



**Joel Albertacci Marques da Silva**

**Envoltórias de retas bissetoras de polígonos  
planos**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio .

Orientador: Prof. Marcos Craizer

Rio de Janeiro  
Setembro de 2023



**Joel Albertacci Marques da Silva**

## **Envoltórias de retas bissetoras de polígonos planos**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio . Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

**Prof. Marcos Craizer**

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Prof. Ralph Costa Teixeira**

Instituto de Matemática e Estatística - UFF

**Prof. Moacyr Alvim Horta Barbosa da Silva**

Escola de Matemática Aplicada - Fundação Getulio Vargas

**Prof. Alessandro Gaio Chimenton**

Instituto de Ciências Exatas - UFF

Rio de Janeiro, 20 de Setembro de 2023

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial do trabalho, é proibida sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Joel Albertacci Marques da Silva**

Graduou-se em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (UFF).

#### Ficha Catalográfica

Albertacci Marques da Silva, Joel

Envoltórias de retas bissetoras de polígonos planos / Joel Albertacci Marques da Silva; orientador: Marcos Craizer. – 2023.

90 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2023.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Envoltórias de famílias de retas. 3. Retas bissetoras de áreas. 4. Envoltórias discretas. 5. Cúspides discretos. I. Craizer, Marcos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 004

Dedico à minha avó Maria Lúcia  
(in memoriam).

## **Agradecimentos**

Agradeço primeiro a Deus, por ter me concedido saúde (física e emocional) e capacidade para ter chegado até aqui.

Agradeço aos meus pais por todo apoio e incentivo dados, e também por todo suporte, tanto financeiro, quanto emocional.

Gostaria de agradecer também à Elisa por todo apoio, alegria, amor e iluminação para a minha caminhada pessoal e profissional.

Agradeço ao meu orientador, professor Marcos Craizer, por ter me mostrado a beleza da Geometria, e por toda dedicação e paciência em sanar minhas dúvidas. E agradeço também aos professores que aceitaram participar da banca examinadora.

Agradeço a todos os amigos do Departamento de Matemática por tornarem o ambiente de estudo mais leve e agradável. Além de sempre estarem dispostos a discutir e compartilhar insights a respeito de Matemática.

Agradeço à PUC-Rio e ao Departamento de Matemática por ter concedido a mim a oportunidade de estudar e fazer pesquisa num ambiente de excelência. Em especial, agradeço a todos os funcionários do departamento por sempre estarem dispostos a ajudar e a resolver quaisquer problemas de caráter técnico-administrativo.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Este trabalho também contou com apoio financeiro da FAPERJ e da PETROBRAS. Portanto, agradeço também a todas estas instituições pelo suporte prestado, sem o qual seria impossível a realização deste trabalho.

## Resumo

Albertacci Marques da Silva, Joel; Craizer, Marcos. **Envoltórias de retas bissetoras de polígonos planos**. Rio de Janeiro, 2023. 90p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Uma reta bissetora divide uma região convexa do plano em duas partes com áreas iguais. É natural estudar as envoltórias destas linhas bissetoras, que em geral apresentam singularidades. O caso de polígonos é particularmente interessante, pois existem diversas noções distintas de envoltórias discretas. Nesta dissertação, nós estudamos três tipos diferentes de envoltórias discretas de retas bissetoras e as conexões entre elas.

## Palavras-chave

Envoltórias de famílias de retas; Retas bissetoras de áreas; Envoltórias discretas; Cúspides discretos.

## Abstract

Albertacci Marques da Silva, Joel; Craizer, Marcos (Advisor). **Envelopes of bisection lines of planar polygons**. Rio de Janeiro, 2023. 90p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A bisection line divide a convex planar region into two parts with equal areas. It is natural to study the envelope of these lines, which in general present singularities. The polygonal case is particularly interesting, since there are several different notions of a discrete envelope. In this dissertation, we study three different notions of discrete envelopes of bisection lines and the connections between them.

## Keywords

Envelopes of families of lines; Area bisection lines; Discrete envelopes; Discrete cusps.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Envoltórias de famílias de curvas planas</b>	<b>16</b>
2.1	Noção intuitiva	16
2.2	Família de curvas e sua envoltória	17
2.3	Contorno aparente em superfícies	22
2.4	A envoltória $E_1$	24
2.5	A envoltória $E_2$	27
2.6	A envoltória $E_3$	30
<b>3</b>	<b>Curvas planas convexas</b>	<b>32</b>
3.1	Parametrização de meia-área	32
3.2	Envoltória de retas bissetoras	37
3.3	Vértices tangentes paralelos	38
3.4	A construção inversa	42
<b>4</b>	<b>Polígonos de meia-área</b>	<b>45</b>
4.1	Características de polígonos de meia-área	45
4.2	Relações em polígonos de meia-área	49
<b>5</b>	<b>Envoltórias de retas bissetoras em polígonos</b>	<b>55</b>
5.1	Os conjuntos $\mathcal{E}$ , $\mathcal{M}$ e $\mathcal{H}$	55
5.2	Polígