamma|p-q| + \omega_R((r-s)^+), \end{aligned} \tag{CE}$$

em que $X, Y \in \mathrm{S}(d)$*,* $p, q \in \mathbb{R}^d$ *e* $|r|, |s| \leq R$*.*

Note que se $p = q$ e $r = s$, temos

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X-Y) \leq F(x,r,p,X) - F(x,r,p,Y) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X-Y).$$

Substituindo X por $Z + P$ e Y por $Y = Z$, segue que

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(P) \leq F(x,r,p,Z+P) - F(x,r,p,Z) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(P),$$

isto é,

$$\begin{aligned} -\Lambda \mathrm{tr}(P^+) + \lambda \mathrm{tr}(P^-) &\leq F(x,r,p,Z+P) - F(x,r,p,Z) \\ &\leq -\lambda \mathrm{tr}(P^+) + \Lambda \mathrm{tr}(P^-). \end{aligned}$$

Como $P \geq 0$, então $P^- = 0$ e $P^+ = P$. Portanto $\mathrm{tr}(P^-) = 0$ e estas últimas desigualdades tornam-se

$$F(x,r,p,Z) - \Lambda \mathrm{tr}(P) \leq F(x,r,p,Z+P) \leq F(x,r,p,Z) - \lambda \mathrm{tr}(P).$$

Deste modo, concluímos então que, quando $p = q$ e $r = s$, a condição de estrutura é a própria elipticidade uniforme.

Demonstremos agora algumas propriedades dos operadores de Pucci.

Lema 2.17 (Propriedades dos operadores de Pucci) *Sejam* $X, Y \in \mathrm{S}(d)$ *e* $r \geq 0$*. Então:*

a) $\mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}(rX) = r\mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}(X)$,

b) $\mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}(X+Y) \leq \mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}(X) + \mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}(Y)$,

c) $\mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}(-X) = -\mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}(X)$,

d) $\mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}(rX) = r\mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}(X)$,

e) $\mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}(X) + \mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}(Y) \leq \mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}(X+Y)$,

f) $\mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}(-X) = -\mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}(X)$,

g) $\mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}(X) - \mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}(Y) \leq \mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}(X-Y) \leq \mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}(X-Y) \leq \mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}(X) - \mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}(Y)$.

Em particular, $\mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}$ *é convexo e* $\mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}$ *é côncavo.*

Demonstração. Provemos inicialmente que $(rX)^{+} = rX^{+}$ e $(rX)^{-} = rX^{-}$. Se $r = 0$, não há nada o que provar. Se $r > 0$, então

$$\begin{aligned}(rX)^{+} &= \begin{cases} rX, & \text{se } rX > 0 \\ 0, & \text{se } rX \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} rX, & \text{se } X > 0 \\ 0, & \text{se } X \leq 0 \end{cases} \\ &= rX^{+}.\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos que $(rX)^{-} = rX^{-}$. Agora demonstraremos as propriedades.

a) $\mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}(rX) = r\mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}(X)$.

De fato,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}(rX) &= -\lambda \mathrm{tr}((rX)^{+}) + \Lambda \mathrm{tr}((rX)^{-}) \\ &= -\lambda \mathrm{tr}(rX^{+}) + \Lambda \mathrm{tr}(rX^{-}) \\ &= -r\lambda \mathrm{tr}(X^{+}) + r\Lambda \mathrm{tr}(X^{-}) \\ &= r\mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}(X),\end{aligned}$$

uma vez que $\text{tr}(rM) = r\text{tr}(M)$, para toda matriz M.

O item d) segue de maneira análoga, utilizando que $(rX)^- = rX^-$.

b) $\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X+Y) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X) + \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X)$.

A priori, note que $\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X) = -\Lambda\text{tr}(X) + (\Lambda - \lambda)\text{tr}(X^+)$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X) &= -\lambda\text{tr}(X^+) + \Lambda\text{tr}(X^-)\\ &= -\lambda\text{tr}(X^+) + \Lambda\text{tr}(X^+) - \Lambda\text{tr}(X^+) + \Lambda\text{tr}(X^-)\\ &= -\Lambda(\text{tr}(X^+) - \text{tr}(X^-)) + (\Lambda - \lambda)\text{tr}(X^+).\end{aligned}$$

Pela linearidade do traço, temos que $\text{tr}(X^+) - \text{tr}(X^-) = \text{tr}(X^+ - X^-)$. Entretanto, $X = X^+ - X^-$ e, consequentemente, $\text{tr}(X^+) - \text{tr}(X^-) = \text{tr}(X)$. Logo, $\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X) = -\Lambda\text{tr}(X) + (\Lambda - \lambda)\text{tr}(X^+)$.

Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X+Y) &= -\Lambda\text{tr}(X+Y) + (\Lambda - \lambda)\text{tr}((X+Y)^+)\\ &= -\Lambda\text{tr}(X) - \Lambda\text{tr}(Y) + \Lambda\text{tr}((X+Y)^+) - \lambda\text{tr}((X+Y)^+).\end{aligned}$$

Pela subaditividade de $\text{tr}(X^+)$, segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X+Y) &\leq -\Lambda\text{tr}(X) - \Lambda\text{tr}(Y) + \Lambda\text{tr}(X^+) + \Lambda\text{tr}(Y^+) - \lambda\text{tr}(X^+)\\ &\quad - \lambda\text{tr}(Y^+)\\ &= -\Lambda\text{tr}(X^+) + \Lambda\text{tr}(X^-) - \Lambda\text{tr}(Y^+) + \Lambda\text{tr}(Y^-) + \Lambda\text{tr}(X^+)\\ &\quad + \Lambda\text{tr}(Y^+) - \lambda\text{tr}(X^+) - \lambda\text{tr}(Y^+)\\ &= \Lambda\text{tr}(X^-) + \Lambda\text{tr}(Y^-) - \lambda\text{tr}(X^+) - \lambda\text{tr}(Y^+)\\ &= \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X) + \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(Y).\end{aligned}$$

e) $\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X) + \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X) \leq \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X+Y)$.

Note que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X) &= -\Lambda\text{tr}(X^+) + \lambda\text{tr}(X^-)\\ &= -\Lambda\text{tr}(X^+) + \Lambda\text{tr}(X^-) + \lambda\text{tr}(X^-) - \Lambda\text{tr}(X^-)\\ &= -\Lambda\text{tr}(X) + (\lambda - \Lambda)\text{tr}(X^-).\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X+Y) &= -\Lambda \mathrm{tr}(X+Y) + (\lambda-\Lambda)\mathrm{tr}((X+Y)^-) \\
&= -\Lambda \mathrm{tr}(X) - \Lambda \mathrm{tr}(Y) + \lambda \mathrm{tr}((X+Y)^-) - \Lambda \mathrm{tr}((X+Y)^-) \\
&\geq -\Lambda \mathrm{tr}(X^+) + \Lambda \mathrm{tr}(X^-) - \Lambda \mathrm{tr}(Y^+) + \Lambda \mathrm{tr}(Y^-) \\
&\quad + \lambda \mathrm{tr}(X^-) + \lambda \mathrm{tr}(Y^-) - \Lambda \mathrm{tr}(X^-) - \Lambda \mathrm{tr}(Y^-) \\
&= -\Lambda \mathrm{tr}(X^+) + \lambda \mathrm{tr}(X^-) - \Lambda \mathrm{tr}(Y^+) + \lambda \mathrm{tr}(Y^-) \\
&= \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X) + \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(Y).
\end{aligned}
$$

Antes de provarmos os itens c) e f), mostremos primeiro as seguintes igualdades: $(-X)^+ = X^-$ e $(-X)^- = X^+$. Por certo,

$$
\begin{aligned}
(-X)^+ &= \begin{cases} -X, & \text{se } -X > 0 \\ 0, & \text{se } -X \leq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} -X, & \text{se } X < 0 \\ 0, & \text{se } X \geq 0 \end{cases} \\
&= X^-.
\end{aligned}
$$

Do mesmo modo,

$$
\begin{aligned}
(-X)^- &= \begin{cases} -(-X), & \text{se } -X < 0 \\ 0, & \text{se } -X \geq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} X, & \text{se } X > 0 \\ 0, & \text{se } X \leq 0 \end{cases} \\
&= X^+.
\end{aligned}
$$

A seguir, demonstraremos os itens c) e f).

c) $\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(-X) = -\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X)$.

Realmente,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(-X) &= -\lambda \mathrm{tr}((-X)^+) + \Lambda \mathrm{tr}((-X)^-) \\
&= -\lambda \mathrm{tr}(X^-) + \Lambda \mathrm{tr}(X^+) \\
&= -\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X).
\end{aligned}
$$

f) $\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(-X) = -\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X)$.

Decerto,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(-X) &= \lambda\mathrm{tr}((-X)^-) - \Lambda\mathrm{tr}((-X)^+)\\ &= \lambda\mathrm{tr}(X^+) - \Lambda\mathrm{tr}(X^-)\\ &= -(-\lambda\mathrm{tr}(X^+) + \Lambda\mathrm{tr}(X^-))\\ &= -\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X).\end{aligned}$$

(g) $\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X) - \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(Y) \leq \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X-Y) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X-Y) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X) - \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(Y)$.

Vamos demonstrar cada desigualdade separadamente, começando da esquerda para a direita. Pelo item f), decorre que

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X) - \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(Y) = \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X) + \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(-Y).$$

Por sua vez, pelo item e), segue que

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X) + \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(-Y) \leq \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X-Y).$$

Logo,

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X) - \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(Y) \leq \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X-Y).$$

Agora, por (CE), temos

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X-Y) - \gamma|p-q| - \omega_R((s-r)^+) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X-Y) &+ \gamma|p-q|\\ &+ \omega_R((r-s)^+).\end{aligned}$$

Considerando $p = q$ e $r = s$, acontece que

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X-Y) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X-Y),$$

o que demonstra a segunda desigualdade.

Por fim, pelo item b), sucede-se que

$$\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X-Y) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X) + \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(-Y).$$

Enquanto que, pelo item c), temos que

$$\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(-Y) = -\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(Y).$$

Deste modo, concluímos que

$$\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X-Y) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X) - \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(Y).$$

Para finalizar a demonstração do lema, verifiquemos que $\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}$ é convexo e $\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}$ é côncavo. Efetivamente, para todo $t \in [0,1]$, temos que $1-t \geq 0$. Assim, pela homogeneidade e subaditividade de $\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}$ e $\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}$, decorre que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(tX+(1-t)Y) &\leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(tX)+\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}((1-t)Y)\\ &= t\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X)+(1-t)\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(Y)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(tX+(1-t)Y) &\geq \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(tX)+\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}((1-t)Y)\\ &= t\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X)+(1-t)\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(Y).\end{aligned}$$

■

Observação 2.18 *Uma maneira alternativa de definir os operadores extremais de Pucci é a seguinte:*

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X) = \inf_{\lambda I \leq A \leq \Lambda I}\{-\mathrm{tr}(AX)\}$$

e

$$\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X) = \sup_{\lambda I \leq A \leq \Lambda I}\{-\mathrm{tr}(AX)\}.$$

Para finalizar esta seção, definimos o que são elipticidade degenerada e operador próprio e observamos a relação entre a condição de estrutura e estas definições.

Definição 2.19 (Elipticidade degenerada) *Dizemos que* $F : (\Omega\backslash\mathcal{N})\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathrm{S}(d)\to\mathbb{R}$ *é degenerado elíptico se, para* (x,r,p) *arbitrários e* $X,Y\in\mathrm{S}(d)$ *com* $X\geq Y$*, temos*

$$F(x,r,p,X)\leq F(x,r,p,Y).$$

Observamos, aqui, que se F satisfaz a condição de estrutura, então F é degenerado elíptico. De fato, sejam (x,r,p) arbitrários e $X,Y\in\mathrm{S}(d)$ com $X\geq Y$. De (CE), decorre que

$$\begin{aligned}F(x,r,p,X) &= F(x,r,p,X-Y+Y)\\ &\leq F(x,r,p,Y)-\lambda\mathrm{tr}(X-Y)\\ &\leq F(x,r,p,Y),\end{aligned}$$

pois $-\lambda\mathrm{tr}(X-Y)\leq 0$.

Definição 2.20 (Operador próprio) *Seja* $F : (\Omega \setminus \mathcal{N}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathrm{S}(d) \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável. Dizemos que* $F = F(x, r, p, X)$ *é própria se* F *é degenerado elíptico, e para quaisquer* $(x, p, X) \in (\Omega \setminus \mathcal{N}) \times \mathbb{R}^d \times \mathrm{S}(d)$*, temos*

$$F(x, r, p, X) \leq F(x, s, p, X)$$

sempre que $r \leq s$.

Vale notar que um operador F que satisfaz (CE) também é próprio. De fato, consideremos $r \leq s$. Então, $r - s \leq 0$, o que implica que $(r - s)^+ = 0$ e, deste modo, $\omega_R((r - s)^+) = 0$. Assim, da segunda desigualdade de (CE) obtemos que

$$F(x, r, p, X) - F(x, s, p, X) \leq \omega_R((r - s)^+) = 0,$$

ou seja,

$$F(x, r, p, X) \leq F(x, s, p, X).$$

3
O Princípio do máximo de Aleksandrov-Bakelman-Pucci para soluções L^p-viscosidade

O propósito deste capítulo é demonstrar o Princípio do Máximo de Aleksandrov-Bakelman-Pucci (ABP) no contexto das soluções L^p-viscosidade. Essencialmente, este resultado nos diz que dada uma solução L^p-viscosidade da equação (**??**), seu supremo no interior do seu domínio é controlado pelo supremo da parte positiva da função na fronteira do domínio, somado a uma constante multiplicada pela norma L^d do termo fonte sobre o conjunto de contato com o envelope côncavo. Inicialmente, apresentamos definições das soluções C-viscosidade, L^p-forte e L^p-viscosidade.

3.1
Soluções C-viscosidade e L^p-forte

O conceito de solução C-viscosidade foi introduzido por Michael G. Crandall e Pierre-Louis Lions em [9], em 1983. Nestre trabalho, os autores introduziram um novo conceito de solução para equações de primeira ordem não-lineares, do tipo Hamilton-Jacobi. Posteriormente, essa noção de solução foi estendida, por Pierre-Louis Lions [19], para equações de segunda ordem. A seguir, definiremos o que são soluções C-viscosidade.

Definição 3.1 (Solução C-viscosidade) *Sejam $F \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathrm{S}(d))$ e $f \in C(\Omega)$. Uma função $u \in C(\Omega)$ é uma subsolução C-viscosidade para*

$$F(x, u, Du, D^2u) = f \ \text{em } \Omega, \tag{3-1}$$

se, para toda $\varphi \in C^2(\Omega)$ e $x_0 \in \Omega$ tal que $(u-\varphi)(x_0) \geq (u-\varphi)(x)$ localmente, temos

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq f(x_0).$$

Similarmente, dizemos que $u \in C(\Omega)$ é uma supersolução C-viscosidade para (3-1) *se, para toda $\varphi \in C^2(\Omega)$ e $x_0 \in \Omega$ tal que $(u-\varphi)(x_0) \leq (u-\varphi)(x)$ localmente, temos*

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq f(x_0).$$

Finalmente, se $u \in C(\Omega)$ é, ao mesmo tempo, sub e supersolução C-viscosidade para (3-1)*, dizemos que u é uma solução C-viscosidade de* (3-1)*.*

Observe que, na definição anterior, pedimos que F e f sejam contínuas. No entanto, há problemas nos quais esses termos podem ser apenas mensuráveis. Nesse contexto, a unicidade de soluções não é sempre garantida, como veremos no exemplo abaixo.

Exemplo 3.2 *Seja $A \subset [-1,1]$ um conjunto mensurável tal que, para todo intervalo $I \subset [-1,1]$, temos que $|A \cap I|$ e $|A^{\complement} \cap I| > 0$, em que $A^{\complement} = [-1,1] \setminus A$. Sejam χ_A e $\chi_{A^{\complement}}$ as funções características de A e $A^{\complement}$, respectivamente, e $f(x) = \chi_A - \chi_{A^{\complement}}$. Então qualquer função $v \in C^\infty([-1,1])$ tal que $|v''| \leq 1$, é solução C-viscosidade do seguinte problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -u'' = f \quad \textit{em} \;\; (-1,1) \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{3-2}$$

A priori, note que, da definição de f, para $x \in (-1,1)$, decorre que

$$\operatorname{ess}\liminf_{y \to x} f(y) = -1 \quad e \quad \operatorname{ess}\limsup_{y \to x} f(y) = 1.$$

Suponhamos, por absurdo, que tal v não seja solução C-viscosidade de (3-2)*, em particular, v não é subsolução C-viscosidade. Ou seja, existe $\varphi \in C^2([-1,1])$ tal que, se $v - \varphi$ tem um ponto de máximo local $x_0 \in [-1,1]$, então*

$$-\varphi''(x_0) > f(x_0) \geq 1. \tag{3-3}$$

Como x_0 é um máximo local, temos que

$$(v - \varphi)(x_0) \geq (v - \varphi)(x)$$

e

$$(v'' - \varphi'')(x_0) \leq 0$$

numa vizinhança de x_0. Reorganizando os termos nesta última desigualdade, segue que

$$-\varphi''(x_0) \leq -v''(x_0).$$

De (3-3)*, obtemos que*

$$1 \leq f(x_0) < -v''(x_0),$$

isto é,

$$-1 > v''(x_0),$$

o que é um absurdo, pois $|v''| \leq 1$, ou seja

$$-1 \leq v''.$$

O absurdo advém de supor que v não é solução. Logo, $v \in C^\infty([-1,1])$ é solução. Como v é arbitrária, concluímos que existem infinitas souções para (3-2).

Encerramos esta seção com a definição de solução L^p-forte.

Definição 3.3 (Solução L^p-forte) *Sejam $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathrm{S}(d) \to \mathbb{R}$ e $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, para $p > d/2$. Dizemos que $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ é uma subsolução L^p-forte para*

$$F(x, u, Du, D^2u) = f \text{ em } \Omega, \tag{3-4}$$

se $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \leq f(x)$ q.t.p. em Ω.

De modo similar, dizemos que $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ é uma supersolução L^p-forte para (3-4) *se $f(x) \leq F(x, u(x), Du(x), D^2u(x))$ q.t.p. em Ω.*

Por fim, se u é ambas sub e supersolução L^p-forte para (3-4) *em Ω, dizemos que u é uma solução L^p-forte para* (3-4) *em Ω.*

3.2 Soluções L^p-viscosidade

O conceito de soluções L^p-viscosidade foi introduzido por Luis Caffarelli et. al. [4], em 1996. A definição de solução L^p-viscosidade é dada a seguir. Ressaltamos que em toda a teoria que segue supomos $d \geq 2$.

Definição 3.4 (Solução L^p-viscosidade) *Seja $F : (\Omega \backslash \mathcal{N}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathrm{S}(d) \to \mathbb{R}$ um operador mensurável. Suponha que F é próprio e seja $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, para $p > d/2$. Uma função $u \in C(\Omega)$ é uma subsolução (supersolução) L^p-viscosidade de*

$$F(x, u, Du, D^2u) = f \text{ em } \Omega,$$

se, para toda $\varphi \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, sempre que $\varepsilon > 0$, $U \subset \Omega$ é aberto e

$$\begin{aligned} F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) - f(x) &\geq \varepsilon, \qquad \text{q.t.p. em } U \\ (F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) - f(x) &\leq -\varepsilon, \quad \text{q.t.p. em } U), \end{aligned} \tag{3-5}$$

então, $u - \varphi$ não pode ter um máximo (mínimo) local em U. Equivalentemente, u é uma subsolução (supersolução) L^p-viscosidade se para toda $\varphi \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e para um ponto $x_0 \in \Omega$ no qual $u - \varphi$ tem um máximo (mínimo) local, então

$$
\begin{gathered}
\operatorname*{ess\,lim\,inf}_{x\to x_0} \left(F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)) - f(x)\right) \leq 0 \\
\left(\operatorname*{ess\,lim\,sup}_{x\to x_0} \left(F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)) - f(x)\right) \geq 0\right).
\end{gathered}
\tag{3-6}
$$

Além disso, dizemos que u é uma solução L^p-viscosidade de $F = f$ em Ω se u é sub e supersolução L^p-viscosidade de $F = f$ em Ω.

A primeira desigualdade em (3-6) significa que para todos $\varepsilon, r > 0$ existe um conjunto $A \subset B_r(x_0)$ de medida positiva tal que $F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)) - f(x) \leq \varepsilon$, em que $x \in A$.

Observação 3.5 *$v \in C(\Omega)$ é uma supersolução L^p-viscosidade de $F = f$ se, e somente se, $u = -v$ é uma subsolução L^p-viscosidade de $H = 0$, em que*

$$H(x,r,p,X) = f(x) - F(x,-r,-p,-X).$$

Além disso, F satisfaz (CE) *se, e somente se, H a satisfaz.*

De fato, se v é uma supersolução L^p-viscosidade de $F = f$, para toda $\varphi \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, sempre que $\varepsilon > 0$, $U \subset \Omega$ é aberto e

$$F(x,v(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)) - f(x) \leq -\varepsilon \quad \textit{q.t.p. em } U,$$

então $v - \varphi$ não pode ter um mínimo local em U. Queremos mostrar que, para toda $\psi \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, sempre que $\delta > 0$, $\mathcal{O} \subset \Omega$ é aberto e

$$H(x,u(x),D\psi(x),D^2\psi(x)) \geq \delta \quad \textit{q.t.p. em } \mathcal{O},$$

então $u - \psi$ não pode ter um máximo local em $\mathcal{O}$. Pois bem, dados ψ, δ, $\mathcal{O}$ tais que

$$H(x,u,D\psi,D^2\psi) \geq \delta,$$

como

$$
\begin{aligned}
H(x,u,D\psi,D^2\psi) &= f(x) - F(x,-u,-D\psi,-D^2\psi) \\
&= f(x) - F(x,v,-D\psi,-D^2\psi),
\end{aligned}
$$

Considerando $\varphi = -\psi$, $\delta = \varepsilon$ e $U = \mathcal{O}$, temos

$$
\begin{aligned}
f(x) - F(x,v,-D\psi,-D^2\psi) &= f(x) - F(x,v,D\varphi,D^2\varphi) \\
&\geq \varepsilon \quad \textit{q.t.p. em } U,
\end{aligned}
$$

o que implica que $v - \varphi = -(u - \psi)$ não pode ter um mínimo local em $U = \mathcal{O}$. Mas, se $-(u - \psi)$ não pode ter um mínimo local em $\mathcal{O}$, então $u - \psi$ não pode ter um máximo local em $\mathcal{O}$. Logo, $u = -v$ é uma subsolução L^p-viscosidade de $H = 0$.

Reciprocamente, suponhamos que $u = -v$ é uma subsolução de $H = 0$, em que

$$H(x, r, p, X) = f(x) - F(x, -r, -p, -X),$$

ou seja, para toda $\psi \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, sempre que $\delta > 0$ e $\mathcal{O} \subset \Omega$ é aberto e

$$H(x, u(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) \geq \delta \quad q.t.p. \text{ em } \mathcal{O},$$

então $u - \psi$ não pode ter um máximo local em $\mathcal{O}$. Dados φ, ε e U tais que

$$F(x, v, D\varphi, D^2\varphi) - f(x) \leq -\varepsilon,$$

queremos provar que $v - \varphi$ não pode ter um mínimo local em U. De fato, considerando $\psi = -\varphi$, $\delta = \varepsilon$ e $U = \mathcal{O}$, observe que

$$H(x, u, D\psi, D^2\psi) = f(x) - F(x, v, D\varphi, D^2\varphi) \geq \delta$$

e, portanto, $u - \psi = -(v - \varphi)$ não pode ter um máximo local em $\mathcal{O} = U$. Equivalentemente, $v - \varphi$ não pode ter um mínimo local em U. Portanto, v é uma supersolução L^p-viscosidade de $F = f$.

Ou seja, a partir de um resultado para subsolução, podemos obter um resultado para supersolução e vice-versa, modificando o sinal dos parâmetros do operador.

Nas Definições 3.3 e 3.4, ao impor que $p > d/2$, garantimos, pelos Teoremas de Sobolev (ver o Teorema 4.12 em [1] para uma discussão detalhada deste resultado) que a função u e a função teste φ são contínuas em Ω. Além disso, esta condição nos garante que $p > 1$, já que $d \geq 2$, o que implica que os espaços $W^{2,p}$, nesta situação, é um espaço de Banach, conforme vimos na seção 2.1. Por fim, lembremos que para $p > d/2$, funções em $W^{2,p}_{\mathrm{loc}}$ são pontualmente duas vezes diferenciáveis, ou seja, possuem expansão de Taylor de segunda ordem, como segue no resultado abaixo. Antes, lembremos que

$$f = o(g) \text{ quando } y \to x$$

significa que

$$\lim_{y \to x} \frac{|f(y)|}{|g(y)|} = 0.$$

Proposição 3.6 *Sejam $u \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ e $d/2 < p < d$, com $d > 1$. Seja $x_0 \in \Omega$ é um ponto de Lebesgue de Du em $L^{p^*}(\Omega)$ e D^2u em $L^p(\Omega)$. Então,*

$$u(x) = u(x_0) + \langle Du(x_0), x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2u(x_0)(x - x_0), x - x_0\rangle + o(|x - x_0|^2).$$

Demonstração. A priori, definamos

$$h(x) := u(x) - u(x_0) - \langle Du(x_0), x - x_0\rangle - \frac{1}{2}\langle D^2u(x_0)(x - x_0), x - x_0\rangle,$$

em que $x_0 \in \Omega$ um ponto de Lebesgue de Du em $L^{p^*}(\Omega)$ e D^2u em $L^p(\Omega)$. Queremos mostrar que $h = o(|x - x_0|^2)$, quando $x \to x_0$.

Primeiro, estimaremos a diferença $f(x) - f_{(x,r)}$, que será usada posteriormente. Se x é um ponto de Lebesgue de f e Df, em que Df é localmente integrável, usando (2-3) com $p = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_{(x,r)}| &\leq C_1 r^d \fint_{B_r(x)} |Df(y)||y - x|^{1-d}\mathrm{d}y \\
&\leq C_1 \int_0^r \frac{1}{s^{d-1}}\mathrm{d}s\left(\int_{\partial B_s(x)} |Df(y)|\mathrm{d}S\right) \\
&\leq C_1\left(\int_0^r \frac{1}{s^d}\int_{B_s(x)} |Df(y)|\mathrm{d}S\mathrm{d}s + r\fint_{B_r(x)} |Df(y)|\mathrm{d}y\right) \\
&\leq C_1 r\left(\sup_{0<s\leq r}\fint_{B_s(x)} |Df(y)|\mathrm{d}y\right)
\end{aligned} \tag{3-7}$$

Calculando Dh e D^2h, obtemos

$$Dh(x) = Du(x) - Du(x_0) - D^2u(x_0)(x - x_0)$$

e

$$D^2h(x) = D^2u(x) - D^2u(x_0).$$

Como $Dh \in L^{p^*}(\Omega)$ e $p^* > d$, podemos usar (2-5) para concluir que

$$\begin{aligned}
|h(x) - h(x_0)| &\leq C_3 r\left(\fint_{B_r(x_0)} |Dh(x)|^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&= C_3 r\left(\fint_{B_r(x_0)} |Dh(x) - Dh_{(x_0,r)} + Dh_{(x_0,r)}|^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq C_3 r\left(\fint_{B_r(x_0)} (|Dh(x) - Dh_{(x_0,r)}| + |Dh_{(x_0,r)}|)^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}}.
\end{aligned}$$

Combinando (2-1) e (2-2) nesta última desigualdade, temos que

$$
\begin{aligned}
|h(x)-h(x_0)| \leq\ & C_4 r\left(\fint_{B_r(x_0)} |Dh(x)-Dh_{(x_0,r)}|^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&+ C_4 r\left(\fint_{B_r(x_0)} |Dh_{(x_0,r)}|^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}}, \qquad (3\text{-}8)
\end{aligned}
$$

em que $C_4 = C_3 \cdot 2^{\frac{p^*-1}{p^*}}$. Aplicando (2-4) com $f = Dh$, segue que

$$
\left(\fint_{B_r(x_0)} |Dh(x)-Dh_{(x_0,r)}|^{p^*}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C_2 r\left(\fint_{B_r(x_0)} |D^2u(x)-D^2u(x_0)|^{p}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (3\text{-}9)
$$

Combinando a equação (3-8) com a equação (3-9), ocorre que

$$
\begin{aligned}
|h(x)-h(x_0)| \leq\ & C_5 r^2\left(\fint_{B_r(x_0)} |Dh(x)-Dh_{(x_0,r)}|^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&+ C_4 r\left(\fint_{B_r(x_0)} |Dh_{(x_0,r)}|^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}}, \qquad (3\text{-}10)
\end{aligned}
$$

em que $C_5 = C_4 \cdot C_2$.

No entanto, como $Dh_{(x_0,r)}$ não depende de x, temos que

$$
\begin{aligned}
\left(\fint_{B_r(x_0)} |Dh_{(x_0,r)}|^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}} &= \left(|Dh_{(x_0,r)}|^{p^*}\fint_{B_r(x_0)} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&= |Dh_{(x_0,r)}|\left(\frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&= |Dh_{(x_0,r)}|.
\end{aligned}
$$

Podemos, portanto, reescrever (3-10) da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
|h(x)-h(x_0)| \leq\ & C_5 r^2\left(\fint_{B_r(x_0)} |Dh(x)-Dh_{(x_0,r)}|^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&+ C_4 r|Dh_{(x_0,r)}|, \qquad (3\text{-}11)
\end{aligned}
$$

em que $r = |x-x_0|$.

Agora, note que, usando (3-7) com $f = Dh$ e $x = x_0$ o ponto de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned}|Dh_{(x_0,r)}| &= |Dh_{(x_0,r)} - Dh(x_0)| \\ &\leq C_1 r \sup_{0<s\leq r} \fint_{B_s(x_0)} |D^2u(x) - D^2u(x_0)|\mathrm{d}x \\ &= ro(1).\end{aligned}$$

Deste modo,

$$C_4 r|Dh_{(x_0,r)}| = C_4 r^2 o(1).$$

Por fim, como $h(x_0) = 0$, dividindo ambos os lados de (3-11) por r^2 e tomando o limite quando $r \to 0$, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0} \frac{|h(x)|}{r^2} &\leq \lim_{r\to 0} \left[C_5 \left(\fint_{B_r(x_0)} |Dh(x) - Dh_{(x_0,r)}|^{p^*}\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p^*}} + \frac{C_4}{r}|Dh_{(x_0,r)}| \right] \\ &= \lim_{r\to 0} C_5 \left(\fint_{B_r(x_0)} |Dh(x) - Dh_{(x_0,r)}|^{p^*}\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\quad + \lim_{r\to 0} \frac{C_4}{r}|Dh_{(x_0,r)}| \\ &= \lim_{r\to 0} C_5 \left(\fint_{B_r(x_0)} |Dh(x) - Dh_{(x_0,r)}|^{p^*}\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p^*}}.\end{aligned}$$

Mas, como $r = |x - x_0|$, $r \to 0$ equivale a $x \to x_0$. Dessa forma,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|h(x)|}{|x-x_0|^2} \leq \lim_{x\to x_0} C_5 \left(\fint_{B_r(x_0)} |Dh(x) - Dh_{(x_0,r)}|^{p^*}\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p^*}} = 0,$$

pois x_0 é ponto de Lebesgue de Dh. Portanto, $h = o(|x-x_0|^2)$, quando $x \to x_0$, o que significa que

$$u(x) = u(x_0) + \langle Du(x_0), x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2u(x_0)(x-x_0), x-x_0\rangle + o(|x-x_0|^2).$$

■

A relação que buscamos entre as soluções L^p-viscosidade e as soluções L^p-fortes são apresentadas nos dois lemas a seguir.

Lema 3.7 *Seja $F : (\Omega \setminus \mathcal{N}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathrm{S}(d) \to \mathbb{R}$ satisfazendo* (CE), *$d \leq p$ e $f \in L^p(\Omega)$. Se u é uma subsolução (supersolução) L^p-forte de $F = f$ em Ω, então u é uma subsolução (supersolução) L^p-viscosidade de $F = f$ em Ω.*

Demonstração. Se para toda função teste $\varphi \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, a diferença $u - \varphi$

assume um máximo local em $x_0 \in \Omega$, mostraremos que

$$\operatorname{ess}\liminf_{x\to x_0} \left(F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)) - f(x)\right) \leq 0.$$

Seja $\varphi \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e suponhamos que $x_0 \in \Omega$ é um ponto de máximo local de $u-\varphi$. Então existe uma vizinhança V de x_0 tal que $D^2(u-\varphi)(x) \leq 0$ q.t.p. em V. Assim,

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2(u-\varphi)(x)) = \lambda \mathrm{tr}((D^2(u-\varphi)(x))^-). \tag{3-12}$$

Como é subsolução L^p-forte de $F=f$, temos que $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e satisfaz

$$F(x,u(x),Du(x),D^2u(x)) \leq f(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \tag{3-13}$$

Além disso, como F satisfaz (CE), segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2(u-\varphi)(x)) - \gamma|D(u-\varphi)(x)| &\leq F(x,u(x),Du(x),D^2u(x)) \\ &\quad - F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)) \\ &\leq f(x) - F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)).\end{aligned}$$

De (3-12), decorre que

$$\lambda \mathrm{tr}((D^2(u-\varphi)(x))^-) - \gamma|D(u-\varphi)(x)| \leq f(x) - F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x))$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}-\lambda \mathrm{tr}((D^2(u-\varphi)(x))^-) + \gamma|D(u-\varphi)(x)| &\geq F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)) \\ &\quad - f(x).\end{aligned} \tag{3-14}$$

Como $D^2(u-\varphi)(x)$ é simétrica, segue que $(D^2(u-\varphi)(x))^-$ também é simétrica e, com isso, $\mathrm{tr}((D^2(u-\varphi)(x))^-)$ é igual a soma dos seus autovalores. Desta maneira, como $(D^2(u-\varphi)(x))^- \geq 0$, temos que seus autovalores são todos não-negativos e, por conseguinte,

$$\mathrm{tr}((D^2(u-\varphi)(x))^-) \geq 0,$$

o que implica que

$$-\lambda \mathrm{tr}((D^2(u-\varphi)(x))^-) \leq 0.$$

Então, (3-14) torna-se

$$\gamma|D(u-\varphi)(x)| \geq F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)) - f(x).$$

Tomando o ess lim inf quando $x \to x_0$ em ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$\operatorname{ess}\liminf_{x\to x_0} (\gamma|D(u-\varphi)(x)|) \geq \operatorname{ess}\liminf_{x\to x_0} (F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)) - f(x)).$$

Como $\gamma \geq 0$,

$$\operatorname{ess}\liminf_{x\to x_0} (\gamma|D(u-\varphi)(x)|) = \gamma \operatorname{ess}\liminf_{x\to x_0} (|D(u-\varphi)(x)|).$$

Desse modo,

$$\gamma \operatorname{ess}\liminf_{x\to x_0} (|D(u-\varphi)(x)|) \geq \operatorname{ess}\liminf_{x\to x_0} (F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)) - f(x)).$$

Por outro lado, como $u, \varphi \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, segue que $(u-\varphi) \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$. Logo, pelo fato de que x_0 é ponto de máximo de $u-\varphi$, usando o Princípio do Máximo de Bony (veja [20]), obtemos

$$\operatorname{ess}\liminf_{x\to x_0} (|D(u-\varphi)(x)|) = 0,$$

ou seja,

$$\gamma \operatorname{ess}\liminf_{x\to x_0} (|D(u-\varphi)(x)|) = 0.$$

Portanto,

$$\operatorname{ess}\liminf_{x\to x_0} (F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)) - f(x)) \leq 0,$$

isto é, u é subsolução L^p-viscosidade de $F = f$ em Ω. ■

Ao tratarmos de soluções L^p-viscosidade é imprescindível discutir para quais valores de p a teoria é consistente. Ao supor $d/2 < p$, temos uma boa definição para solução de L^p-viscosidade. No entanto, este domínio para p não nos fornece uma teoria consistente.

A partir de agora, consideraremos $p_0 < p$, em que $p_0 = p_0(d, \lambda, \Lambda)$ é o expoente introduzido por Escauriaza em [10]. Antes de demonstrar o outro lema que estabelece uma relação entre soluções L^p-fortes e L^p-viscosidade, relembremos do Princípio do Máximo Generalizado (PMG) para soluções L^p-fortes.

Teorema 3.8 *Seja $p > p_0$. Suponhamos que $u \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ seja uma solução L^p-forte para*

$$\mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}(D^2u) - \gamma|u| \leq f, \text{ em } \Omega. \tag{3-15}$$

Então

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u + C \left\| f^+ \right\|_{L^p(\Omega)}, \tag{PMG}$$

em que $C = C(\Lambda, \lambda, d, \gamma, \Omega) > 0$.

A forma reduzida de (PMG) *é*

$$\sup_{B_r(x)} u \leq \sup_{\partial B_r(x)} u + Cr^{2-\frac{d}{p}} \left\| f^+ \right\|_{L^p(B_r(x))},$$

em que $C = C(\Lambda, \lambda, \gamma, d) > 0$ *é independente de* r *para* $r \leq 1$.

Lema 3.9 *Sejam* $F : (\Omega \setminus \mathcal{N}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathrm{S}(d) \to \mathbb{R}$ *satisfazendo* (CE), $f \in L^p(\Omega)$ *e suponhamos que* (PMG) *seja válido. Se* u *é uma subsolução (supersolução)* L^p*-forte de* $F = f$ *em* Ω*, então* u *é uma subsolução (supersolução)* L^p*-viscosidade de* $F = f$ *em* Ω.

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que u seja uma subsolução L^p-forte de $F = f$ em Ω, mas não seja uma subsolução L^p-viscosidade de $F = f$ em Ω. Então existem $\varphi \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}$, $\varepsilon > 0$ e $U \subset \Omega$ aberto tais que

$$F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) \geq f(x) + \varepsilon \quad \text{q.t.p. em } U$$

e $u - \varphi$ tem um máximo $x_0 \in U$.

Usando a continuidade uniforme de F em (p, X), podemos assumir que o máximo é estrito. Como F satisfaz (CE), segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2(u-\varphi)) - \gamma|D(u-\varphi)| &\leq F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \\
&\quad - F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) \\
&\leq -\varepsilon \\
&\leq 0 \quad \text{q.t.p. em } U.
\end{aligned}$$

Por hipótese, (PMG) é válido; usando-o em sua forma reduzida, obtemos que

$$\sup_{B_r(x_0)} (u-\varphi) \leq \sup_{\partial B_r(x_0)} (u-\varphi) + Cr^{2-\frac{d}{p}} \left\| 0^+ \right\|_{L^p(B_r(x_0))} = \sup_{\partial B_r(x_0)} (u-\varphi).$$

Logo,

$$u(x_0) - \varphi(x_0) \leq \sup_{\partial B_r(x_0)} (u-\varphi),$$

para algum r pequeno. Mas isso contradiz o fato de x_0 ser um máximo local estrito de $u - \varphi$. A contradição decorre de supor que u não é subsolução L^p-viscosidade de $F = f$ em Ω. Portanto, u é subsolução L^p-viscosidade de $F = f$ em Ω. ∎

A recíproca do lema anterior é verdadeira, isto é, se $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ é uma subsolução (supersolução) L^p-viscosidade em Ω, então u é uma subsolução (supersolução) L^p-forte de $F = 0$. Entretanto, esse fato não será demonstrado neste trabalho.

A seguir, definimos o que são funções semiconvexas e semicôncavas.

Definição 3.10 (Função convexa/côncava) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto convexo. Uma função $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita convexa (côncava) se, para quaisquer $x, y \in \Omega$ e $t \in [0,1]$, temos*

$$v(tx + (1-t)y) \leq tv(x) + (1-t)v(y)$$

$$(v(tx + (1-t)y) \geq tv(x) + (1-t)v(y)).$$

Definição 3.11 (Função semiconvexa/semicôncava) *Seja $v \in C(\Omega)$. Dizemos que v é semiconvexa se existir $\varepsilon > 0$ tal que*

$$x \mapsto v(x) + \frac{|x|^2}{2\varepsilon}$$

é convexa. Dizemos que v é semicôncava se $-v$ é semiconvexa. A quantidade ε é chamada constante de semiconvexidade (semiconcavidade) de v.

Lema 3.12 *Sejam $F \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathrm{S}(d))$ satisfazendo (CE), $f \in C(\Omega)$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$. Se $u \in C(\Omega)$ é uma solução C-viscosidade de $F \leq f$, então $w = u - \varphi$ é uma subsolução C-viscosidade de*

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2 w) - \gamma|Dw| \leq f(x) - F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) \text{ em } \Omega.$$

Demonstração. Com efeito, seja $u \in C(\Omega)$ uma solução C-viscosidade de $F \leq f$. Em particular, u é uma subsolução C-viscosidade de $F \leq f$, isto é, para toda $\phi \in C^2(\Omega)$, se $u - \phi$ tem um máximo local em $x_0 \in \Omega$, então

$$(u - \phi)(x_0) \geq (u - \phi)(x) \quad \forall x \in \Omega \tag{3-16}$$

e

$$F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq f(x_0). \tag{3-17}$$

Devemos mostrar que para toda $\psi \in C^2(\Omega)$, se existe $x_0 \in \Omega$ tal que $(w - \psi)(x_0) \geq (w - \psi)(x)$, para todo $x \in \Omega$, então

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\psi(x_0)) - \gamma|D\psi(x_0)| \leq f(x_0) - F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)).$$

Note que

$$w - \psi = u - \varphi - \psi = u - (\varphi + \psi).$$

Como $\varphi, \psi \in C^2(\Omega)$, segue que $\varphi + \psi \in C^2(\Omega)$. Tomando $\phi = \varphi + \psi$, por (3-16), segue que

$$(u - (\varphi + \psi))(x_0) \geq (u - (\varphi + \psi))(x) \quad \forall x \in \Omega,$$

isto é, $u - \phi$ assumir um máximo local em $x_0 \in \Omega$ implica que $w - \psi$ também assume um máximo local em $x_0 \in \Omega$. Além disso, de (3-17) segue que

$$F(x_0, u(x_0), D(\varphi + \psi)(x_0), D^2(\varphi + \psi)(x_0)) \leq f(x_0). \tag{3-18}$$

Como

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\psi(x_0)) - \gamma|D\psi(x_0)| = \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}&(D^2(\varphi + \psi)(x_0) - D^2\varphi(x_0)) \\ &- \gamma|D(\varphi + \psi)(x_0) - D\varphi(x_0)| \end{aligned}$$

e F satisfaz (CE), ocorre que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\psi(x_0)) - \gamma|D\psi(x_0)| \leq F&(x_0, u(x_0), D(\varphi + \psi)(x_0), D^2(\varphi + \psi)(x_0)) \\ &- F(x_0, u(x_0), D(\varphi)(x_0), D^2(\varphi)(x_0)). \end{aligned}$$

De (3-18), concluímos que

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\psi(x_0)) - \gamma|D\psi(x_0)| \leq f(x_0) - F(x_0, u(x_0), D(\varphi)(x_0), D^2(\varphi)(x_0)).$$

Portanto, o resultado segue. ∎

Em seguida, definiremos sup e inf convoluções, bem como demonstraremos algumas de suas propriedades. As sup e inf convoluções são ferramentas que possuem propriedades relevantes no contexto dos argumentos de aproximação e são essenciais na demonstração do Princípio do Máximo ABP.

Definição 3.13 (Sup e inf convoluções) *Seja $u \in C(\overline{\Omega})$. Para $\varepsilon > 0$, definimos a sup convolução u^ε de u por*

$$u^\varepsilon(x) := \sup_{y \in \Omega} \left(u(y) - \frac{|y - x|^2}{2\varepsilon} \right).$$

Similarmente, a inf convolução u_ε de u é definida por

$$u_\varepsilon(x) := \inf_{y \in \Omega} \left(u(y) + \frac{|y - x|^2}{2\varepsilon} \right).$$

Da definição, notamos que $u^\varepsilon \geq u$ em Ω. A valer, para todos $x, y \in \Omega$, temos que

$$u^\varepsilon(x) \geq u(y) - \frac{|y-x|^2}{2\varepsilon}.$$

Considerando $y = x$ na desigualdade acima, obtemos que, para todo $x \in \Omega$, vale

$$u^\varepsilon(x) \geq u(x).$$

De maneira análoga, mostra-se que $u_\varepsilon \leq u$ em Ω.

Outro fato que devemos observar é que

$$\begin{aligned}
(-u)^\varepsilon(x) &= \sup_{y\in\Omega}\left(-u(y) - \frac{|y-x|^2}{2\varepsilon}\right) \\
&= -\inf_{y\in\Omega}\left(u(y) + \frac{|y-x|^2}{2\varepsilon}\right) \\
&= -u_\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Ou seja, $(-u)^\varepsilon = -u_\varepsilon$. De maneira similar, veificar-se que $(-u)_\varepsilon = -u^\varepsilon$.

Definamos agora

$$A^\varepsilon(u) := \arg\text{máx}\left(u(y) - \frac{|y-x|^2}{2\varepsilon}\right).$$

Note que $A^\varepsilon(u)$ é não vazio, pois u é contínua no compacto $\overline{\Omega}$. Considerando $x^\varepsilon \in A^\varepsilon(u)$, temos que

$$u(x^\varepsilon) - \frac{|x^\varepsilon - x|^2}{2\varepsilon} \geq u(y) - \frac{|y-x|^2}{2\varepsilon},$$

para todo $y \in \Omega$. Tomando $y = x$, obtemos

$$u(x^\varepsilon) - \frac{|x^\varepsilon - x|^2}{2\varepsilon} \geq u(x),$$

ou seja,

$$\frac{|x^\varepsilon - x|^2}{2\varepsilon} \leq u(x^\varepsilon) - u(x).$$

Por consequência,

$$\frac{|x^\varepsilon - x|^2}{2\varepsilon} \leq u(x^\varepsilon) - u(x) \leq 2\left\|u\right\|_{L^\infty(\Omega)},$$

equivalentemente,

$$|x^\varepsilon - x| \leq 2(\varepsilon\left\|u\right\|_{L^\infty(\Omega)})^{\frac{1}{2}}. \tag{3-19}$$

Deste modo, podemos concluir que se $x \in \Omega_{2(\varepsilon\|u\|_{L^\infty(\Omega)})^{\frac{1}{2}}}$, então $x^\varepsilon \in \Omega$, pois, caso contrário, se $x^\varepsilon \in \partial\Omega$, teríamos que

$$|x^\varepsilon - x| > 2(\varepsilon \|u\|_{L^\infty(\Omega)})^{\frac{1}{2}},$$

contradizendo (3-19).

No que segue, mostramos que a sup convolução é semiconvexa e a inf convolução é semicôncava.

Proposição 3.14 (Semiconvexidade de u^ε e semiconcavidade de u_ε) *Seja $u \in C(\overline{\Omega})$ e considere suas sup e inf convoluções u^ε e u_ε dadas como na Definição 3.13. A sup convolução u^ε é semiconvexa, enquanto a inf convolução u_ε é semicôncava.*

Demonstração. A princípio, note que

$$\begin{aligned} -\frac{|y-x|^2}{2\varepsilon} + \frac{|x|^2}{2\varepsilon} &= -\frac{|y|^2 - 2y\cdot x + |x|^2}{2\varepsilon} + \frac{|x|^2}{2\varepsilon} \\ &= -\frac{|y|^2}{2\varepsilon} + \frac{y\cdot x}{\varepsilon} - \frac{|x|^2}{2\varepsilon} + \frac{|x|^2}{2\varepsilon} \\ &= -\frac{|y|^2}{2\varepsilon} + \frac{y\cdot x}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Consequentemente, da definição de u^ε, temos que

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) + \frac{|x|^2}{2\varepsilon} &= \sup_{y\in\Omega}\left(u(y) - \frac{|y-x|^2}{2\varepsilon}\right) + \frac{|x|^2}{2\varepsilon} \\ &= \sup_{y\in\Omega}\left(u(y) - \frac{|y-x|^2}{2\varepsilon} + \frac{|x|^2}{2\varepsilon}\right) \\ &= \sup_{y\in\Omega}\left(u(y) - \frac{|y|^2}{2\varepsilon} + \frac{y\cdot x}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Ou seja, a aplicação

$$x \mapsto u^\varepsilon(x) + \frac{|x|^2}{2\varepsilon}$$

é o supremo de funções afins $a_y x + b_y$, em que

$$a_y := \frac{y}{\varepsilon} \quad \text{e} \quad b_y := u(y) - \frac{|y|^2}{2\varepsilon}.$$

Ademais, lembremos que funções afins são convexas e que o supremo de funções convexas é convexo (veja [2]). Deste modo, $u^\varepsilon(x) + |x|^2/2\varepsilon$ e, portanto, u^ε é semiconvexa.

Agora, veja que

$$\begin{aligned}\frac{|y-x|^2}{2\varepsilon} - \frac{|x|^2}{2\varepsilon} &= \frac{|y|^2 - 2y\cdot x + |x|^2}{2\varepsilon} - \frac{|x|^2}{2\varepsilon}\\ &= \frac{|y|^2}{2\varepsilon} - \frac{y\cdot x}{\varepsilon} + \frac{|x|^2}{2\varepsilon} - \frac{|x|^2}{2\varepsilon}\\ &= \frac{|y|^2}{2\varepsilon} - \frac{y\cdot x}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Deste modo, da definição de u_ε, segue que

$$\begin{aligned}u_\varepsilon(x) - \frac{|x|^2}{2\varepsilon} &= \inf_{y\in\Omega}\left(u(y) + \frac{|y-x|^2}{2\varepsilon}\right) - \frac{|x|^2}{2\varepsilon}\\ &= \inf_{y\in\Omega}\left(u(y) + \frac{|y-x|^2}{2\varepsilon} - \frac{|x|^2}{2\varepsilon}\right)\\ &= \inf_{y\in\Omega}\left(u(y) + \frac{|y|^2}{2\varepsilon} - \frac{y\cdot x}{\varepsilon}\right).\end{aligned}$$

Logo, a aplicação

$$x \mapsto u_\varepsilon(x) - \frac{|x|^2}{2\varepsilon}$$

é o ínfimo de funções afins $a_y x + b_y$, em que

$$a_y := \frac{y}{\varepsilon} \quad \text{e} \quad b_y := u(y) + \frac{|y|^2}{2\varepsilon}.$$

Outrossim, funções afins também são côncavas e o ínfimo de funções côncavas é côncavo. Por conseguinte, $u_\varepsilon(x) - |x|^2/2\varepsilon$ é côncava e, portanto, u_ε é semicôncava.

■

Lema 3.15 (Convergência uniforme das sup e inf convoluções) *Seja $u \in C(\overline{\Omega})$. Para $\varepsilon > 0$, sejam u^ε e u_ε a sup e a inf convolução de u. Então*

$$u^\varepsilon \to u \quad e \quad u_\varepsilon \to u$$

uniformemente em Ω, quando $\varepsilon \to 0$.

Demonstração. Faremos a demonstração da convergência para o caso da sup convolução. A priori, note que, como $u \in C(\overline{\Omega})$, u é uniformemente contínua, uma vez que $\overline{\Omega}$ é um conjunto compacto e, portanto, u admite um módulo de continuidade. Denotemos por $\omega(\cdot)$ o módulo de continuidade de u. Então, segue da definição de u^ε e do fato de $x^\varepsilon \in A^\varepsilon$ que

$$u^\varepsilon(x) = u(x^\varepsilon) - \frac{|x^\varepsilon - x|^2}{2\varepsilon}.$$

Como $-|x^\varepsilon - x|^2/2\varepsilon \leq 0$, ocorre que

$$\begin{aligned} u(x^\varepsilon) - \frac{|x^\varepsilon - x|^2}{2\varepsilon} &\leq u(x^\varepsilon) \\ &= u(x^\varepsilon) - u(x) + u(x). \end{aligned}$$

Dessa maneira, temos que

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &= u(x^\varepsilon) - u(x) + u(x) \\ &\leq u(x) + \omega(|x^\varepsilon - x|), \end{aligned}$$

ou seja,

$$u^\varepsilon(x) - u(x) \leq \omega(|x^\varepsilon - x|).$$

Como $u^\varepsilon(x) \geq u(x)$, segue que $u^\varepsilon(x) - u(x) \geq 0$. Além disso, como $|x^\varepsilon - x| \leq 2\sqrt{\varepsilon \, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}}$, ω é crescente e $\omega(0) = 0$. Logo,

$$|u^\varepsilon(x) - u(x)| \leq \omega(2\sqrt{\varepsilon \, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}}).$$

Tomando o limite quado $\varepsilon \to 0$ na desigualdade precedente, concluímos que $u^\varepsilon \to u$. Como x é arbitrário, o limite é uniforme. A demonstração para o caso da inf convolução segue de maneira similar. ∎

O último resultado que enunciaremos sobre a sup convolução estabelece que, dada uma solução C-viscosidade de $F = f$, u^ε satisfaz uma desigualdade envolvendo o mesmo operador F e o mesmo termo fonte f, num conjunto mais restrito.

Lema 3.16 *Seja $u \in C(\Omega)$ uma solução C-viscosidade para*

$$F(x, u, Du, D^2u) = f \;\text{ em } \Omega,$$

em que $F \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathrm{S}(d))$ satisfaz (CE) *e $f \in C(\Omega)$. Para todo $x^\varepsilon \in A^\varepsilon(u)$, temos*

$$F(x^\varepsilon, u(x^\varepsilon), Du^\varepsilon(x), D^2u^\varepsilon(x)) = f(x^\varepsilon) \quad \text{q.t.p.} \;\; \text{em} \;\; \Omega_{2(\varepsilon\|u\|_{L^\infty(\Omega)})^{1/2}}.$$

Para uma discussão detalhada e uma demonstração do resultado precedente, sugerimos ao leitor que consulte [15, Proposição 2].

Proposição 3.17 *Sejam F satisfazendo* (CE), *$f \in C(\Omega)$ e suponha que vale* (PMG). *Então soluções (sub-,super-) C-viscosidade de $F = f$ em Ω são soluções (sub-,super-) L^p-viscosidade de $F = f$ em Ω.*

Demonstração. Seja $u \in C(\Omega)$ uma subsolução C-viscosidade de $F = f$ em Ω. Suponhamos, por contradição, que u não seja uma subsolução L^p-viscosidade de $F = f$ em Ω. Consideremos $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$, $\psi \in W^{2,p}(B_{2r}(x_0))$ tal que $u - \psi$ tem máximo local em x_0 e

$$F(x, u(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) < f(x) + \varepsilon, \quad \text{q.t.p. em } B_r(x_0).$$

Deslocando ψ e escolhendo $r > 0$ pequeno, podemos supor que $(u - \psi)(x_0) = 3\delta \geq 0$ em $B_r(x_0)$, $(u - \psi)(x) \leq -3\delta$ em $\partial B_r(x_0)$ e $F(x, u(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) \geq f(x)$, q.t.p. em $B_r(x_0)$. Como $C^2(\Omega)$ é denso em $W^{2,p}(\Omega)$ podemos escolher uma sequência $\varphi_n \in C^2(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to \psi$ uniformemente sobre $B_r(x_0)$ e satisfaz $\|\varphi_n - \psi\|_{W^{2,p}(B_{2r}(x_0))} \to 0$. Definamos

$$w_n := u - \varphi_n.$$

Dessa forma, para algum n suficientemente grande, temos que $\max\limits_{B_r(x_0)} w_n \geq 2\delta$ e $w_n \leq -2\delta$ em $\partial B_r(x_0)$, pois caso contrário, isto é, se $\max\limits_{B_r(x_0)} w_n < 2\delta$, teríamos

$$|(w - w_n)(x_0)| = |3\delta - w_n(x_0)| > |3\delta - 2\delta| = |\delta|,$$

ou seja,

$$\delta < |(w - w_n)(x_0)| \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

o que contradiz o fato de que $\delta > 0$. Por outro lado, se tivéssemos $w_n > -2\delta$, como $w \leq -3\delta$, então

$$|w_n - w| > | - w - 2\delta| > |3\delta - 2\delta| = |\delta|,$$

consequentemente,

$$\delta < |w_n - w| \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

o que, novamente, contradiz o fato de que $\delta > 0$.

Pelo Lema (3.12), w_n é subsolução C-viscosidade de

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2 w_n) - \gamma|Dw_n| \leq g_n(x) \quad \text{em} \quad B_{2r}(x_0),$$

em que $g_n(x) = f(x) - F(x, u(x), D\varphi_n(x), D^2\varphi_n(x))$ é contínua. Ademais, temos que

$$\begin{aligned} g_n(x) &= f(x) - F(x, u(x), D\varphi_n(x), D^2\varphi_n(x)) \\ &\leq F(x, u(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) - F(x, u(x), D\varphi_n(x), D^2\varphi_n(x)) \\ &\leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2(\psi - \varphi_n)) + \gamma|D(\psi - \varphi_n)| \quad \text{q.t.p. em} \quad B_r(x_0). \end{aligned}$$

Em particular, $g_n^+(x) \leq (\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2(\psi - \varphi_n)) + \gamma|D(\psi - \varphi_n)|)^+$. Logo,

$$\int_{B_r(x_0)} (|g_n^+(x)|)^p dx \leq \int_{B_r(x_0)} [(\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda} D^2(\psi - \varphi_n) + \gamma|D(\psi - \varphi_n)|)^+]^p \mathrm{d}x.$$

Note que

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2(\psi - \varphi_n)) + \gamma|D(\psi - \varphi_n)|| &\leq |\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2(\psi - \varphi_n))| + |\gamma||D(\psi - \varphi_n)| \\ &= |\Lambda \mathrm{tr}(D^2(\psi - \varphi_n))^- - \lambda \mathrm{tr}((D^2(\psi - \varphi_n)))^+| + \gamma|D(\psi - \varphi_n)| \\ &\leq |\Lambda \mathrm{tr}(D^2(\psi - \varphi_n))^-| + |\lambda \mathrm{tr}(D^2(\psi - \varphi_n))^+| + \gamma|D(\psi - \varphi_n)|. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} &|\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2(\psi - \varphi_n)) + \gamma|D(\psi - \varphi_n)||^p \\ &\qquad \leq \left(|\Lambda \mathrm{tr}(D^2(\psi - \varphi_n))^-| + |\lambda \mathrm{tr}(D^2(\psi - \varphi_n))^+| + \gamma|D(\psi - \varphi_n)|\right)^p. \end{aligned}$$

Por (2-1), segue que

$$\begin{aligned} &|\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2(\psi - \varphi_n)) + \gamma|D(\psi - \varphi_n)||^p \\ &\quad \leq 2^{p-1}\left(|\Lambda \mathrm{tr}(D^2(\psi - \varphi_n))^-|^p + |\lambda \mathrm{tr}(D^2(\psi - \varphi_n))^+|^p + \gamma^p|D(\psi - \varphi_n)|^p\right). \end{aligned}$$

Deste modo, integrando ambos os lados da desigualdade anterior em $B_r(x_0)$, elevando ambos os lados a $1/p$ e usando (2-2), obtemos que

$$\begin{aligned} &\left(\int_{B_r(x_0)} |\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda} D^2(\psi - \varphi_n) + \gamma|D(\psi - \varphi_n)||^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\qquad \leq 2^{\frac{p-1}{p}} \left[\Lambda\left(\int_{B_r(x_0)} |\mathrm{tr}(D^2(\psi - \varphi_n))^-|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right. \\ &\qquad\qquad + \lambda\left(\int_{B_r(x_0)} |\mathrm{tr}(D^2(\psi - \varphi_n))^+|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\qquad\qquad \left. + \gamma\left(\int_{B_r(x_0)} |D(\psi - \varphi_n)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right]. \end{aligned}$$

Como $\lambda \leq \Lambda$, segue que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{B_r(x_0)} |\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda} D^2(\psi-\varphi_n) + \gamma|D(\psi-\varphi_n)||^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad \leq 2^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\Lambda \int_{B_r(x_0)} |\mathrm{tr}(D^2(\psi-\varphi_n))^-|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right. \\
&\qquad\qquad + \left(\Lambda \int_{B_r(x_0)} |\mathrm{tr}(D^2(\psi-\varphi_n))^+|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad\qquad \left. + \left(\gamma \int_{B_r(x_0)} |D(\psi-\varphi_n)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda} D^2(\psi-\varphi_n) + \gamma|D(\psi-\varphi_n)|\right\|_{L^p(B_r(x_0))} \\
&\quad \leq 2^{\frac{p-1}{p}} \left(\Lambda \left\|(D^2(\psi-\varphi_n))^-\right\|_{L^p(B_r(x_0))} + \Lambda \left\|(D^2(\psi-\varphi_n))^+\right\|_{L^p(B_r(x_0))}\right. \\
&\qquad\quad \left. + \gamma \left\|D(\psi-\varphi_n)\right\|_{L^p(B_r(x_0))}\right) \\
&\quad \leq 2^{\frac{p-1}{p}} \left(2\Lambda \left\|(D^2(\psi-\varphi_n))\right\|_{L^p(B_r(x_0))} + \gamma \left\|D(\psi-\varphi_n)\right\|_{L^p(B_r(x_0))}\right) \\
&\quad \leq 2^{\frac{p-1}{p}} \left(2\Lambda \left\|(D^2(\psi-\varphi_n))\right\|_{L^p(B_r(x_0))} + \gamma \left\|D(\psi-\varphi_n)\right\|_{L^p(B_r(x_0))}\right. \\
&\qquad\quad \left. + \left\|\psi-\varphi_n\right\|_{L^p(B_r(x_0))}\right) \\
&\quad \leq 2^{\frac{p-1}{p}} C_1 \left(\left\|(D^2(\psi-\varphi_n))\right\|_{L^p(B_r(x_0))} + \left\|D(\psi-\varphi_n)\right\|_{L^p(B_r(x_0))}\right. \\
&\qquad\quad \left. + \left\|\psi-\varphi_n\right\|_{L^p(B_r(x_0))}\right),
\end{aligned}$$

em que $C_1 = \text{máx}\{2\Lambda, \gamma, 1\}$. Dessa maneira,

$$\left\|\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda} D^2(\psi-\varphi_n) + \gamma|D(\psi-\varphi_n)|\right\|_{L^p(B_r(x_0))} \leq C \left\|\psi-\varphi_n\right\|_{W^{2,p}(B_r(x_0))},$$

em que $C = 2^{\frac{p-1}{p}} C_1$ é uma constante limitada. Como $\|\psi-\varphi_n\|_{W^{2,p}(B_r(x_0))} \to 0$ quando $n \to \infty$, segue que $\left\|\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda} D^2(\psi-\varphi_n) + \gamma|D(\psi-\varphi_n)|\right\|_{L^p} \to 0$ quando $n \to \infty$. Como

$$\begin{aligned}
&\left\|(\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda} D^2(\psi-\varphi) + \gamma|D(\psi-\varphi)|)^+\right\|_{L^p(B_r(x_0))} \\
&\qquad\qquad \leq \left\|\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda} D^2(\psi-\varphi) + \gamma|D(\psi-\varphi)|\right\|_{L^p(B_r(x_0))},
\end{aligned}$$

obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left\|g_n^+\right\|_{L^p(B_r(x_0))} = 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{3-20}$$

Seja $\varepsilon > 0$ e consideremos w_n^ε a sup convolução de w_n, para todo $n \in \mathbb{N}$; ou seja,

$$w_n^\varepsilon(x) = \sup_{z \in B_{2r}(x)} \left(w_n(z) - \frac{|z-x|^2}{2\varepsilon} \right).$$

Definamos $w := w_n^\varepsilon$, que é semiconvexa, pelo Lema 3.14, e satisfaz

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2 w) - \gamma |Dw| \leq \tilde{g}_n(x) \;\; \text{q.t.p. em } B_r(x_0),$$

em que $\tilde{g}_n(x) = \text{máx}\{g_n(z) : |z-x| \leq C\sqrt{\varepsilon}\}$ e $c = 2\, \|w\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(B_r(x_0))}$.

Como $w_n^\varepsilon \to w_n$ quando $\varepsilon \to 0$, uniformemente em $B_r(x_0)$, para ε pequeno temos que $\max\limits_{B_r(x_0)} w_n^\varepsilon \geq \delta$ e $w_n^\varepsilon \leq -\delta$ em $\partial B_r(x_0)$, pois, caso contrário, isto é, se $\max\limits_{B_r(x_0)} w_n^\varepsilon < \delta$, teríamos

$$|(w_n - w_n^\varepsilon)(x_0)| \geq |2\delta - w_n^\varepsilon(x_0)| > |2\delta - \delta| = \delta,$$

ou seja,

$$\delta < |w(x_0) - w_n^\varepsilon(x_0)| \to 0.$$

contradizendo o fato de que $\delta > 0$. Logo, segue do (PMG) para funções semiconvexas que

$$\delta \leq \left\| \tilde{g}_n^+ \right\|_{L^p(B_r(x_0))}.$$

Mas $\tilde{g}_n \to g_n$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0$, consequentemente, $\tilde{g}_n^+ \to g_n^+$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0$, logo,

$$\delta \leq \left\| g_n^+ \right\|_{L^p(B_r(x_0))}. \tag{3-21}$$

Passando o limite quando $n \to \infty$ em (3-21), temos que

$$\delta \leq \lim_{n\to\infty} \left\| g_n^+ \right\|_{L^p(B_r(x_0))}.$$

Mas isso contradiz (3-20), uma vez que $\delta > 0$. Esta contradição advém de supor que u não é uma subsolução L^p-viscosidade de $F = f$ em Ω. ∎

Lema 3.18 *Sejam F satisfazendo* (CE) *e $f \in L^p(\Omega)$. Se u é uma subsolução (supersolução) L^p-viscosidade de $F = f$, então u também é uma subsolução L^p-viscosidade de*

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2 u) - \gamma |Du| + F(x, u(x), 0, 0) = f(x)$$

(respectivamente, uma supersolução L^p-viscosidade de

$$\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2 u) + \gamma |Du| + F(x, u(x), 0, 0) = f(x)).$$

Demonstração. Queremos mostrar que para toda $\psi \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ tem-se

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\psi(x)) - \gamma|D\psi(x)| + F(x,u(x),0,0) - f(x) \leq 0 \ x \in B_r(x_0)$$

Mas segue de (CE) que

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\psi(x)) - \gamma|D\psi(x)| \leq F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)) - F(x,u(x),0,0),$$

ou seja,

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\psi(x)) - \gamma|D\psi(x)| + F(x,u(x),0,0) \leq F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)).$$

Subtraindo $f(x)$ em ambos os lados desta última desigualdade, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\psi(x)) - \gamma|D\psi(x)| + F(x,u(x),0,0) - f(x)\\ \leq F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)) - f(x).\end{aligned}$$

Como, u é subsolução L^p-viscosidade de $F = f$, segue que

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\psi(x)) - \gamma|D\psi(x)| + F(x,u(x),0,0) - f(x) \leq 0,$$

como queríamos provar. ■

3.3 O Princípio do máximo de Aleksandrov-Bakelman-Pucci

Nesta seção, iremos demonstrar o principal resultado deste trabalho, nomeadamente, o Princípio do Máximo de Aleksandrov-Bakelman-Pucci (ABP). Inicialmente, introduzimos alguns conceitos e resultados que nos são necessário para demonstrarmos o Princípio do Máximo ABP. Começamos definindo o que são envelopes côncavo e convexo de uma função.

Definição 3.19 (Envelopes côncavo e convexo) *Seja $u \in C(\Omega)$. O envelope côncavo de u no domínio Ω é a função $\Gamma^+_u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como*

$$\Gamma^+_u(x) := \text{ínf}\{h(x) := a + b\cdot x : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^d \text{ e } u(x) \leq a + b\cdot x\}.$$

Por outro lado, o envelope convexo de u é a função $\Gamma^-_u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\Gamma^-_u(x) := \sup\{h(x) := a + b\cdot x : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^d \text{ e } u(x) \geq a + b\cdot x\}.$$

Dessa forma, definimos o conjunto de contato de u por

$$K^{\pm}(u,\Omega) := \{x \in \Omega : u(x) = \Gamma_u^{\pm}(x)\}.$$

Considerando $U \subset \Omega$ um conjunto aberto arbitrário, podemos caracterizar $K^{\pm}(u,U)$ da seguinte maneira:

$$K^{+}(u,U) := \{x \in \Omega : \exists p \in \mathbb{R}^d \text{ tal que } u(y) \leq u(x) + p\cdot(y-x)\ \forall y \in \Omega\}.$$

e

$$K^{-}(u,U) := \{x \in \Omega : \exists p \in \mathbb{R}^d \text{ tal que } u(y) \geq u(x) + p\cdot(y-x)\ \forall y \in \Omega\}.$$

Em seguida, vejamos algumas propriedades do conjunto de contato superior. Com esse fim, considere $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos de Ω. Ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_n \subset \Omega$. Dizemos que $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cresce para Ω se

$$\Omega_n \subset \Omega_{n+1} \text{ e } \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n.$$

Lema 3.20 (Estabilidade do conjunto de contato) *Sejam $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência crescente para Ω e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções, $u_n : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$. Suponha que existe $u \in C(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ uniformemente sobre cada Ω_n. Então:*

a) $\limsup_{n\to\infty} K^{+}(u_n,\Omega_n) \subset K^{+}(u,\Omega)$;

b) $\limsup_{n\to\infty} |K^{+}(u_n,\Omega_n)| \leq |K^{+}(u,\Omega)|$;

c) Denote por $K_r^{+}(u,U)$ o conjunto

$$K_r^{+}(u,U) = \{x \in U : \exists p \in B_r \text{ tal que } u(y) \leq u(x) + p\cdot(y-x)\ \forall y \in U\}.$$

Então $\limsup_{n\to\infty} K_r^{+}(u_n,\Omega_n) \subset K_r^{+}(u,\Omega)$.

Uma prova deste resultado pode ser encontrada em [22, Lema 1.21].

Para demonstrar o Princípio do Máximo ABP, necessitaremos do seguinte resultado.

Teorema 3.21 (Teorema de Aleksandrov) *Seja $u \in C(\Omega)$ uma função semicônvexa, com constante de semiconvexidade $\varepsilon > 0$. Então, u é duas vezes diferenciável q.t.p. em Ω, isto é, existe uma função mensurável $M : \Omega \longrightarrow \mathrm{S}(d)$*

tal que

$$u(y) = u(x) + \langle Du(x), y-x\rangle + \frac{1}{2}\langle M(x)(y-x), y-x\rangle + o(|y-x|^2) \quad q.t.p.\ em\ \Omega.$$

Além disso,

$$M(x) \geq -\frac{1}{\varepsilon} I \quad q.t.p.\ em\ \Omega.$$

Para uma demonstração deste resultado, consulte [23, Teorema 14.1].

No teorema anterior, M representa a matriz Hessiana de u. Ademais, por Jensen [15], sabemos que $D^2 u_\delta \to M$ q.t.p. em Ω quando $\delta \to 0$, em que u_δ é a suavização padrão de u.

Em seguida, demonstramos o Princípio do Máximo ABP com a hipótese do termo fonte f ser contínuo. Usaremos esse resultado para demonstrar nosso resultado principal, usando um argumento de aproximação.

Teorema 3.22 (Princípio do máximo ABP com f contínua) *Seja $u \in C(\overline{\Omega})$ uma solução L^d-viscosidade para*

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2 u) - \gamma |Du| \leq f \quad em \quad \Omega \cap \{0 < u\}, \tag{3-22}$$

em que $f \in L^d(\Omega) \cap C(\Omega)$. Então existe uma constante $C = C(d, \lambda, \operatorname{diam}(\Omega)) > 0$ tal que

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \operatorname{diam}(\Omega) \left\| f^+ \right\|_{L^d(K^+(u))}.$$

Similarmente, se $u \in C(\overline{\Omega})$ é uma solução L^d-viscosidade para

$$f \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2 u) + \gamma |Du| \quad em \quad \Omega \cap \{u < 0\}, \tag{3-23}$$

em que $f \in L^d(\Omega)$, então existe uma constante $C = C(d, \lambda, \operatorname{diam}(\Omega)) > 0$ tal que

$$\sup_\Omega u^- \leq \sup_{\partial\Omega} u^- + C \operatorname{diam}(\Omega) \left\| f^- \right\|_{L^d(K^-(u))}.$$

Demonstração. A priori, definamos $r_0 > 0$ como

$$r_0 := \frac{1}{\operatorname{diam}(\Omega)} \left(\sup_\Omega u - \sup_{\partial\Omega} u^+ \right).$$

Para $r < r_0$, consideremos $p \in B_r$ e denotemos por $x_0 \in \overline{\Omega}$ um ponto de máximo da função $w(x) = u(x) - p \cdot x$. Ou seja, para todo $x \in \overline{\Omega}$, temos que

$$w(x) = u(x) - p \cdot x \leq u(x_0) - p \cdot x_0 = w(x_0).$$

Somando $p \cdot x$ em ambos os lados desta desigualdade, ocorre que

$$\begin{aligned} u(x) &\leq u(x_0) - p \cdot x_0 + p \cdot x \\ &= u(x_0) + p \cdot (x - x_0) \\ &\leq u(x_0) + |p| \cdot \operatorname{diam}(\Omega) \end{aligned} \tag{3-24}$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Note que x_0 é um ponto interior de Ω. Deveras, por (3-24), podemos concluir que

$$\sup_{\Omega} u \leq u(x_0) + |p| \cdot \operatorname{diam}(\Omega).$$

Como $p \in B_r$, então $|p| < r < r_0$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} u &< u(x_0) + r_0 \cdot \operatorname{diam}(\Omega) \\ &= u(x_0) + \sup_{\Omega} u - \sup_{\partial\Omega} u^+. \end{aligned}$$

Deste modo, como $u^+ \geq 0$, obtemos que

$$0 \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ < u(x_0). \tag{3-25}$$

Donde conluímos que x_0 é ponto interior de Ω, pois, do contrário, se (3-25) é válida e $x_0 \in \partial\Omega$, então

$$u(x_0) = \sup_{\partial\Omega} u^+ < u(x_0),$$

o que é um absurdo.

Por hipótese, $u \in C^2(\Omega)$, ou seja Du e D^2u existem e são contínuas. Deste modo, derivando w, obtemos que $Dw = Du - p$. Como x_0 é ponto de máximo de w, decorre que

$$0 = Dw(x_0) = Du(x_0) - p,$$

isto é, $Du(x_0) = p$. Derivando w uma segunda vez, temos $D^2w = D^2u$. Por x_0 ser ponto de máximo, segue que

$$D^2u(x_0) = D^2w(x_0) \leq 0,$$

ou seja, $D^2u(x_0) \leq 0$.

Uma conta análoga a que fizemos para mostrar que $u(x_0) > 0$ nos permite concluir que $u(x) > 0$, para todo $x \in K_r^+(u)$, o que implica que

$K_r^+(u) \subset \{u > 0\}$. Além disso, temos que $D^2u \leq$ em $K_r^+(u)$. De fato, seja $x \in K_r^+(u)$ e considere a função

$$h(y) = u(y) - u(x) - p \cdot (y - x).$$

Temos que $h \leq 0$, por definição de $K_r^+(u)$, e $h(x) = 0$. Logo h assume um máximo em x. Por esse motivo, $D^2h(x) \leq 0$. Como $D^2h(x) = D^2u(x)$, concluímos que $D^2u(x) \leq 0$.

Notemos ainda que $K_r^+(u) \subset \Omega$ é fechado, pois $u \in C^2(\Omega)$ (em particular, $u \in C(\Omega)$), o que implica que a função $u(y) - u(x) - p \cdot (y - x)$ é contínua em Ω. Além disso, como Ω é limitado, $K_r^+(u)$ também o é. Logo, $K_r^+(u)$ é um conjunto compacto.

Definamos o conjunto

$$S_r := \{q \in B_r : q = Du(x) \text{ para algum } x \in K_r^+(u)\}.$$

Observe que $S_r \subset B_r$. Por outro lado, temos que $B_r \subset S_r$. Logo, $B_r = S_r$. Agora, tomemos $\kappa > 0$ a ser escolhido mais a diante na demonstração e façamos a mudança de variável $p = Du$. Então, segue que

$$\begin{aligned}\int_{B_r} \left(|p|^{\frac{d}{d-1}} + \kappa^{\frac{d}{d-1}}\right)^{1-d} \mathrm{d}p &= \int_{K_r^+(u)} \left(|Du|^{\frac{d}{d-1}} + \kappa^{\frac{d}{d-1}}\right)^{1-d} |\det(D^2u)| \mathrm{d}x \\ &= \int_{K_r^+(u)} \left(|Du|^{\frac{d}{d-1}} + \kappa^{\frac{d}{d-1}}\right)^{1-d} |\det(-D^2u)| \mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3-26}$$

Lembremos que para $M \in \mathrm{S}(d)$, com $M \geq 0$, temos

$$\det(M) \leq \left(\frac{\operatorname{tr}(M)}{d}\right)^d. \tag{3-27}$$

Como $D^2u \leq 0$ em $K_r^+(u)$, então $-D^2u \geq 0$ em $K_r^+(u)$ e aplicando (3-27) com $-D^2u$, (3-26) torna-se

$$\int_{B_r} \left(|p|^{\frac{d}{d-1}} + \kappa^{\frac{d}{d-1}}\right)^{1-d} \mathrm{d}p \leq \int_{K_r^+(u)} \left(|Du|^{\frac{d}{d-1}} + \kappa^{\frac{d}{d-1}}\right)^{1-d} \left(\frac{-\operatorname{tr}(D^2u)}{d}\right)^d \mathrm{d}x. \tag{3-28}$$

Por hipótese, temos que

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2u) - \gamma|Du| \leq f \quad \text{em} \quad \Omega \cap \{0 < u\}.$$

Pelo fato de que $D^2u \leq 0$ em $K_r^+(u)$, decorre que

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2u) = \lambda \mathrm{tr}((D^2u)^-) = -\lambda \mathrm{tr}(D^2u)$$

em $K_r^+(u)$. Deste modo, como $K_r^+(u) \subset \{u > 0\}$, segue que

$$-\lambda \mathrm{tr}(D^2u) - \gamma|Du| \leq f \leq f^+$$

em $K_r^+(u)$. Equivalentemente,

$$-\mathrm{tr}(D^2u) \leq \frac{\gamma|Du| + f^+}{\lambda}. \tag{3-29}$$

Substituindo (3-29) em (3-28), obtemos

$$\int_{B_r} \left(|p|^{\frac{d}{d-1}} + \kappa^{\frac{d}{d-1}}\right)^{1-d} \mathrm{d}p \leq \int_{K_r^+(u)} \left(|Du|^{\frac{d}{d-1}} + \kappa^{\frac{d}{d-1}}\right)^{1-d} \left(\frac{\gamma|Du| + f^+}{d\lambda}\right)^d \mathrm{d}x. \tag{3-30}$$

De (2-1), segue que

$$\begin{aligned}\left(\gamma|Du| + \frac{\kappa f^+}{\kappa}\right)^d &\leq 2^{d-1}\left(\gamma^d|Du|^d + \frac{\kappa^d\left(f^+\right)^d}{\kappa^d}\right)\\ &\leq 2^{d-1}\left(\gamma^d|Du|^d + \frac{\kappa^d\left(f^+\right)^d}{\kappa^d} + \kappa^d\gamma^d + \frac{|Du|^d\left(f^+\right)^d}{\kappa^d}\right)\\ &= 2^{d-1}\left(\gamma^d + \frac{\left(f^+\right)^d}{\kappa^d}\right)\left(|Du|^d + \kappa^d\right)^{\frac{d-1}{d-1}}.\end{aligned}$$

Como $1/(d-1) \leq 1$, por (2-2), concluímos que

$$\left(\gamma|Du| + \frac{\kappa f^+}{\kappa}\right)^d \leq 2^{d-1}\left(\gamma^d + \frac{\left(f^+\right)^d}{\kappa^d}\right)\left(|Du|^{\frac{d}{d-1}} + \kappa^{\frac{d}{d-1}}\right)^{d-1}. \tag{3-31}$$

Combinando (3-30) e (3-31), obtemos que

$$\int_{B_r} \left(|p|^{\frac{d}{d-1}} + \kappa^{\frac{d}{d-1}}\right)^{1-d} \mathrm{d}p \leq \frac{2^{d-1}}{d^d\lambda^d}\int_{K_r^+(u)} \left(\gamma^d + \frac{\left(f^+\right)^d}{\kappa^d}\right) \mathrm{d}x. \tag{3-32}$$

Aplicando agora (2-1) com $a = |p|^{\frac{d}{d-1}}$, $b = \kappa^{\frac{d}{d-1}}$ e $k = d-1$, concluímos que

$$\left(|p|^{\frac{d}{d-1}} + \kappa^{\frac{d}{d-1}}\right)^{d-1} \leq 2^{d-2}\left(|p|^d + \kappa^d\right).$$

De modo equivalente,

$$2^{2-d}\frac{1}{|p|^d+\kappa^d} \leq \left(|p|^{\frac{d}{d-1}}+\kappa^{\frac{d}{d-1}}\right)^{1-d}.$$

Integrando ambos os lados da desigualdade em relação a p, sobre B_r, temos

$$2^{2-d}\int_{B_r}\frac{1}{|p|^d+\kappa^d}\mathrm{d}p \leq \int_{B_r}\left(|p|^{\frac{d}{d-1}}+\kappa^{\frac{d}{d-1}}\right)^{1-d}\mathrm{d}p.$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{2^{2-d}}{d}\alpha(d)\ln\left(\frac{r^d}{\kappa^d}+1\right) &= 2^{2-d}\int_{B_r}\frac{1}{|p|^d+\kappa^d}\mathrm{d}p \\ &\leq \int_{B_r}\left(|p|^{\frac{d}{d-1}}+\kappa^{\frac{d}{d-1}}\right)^{1-d}\mathrm{d}p \\ &\leq \frac{2^{d-1}}{d^d\lambda^d}\int_{K_r^+(u)}\left(\gamma^d+\frac{(f^+)^d}{\kappa^d}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

À vista disso,

$$\ln\left(\frac{r^d}{\kappa^d}+1\right) \leq \frac{2^{2d-3}}{d^d\lambda^d\alpha(d)}\int_{K_r^+(u)}\left(\gamma^d+\frac{(f^+)^d}{\kappa^d}\right)\mathrm{d}x.$$

Aplicando a exponencial em ambos os lados da desigualdade anterior, obtemos que

$$\frac{r^d}{\kappa^d}+1 \leq \exp\left(\frac{2^{2d-3}}{d^d\lambda^d\alpha(d)}\int_{K_r^+(u)}\left(\gamma^d+\frac{(f^+)^d}{\kappa^d}\right)\mathrm{d}x\right).$$

Subtraindo 1 de ambos os lados da desigualdade e multiplicando toda a desigualdade por κ^d, temos

$$r^d \leq \left(\exp\left(\frac{C_1(d)}{\lambda^d}\int_{K_r^+(u)}\left(\gamma^d+\frac{(f^+)^d}{\kappa^d}\right)\mathrm{d}x\right)-1\right)\kappa^d$$

em que $C_1(d) = 2^{2d-3}/d^d\alpha(d)$. Ou seja,

$$r \leq \left(\exp\left(\frac{C_1(d)}{\lambda^d}\int_{K_r^+(u)}\gamma^d\mathrm{d}x+\frac{C_1(d)}{\lambda^d}\int_{K_r^+(u)}\frac{(f^+)^d}{\kappa^d}\mathrm{d}x\right)-1\right)^{\frac{1}{d}}\kappa, \qquad (3\text{-}33)$$

Agora, escolhemos

$$\kappa := \frac{\|f^+\|_{L^d(K_r^+(u))}}{\lambda}.$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\frac{C_1(d)}{\lambda^d}\int_{K_r^+(u)}\frac{(f^+)^d}{\kappa^d}\mathrm{d}x &= \frac{C_1(d)}{\lambda^d}\int_{K_r^+(u)}\frac{\lambda^d(f^+)^d}{\|f^+\|^d_{L^d(K_r^+(u))}}\mathrm{d}x\\
&= \frac{C_1(d)}{\|f^+\|^d_{L^d(K_r^+(u))}}\int_{K_r^+(u)}(f^+)^d\mathrm{d}x\\
&= \frac{C_1(d)}{\|f^+\|^d_{L^d(K_r^+(u))}}\left\|f^+\right\|^d_{L^d(K_r^+(u))}\\
&= C_1(d). \qquad (3\text{-}34)
\end{aligned}
$$

Dessa maneira, (3-33) torna-se

$$
r \leq \frac{\left(\exp\left(C_1(d)\int_{K_r^+(u)}\left(\frac{\gamma^d}{\lambda^d}+1\right)\mathrm{d}x\right)-1\right)^{\frac{1}{d}}}{\lambda}\left\|f^+\right\|_{L^d(K_r^+(u))}. \qquad (3\text{-}35)
$$

Como

$$
\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + r_0\mathrm{diam}(\Omega),
$$

concluímos que

$$
\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C\mathrm{diam}(\Omega)\left\|f^+\right\|_{L^d(K_r^+(u))},
$$

em que

$$
C := \frac{\left(\exp\left(C_1(d)\int_{K_r^+(u)}\left(\frac{\gamma^d}{\lambda^d}+1\right)\mathrm{d}x\right)-1\right)^{\frac{1}{d}}}{\lambda}.
$$

Assim, fica demonstrada a estimativa para o caso em que $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$.

Em seguida, removemos a condiçao de que $u \in C^2(\Omega)$ e demonstramos a estimativa para o caso em que $u \in C(\overline{\Omega})$. Podemos fazer isso usando a sup convolução de u. Pelo Lema 3.16, temos que

$$
\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2u^\varepsilon) - \gamma|Du^\varepsilon| \leq f_\varepsilon(x) \quad \text{em} \quad \Omega_{2(\varepsilon\|u\|_{L^\infty(\Omega)})^{1/2}},
$$

em que

$$
f_\varepsilon(x) := \sup_{|x-y|\leq 2(\varepsilon\|u\|_{L^\infty(\Omega)})^{1/2}} f(y).
$$

Prosseguiremos de maneira análoga a demonstração anterior. Consideremos $r < r_0$ e definamos

$$
r_0^\varepsilon := \frac{1}{\mathrm{diam}(\Omega)}\left(\sup_{\Omega} u^\varepsilon - \sup_{\partial\Omega}(u^\varepsilon)^+\right).
$$

Conforme vimos no Lema 3.15, $u^\varepsilon \to u$ uniformemente. Dessa forma, ainda temos $r < r_0^\varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Consequentemente, para todo ε pequeno, temos que $K_r^+(u^\varepsilon)$ é um subconjunto compacto de Ω.

Seja u_δ^ε a suavização padrão de u^ε. Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, temos que 3-26 e 3-28 continuam válidas u_δ^ε no lugar de u, e, dessa forma, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{B_r} \left(|p|^{\frac{d}{d-1}} + \kappa^{\frac{d}{d-1}}\right)^{1-d} \mathrm{d}p &= \int_{K_r^+(u_\delta^\varepsilon)} \left(|Du_\delta^\varepsilon|^{\frac{d}{d-1}} + \kappa^{\frac{d}{d-1}}\right)^{1-d} |\det(D^2 u_\delta^\varepsilon)| \mathrm{d}x \\ &\leq \int_{K_r^+(u_\delta^\varepsilon)} \left(|Du_\delta^\varepsilon|^{\frac{d}{d-1}} + \kappa^{\frac{d}{d-1}}\right)^{1-d} \left(\frac{-\mathrm{tr}(D^2 u_\delta^\varepsilon)}{d}\right)^d \mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3-36}$$

Objetivamos, agora, passar ao limite quando $\delta \to 0$ em (3-36). De fato, $u_\delta^\varepsilon : \Omega_\delta \to \mathbb{R}$, em que os conjuntos $\Omega_{\delta_0} \subset \Omega_{\delta_1}$ se $\delta_0 \geq \delta_1$. Além disso,

$$\Omega = \bigcup_{\delta>0} \Omega_\delta.$$

Então, a família $\{\Omega_\delta\}_\delta$ cresce para Ω. Logo, pelo item (iii) do Lema 3.20, temos que

$$\limsup_{\delta\to 0} K_r^+(u_\delta^\varepsilon) \subset K_r^+(u^\varepsilon).$$

Outrossim, lembremos que $D^2 u_\delta^\varepsilon \to D^2 u^\varepsilon$ q.t.p. em Ω e

$$-\frac{1}{\varepsilon} I \leq D^2 u_\delta^\varepsilon \leq 0 \text{ em } K_r^+(u^\varepsilon).$$

Como consequência, podemos passar ao limite quando $\delta \to 0$ em (3-36) para obtermos que

$$\int_{B_r} \left(|p|^{\frac{d}{d-1}} + \kappa^{\frac{d}{d-1}}\right)^{1-d} \mathrm{d}p \leq \int_{K_r^+(u^\varepsilon)} \left(|Du^\varepsilon|^{\frac{d}{d-1}} + \kappa^{\frac{d}{d-1}}\right)^{1-d} \left(\frac{-\mathrm{tr}(D^2 u^\varepsilon)}{d}\right)^d \mathrm{d}x, \tag{3-37}$$

ou seja, (3-26) e (3-28) podem ser escritas trocando u por u^ε. Um cálculo análogo ao feito no caso anterior nos permite concluir que

$$r \leq \frac{\left(\exp\left(C_1(d) \int_{K_r^+(u^\varepsilon)} \left(\frac{\gamma^d}{\lambda^d} + 1\right) \mathrm{d}x\right) - 1\right)^{\frac{1}{d}}}{\lambda} \left\| f_\varepsilon^+ \right\|_{L^d(K_r^+(u^\varepsilon))}. \tag{3-38}$$

Passando ao limite quando $\varepsilon \to 0$ em (3-38), pelo item (iii) do Lema 3.20 e pela continuidade de f, temos que (3-35) é válida para $u \in C(\Omega)$ e, portanto, concluímos a prova do teorema. ■

Agora, definamos uma condição de cone exterior.

Definição 3.23 (Condição de cone exterior uniforme) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aberto e limitado. Dizemos que Ω satisfaz uma condição de cone exterior se existem $r, \theta > 0$ tais que, para todo $x \in \partial\Omega$, é possível encontrar um cone C de abertura θ e vértice na origem satisfazendo*

$$(x + C) \cap B_r(x) \subset \mathbb{R}^d \setminus \Omega$$

O lema a seguir trata da existência de soluções L^p-forte para as equações governadas pelos operadores extremais de Pucci. Para uma demonstração, sugerimos ao leitor que veja a Proposição 1.16 em [22].

Lema 3.24 (Existência de soluções L^p-forte) *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ satisfaça uma condição de cone exterior. Sejam $f \in L^p$ e $g \in C(\partial\Omega)$, para $p > p_0$. Então existem $u, v \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazendo*

$$\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2u) + \gamma|Du| \leq f \text{ em } \Omega$$

e

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2v) - \gamma|Dv| \geq f \text{ em } \Omega$$

no sentido L^p-forte, com $u = v = g$ em $\partial\Omega$. Além disso, existe uma constante positiva $C_1 = C_1(d, \gamma, \lambda, \Lambda, \mathrm{diam}(\Omega))$ tal que as funções u e v satisfazem

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega')}, \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\psi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + (\mathrm{diam}(\Omega))^{2-\frac{d}{p}} \cdot C_1 \cdot \|f\|_{L^p(\Omega)}. \quad (3\text{-}39)$$

Igualmente, para todo $\Omega' \Subset \Omega$, existe uma constante positiva $C_2 = C_2(d, p, \gamma, \lambda, \Lambda, \mathrm{diam}(\Omega), \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega))$ tal que

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')}, \|v\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq C_2(\|\psi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}). \quad (3\text{-}40)$$

Finalmente, podemos provar o Princípio do Máximo ABP com o termo fonte $f \in L^d(\Omega)$.

Teorema 3.25 (Princípio do máximo ABP) *Seja $u \in C(\overline{\Omega})$ uma solução L^d-viscosidade para*

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2u) - \gamma|Du| \leq f \quad \text{em} \quad \Omega \cap \{u > 0\}, \quad (3\text{-}41)$$

em que $f \in L^d(\Omega)$. Então existe uma constante $C = C(d, \lambda, \mathrm{diam}(\Omega)) > 0$ tal que

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C\mathrm{diam}(\Omega) \left\|f^+\right\|_{L^d(K^+(u))}.$$

Similarmente, se $u \in C(\overline{\Omega})$ é uma solução L^d-viscosidade para

$$f \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2u) + \gamma|Du| \quad em \quad \Omega \cap \{u < 0\}, \tag{3-42}$$

em que $f \in L^d(\Omega)$, então existe uma constante $C = C(d, \lambda, \mathrm{diam}(\Omega)) > 0$ tal que

$$\sup_{\Omega} u^- \leq \sup_{\partial\Omega} u^- + C\mathrm{diam}(\Omega) \left\| f^- \right\|_{L^d(K^-(u))}.$$

Demonstração. Faremos a demonstração para o caso em que u é solução de (3-41); o caso em que u é solução de (3-42) segue se maneira análoga.

Consideremos uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^d(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ tal que $\|f_n - f\|_{L^d(\Omega)} \longrightarrow 0$, quando $n \to \infty$. Pelo Teorema 3.24, existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma solução L^d-forte $\varphi_n \in W^{2,d}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ para

$$\begin{cases} \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2\varphi_n) + \gamma|D\varphi| & \leq & f_n - f & \text{em } \Omega, \\ \varphi_n & = & 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3-43}$$

Além disso, temos que

$$\|\varphi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \left(\|\varphi_n\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|f_n - f\|_{L^d(\Omega)} \right).$$

Como $\varphi_n = 0$ em $\partial\Omega$ e $\|f_n - f\|_{L^d(\Omega)} \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$, segue que

$$\|\varphi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \longrightarrow 0$$

quando $n \to \infty$.

Por outro lado, pelo Lema 2.17, e pela desigualdade triangular reversa, temos que

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2u + D^2\varphi_n) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2\varphi_n) + \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2u)$$

e

$$-\gamma|Du - D\varphi_n| \leq \gamma|D\varphi_n| - \gamma|Du|.$$

Definamos a função auxiliar $w := u + \varphi_n - \|\varphi_n\|_{L^\infty(\Omega)}$. Então, $Dw = Du + D\varphi_n$ e $D^2w = D^2u + D^2\varphi_n$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2w) - \gamma|Dw| &\leq \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2u + D^2\varphi_n) - \gamma|Dw| \\ &= \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2u + D^2\varphi_n) - \gamma|Du - (-D\varphi_n)| \\ &\leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2\varphi_n) + \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2u) + \gamma| - D\varphi_n| - \gamma|Du| \\ &= \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2\varphi_n) + \gamma|D\varphi_n| + \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2u) - \gamma|Du|. \end{aligned}$$

Pela hipótese de que u é solução L^p-viscosidade de (3-41) e pelo fato de que φ_n satisfaz (3-43), segue que

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2w) - \gamma|Dw| \leq f_n - f + f = f_n.$$

Visto que $\varphi_n \leq \|\varphi_n\|_{L^\infty(\Omega)}$, ocorrre que, se $x \in \{w > 0\}$, então

$$\begin{aligned} 0 < w(x) &= u(x) + \varphi_n(x) - \|\varphi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq u(x) + \|\varphi_n\|_{L^\infty(\Omega)} - \|\varphi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &= u(x), \end{aligned}$$

ou seja, $x \in \{u > 0\}$. Logo, $\{w > 0\} \subset \{u > 0\}$. Deste modo,

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2w) - \gamma|Dw| \leq f_n \text{ em } \Omega \cap \{w > 0\}.$$

Como $f_n \in C(\Omega)$, aplicando o Teorema 3.22 para w obtemos que

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega}(u + \varphi_n - \|\varphi_n\|_{L^\infty(\Omega)}) \leq \sup_{\partial\Omega}&(u + \varphi_n - \|\varphi_n\|_{L^\infty(\Omega)})^+ \\ &+ C\text{diam}(\Omega) \left\| f_n^+ \right\|_{L^d(K^+(w))}. \end{aligned}$$

Passando o limite quando $n \to \infty$ na desigualdade precedente e usando o Lema 3.20, concluímos, portanto, que

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C\text{diam}(\Omega) \left\| f^+ \right\|_{L^d(K^+(u))}.$$

■

Uma aplicação do Princípio do Máximo ABP é o princípio de comparação. Este resultado nos permite concluir que, sob determinadas hipóteses sobre o operador, se a equação possui uma solução L^p-viscosidade e uma solução L^p-forte, de modo que elas sejam comparáveis na fronteira do domínio, então elas são comparáveis, da mesma maneira, no interior do domínio.

Na sequência, enunciamos e demonstramos o princípio de comparação no contexto das soluções L^p-viscosidade.

Teorema 3.26 (Princípio de Comparação) *Sejam F satisfazendo* (CE), *$f \in L^p(\Omega)$ e suponha que o* (PMG) *seja válido. Sejam $u, \psi \in C(\overline{\Omega})$, suponha que u é uma subsolução (supersolução) L^p-viscosidade e que ψ é uma supersolução (subsolução) L^p-forte de $F = f$ em Ω. Se $u \leq \psi$ $(u \geq \psi)$ em $\partial\Omega$, então $u \leq \psi$ $(u \geq \psi)$ em Ω. Em particular, se u, ψ são, respectivamente, uma* *solução L^p-viscosidade e uma solução L^p-forte de $F = f$ em Ω, e $u = \psi$ em $\partial\Omega$, então $u = \psi$ em Ω.*

Demonstração. Trataremos apenas o caso em que u é uma subsolução L^p-viscosidade e ψ é uma supersolução L^p-forte. Definamos $w = u - \psi$. Então $w \leq 0$ em $\partial\Omega$, uma vez que, por hipótese, $u \leq \psi$ em $\partial\Omega$. Como u é uma subsolução L^p-viscosidade de $F = f$, então para toda $\varphi \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, sempre que $\varepsilon > 0$, $\mathcal{O} \subset \Omega$ é aberto e

$$F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) - f(x) \geq \varepsilon \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \tag{3-44}$$

$u - \varphi$ não pode ter um máximo local em $\mathcal{O}$. Definamos agora

$$G(x, r, p, X) := F(x, r + \psi(x), p + D\psi(x), X + D^2\psi(x)) - f(x).$$

Como $\psi \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, então $w \in C(\Omega)$ e é solução L^p-viscosidade de $G \leq 0$. De fato, sejam $\phi \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ e $U \subset \Omega$ tais que

$$G(x, w(x), D\phi(x), D^2\phi(x)) \geq \varepsilon \quad \text{q.t.p. em } U.$$

Verifiquemos que, sob essas condições, $w - \phi$ não pode ter um máximo em U. Pois bem, como

$$\begin{aligned} G(x, w(x), D\phi(x), D^2\phi(x)) &= F(x, (w + \psi)(x), D(\phi + \psi)(x), D^2(\phi + \psi)(x)) \\ &\quad - f(x) \\ &= F(x, u(x), D(\phi + \psi)(x), D^2(\phi + \psi)(x)) - f(x), \end{aligned}$$

tomando $\varphi = \phi + \psi$ em (3-44) e $\mathcal{O} = U$, temos que

$$F(x, (w + \psi)(x), D(\phi + \psi)(x), D^2(\phi + \psi)(x)) \geq \varepsilon \quad \text{q.t.p. em } U$$

e $u - \varphi = u - (\phi + \psi)$ não pode ter um máximo em U. Mas

$$w - \phi = u - \psi - \phi = u - (\phi + \psi).$$

Ou seja, $u - \varphi = u - (\phi + \psi)$ não poder ter um máximo implica que $w - \phi$ não pode ter um máximo em U. Logo, w é solução L^p-viscosidade de $G \leq 0$.

Agora, como ψ é supersolução L^p-forte de $F = f$ e F satisfaz (CE) e o (PMG), pelo Lema 3.9, segue que ψ é supersolução L^p-viscosidade de $F = f$.

Com isso, temos que w é solução de viscosidade de $H \leq 0$, em que

$$\begin{aligned} H(x,r,p,X) = F(x, r+\psi(x), p + D\psi(x), X + D^2\psi(x)) \\ - F(x, \psi(x), D\psi(x), D^2\psi(x)). \end{aligned}$$

Note que, como F satisfaz (CE), H também a satisfaz. Com efeito, sejam $X, Y \in \mathrm{S}(d)$, $p, q \in \mathbb{R}^d$ e $r, s \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\begin{aligned} H(x,r,p,X) - H(x,s,q,Y) = F(x, r+\psi(x), p + D\psi(x), X + D^2\psi(x)) \\ - F(x, s+\psi(x), q + D\psi(x), Y + D^2\psi(x)). \end{aligned} \tag{3-45}$$

Como F satisfaz a condição de estrutura, segue-se que

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X + D^2\psi(x) - (Y + D^2\psi(x))) - \gamma|p + D\psi(x) - (q + D\psi(x))| \\ &\quad -\omega_R((s+\psi(x) - (r+\psi(x)))^+) \leq F(x, r+\psi(x), p + D\psi(x), X + D^2\psi(x)) \\ &\quad -F(x, s+\psi(x), q + D\psi(x), Y + D^2\psi(x)) \\ &\leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X + D^2\psi(x) - (Y + D^2\psi(x))) + \gamma|p + D\psi(x) - (q + D\psi(x))| \\ &\quad +\omega_R((r+\psi(x) - (s+\psi(x)))^+). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X - Y) - \gamma|p-q| - \omega_R((s-r)^+) \\ &\leq F(x, r+\psi(x), p + D\psi(x), X + D^2\psi(x)) \\ &\quad - F(x, s+\psi(x), q + D\psi(x), Y + D^2\psi(x)) \\ &\leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X - Y) + \gamma|p-q| + \omega_R((r-s)^+). \end{aligned}$$

Usando (3-45), estas últimas desigualdades acima reescrevem-se da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X - Y) - \gamma|p-q| - \omega_R((s-r)^+) \leq H(x,r,p,X) - H(x,s,q,Y) \\ \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X - Y) + \gamma|p-q| + \omega_R((r-s)^+). \end{aligned}$$

Isto que mostra que H satisfaz a (CE). Então, pelo Lema 3.18, temos que w é solução L^p-viscosidade de

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2 w) - \gamma|Dw| + g(x, w(x)) \leq 0,$$

em que

$$g(x,r) := F(x, r+\psi(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) - F(x, \psi(x), D\psi(x), D^2\psi(x)).$$

Note que, como F é própria, $g(x, w(x)) \geq 0$ em $\{0 < w\}$. De fato, $0 < w(x)$ implica que $\psi(x) < w(x) + \psi(x)$ e, portanto, pelo fato de F ser própria, temos que

$$F(x, w(x) + \psi(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) \geq F(x, \psi(x), D\psi(x), D^2\psi(x)),$$

isto é,

$$F(x, w(x) + \psi(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) - F(x, \psi(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) \geq 0.$$

Logo, w é solução de

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2 w) - \gamma|Dw| \leq 0$$

e, pelo Teorema 3.25, temos que

$$\sup_{\Omega} w \leq \sup_{\partial\Omega} w^+.$$

Como $w \leq 0$ em $\partial\Omega$, temos que $w^+ = 0$ em $\partial\Omega$, o que implica que $\sup_{\partial\Omega} w^+ = 0$. Ou seja, $\sup_{\Omega} w \leq 0$. Mas, para todo $x \in \Omega$, $w(x) \leq \sup_{\Omega} w$. Assim, $w(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega$. Portanto, $u \leq \psi$ em Ω. $\blacksquare$

Referências bibliográficas

[1] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. **Sobolev spaces.** Pure and Applied Mathematics. 2nd. ed., Elsevier, 2003.

[2] BOYD, S. P.; VANDENBERGHE, L. **Convex optimization**. Cambridge University Press, 2004.

[3] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, volume 2. Springer, 2011.

[4] CAFFARELLI, L.; CRANDALL, M. G.; KOCAN, M. ; ŚWIĘCH, A. On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients, **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v.49, n.4, p. 365–398, 1996.

[5] CAFFARELLI, L. A.; CABRÉ, X. **Fully nonlinear elliptic equations**, volume 43. American Mathematical Society, 1995. 104p.

[6] CALDER, J. Lecture notes on viscosity solutions, **Lecture notes**, 2018.

[7] CALDERÓN, A. P.; ZYGMUND, A. **Local properties of solutions of elliptic partial differential equations.** In: Selected Papers of Antoni Zygmund, p. 285–339. Springer, 1989.

[8] CRANDALL, M. G.; ISHII, H. ; LIONS, P.-L. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, **Bulletin of the American Mathematical Society**, v.27, n.1, p. 1–67, 1992.

[9] CRANDALL, M. G.; LIONS, P.-L. Viscosity solutions of hamilton-jacobi equations, **Transactions of the American mathematical society**, v.277, n.1, p. 1–42, 1983.

[10] ESCAURIAZA, L. $W^{2,n}$ a priori estimates for solutions to fully non-linear equations, **Indiana University mathematics journal**, p. 413–423, 1993.

[11] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**, volume 19 of **Graduated studies in mathematics**. 2nd. ed., American Mathematical Society, 2010. 749p.

[12] EVANS, L. C.; GARIEPY, R. F. **Measure theory and fine properties of functions**. CRC press, 2015.

[13] GARLING, D. J. **Inequalities: a journey into linear analysis**. Cambridge University Press, 2007.

[14] ISHII, H. On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic pde's, **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v.42, n.1, p. 15–45, 1989.

[15] JENSEN, R.; LIONS, P.-L. ; SOUGANIDIS, P. E. A uniqueness result for viscosity solutions of second order fully nonlinear partial differential equations, **Proceedings of the American mathematical society**, v.102, n.4, p. 975–978, 1988.

[16] LEONI, G. **A First Course in Sobolev Spaces**, volume 181 of **Graduate studies in mathematics**. 2nd. ed., American Mathematical Society, 2017.

[17] LIMA, E. L. **Curso de análise vol. 1**. 15. ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2019. 431p.

[18] LIMA, E. L. **Curso de análise vol. 2**. 12. ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2020. 547p.

[19] LIONS, P.-L. Optimal control of diffusion processes and hamilton–jacobi–bellman equations part 2: viscosity solutions and uniqueness, **Communications in partial differential equations**, v.8, n.11, p. 1229–1276, 1983.

[20] LIONS, P.-L. A remark on bony maximum principle, **Proceedings of the American Mathematical Society**, v.88, n.3, p. 503–508, 1983.

[21] MEDEIROS, L. A. D. J.; MIRANDA, M. **Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elíticos não homogêneos**. Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 2000. 151p.

[22] PIMENTEL, E. A. **Elliptic Regularity Theory by Approximation Methods**, volume 477. Cambridge University Press, 2022.

[23] VILLANI, C.; OTHERS. **Optimal Transport: Old and New**, volume 338 of **A Series of Comprehensive Studies in Mathematics**. Springer, 2009.

A
Notações

Aqui, reunimos algumas notações usadas ao longo do texto.

- $X^+ = \begin{cases} X, & \text{se } X > 0 \\ 0, & \text{se } X \leq 0 \end{cases}$ é a parte positiva da matriz $X \in \mathrm{S}(d)$.
- $X^- = \begin{cases} -X, & \text{se } X < 0 \\ 0, & \text{se } X \geq 0 \end{cases}$ é a parte negativa da matriz $X \in \mathrm{S}(d)$.
- $\mathrm{tr}(X) = \sum_{i=1}^{d} x_{ii}$ é o traço da matriz $X \in \mathrm{S}(d)$.
- $\arg\,\text{máx}\{u(x) : x \in \Omega\} := \{x \in \Omega : u(y) \leq u(x) \text{ para todo } y \in \Omega\}$ é o argumento máximo da função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
- $\fint_{B_r(x)} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(x)\mathrm{d}x$ é a média de f em $B_r(x)$.
- $Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_d}\right)$ é o vetor gradiente de u.
- $D^2u = (\partial_{i,j}u)_{i,j=1}^d$ é a matriz Hessiana de u, em que $\partial_{i,j}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.
- $|A|$ é a medida de Lebesgue do conjunto A.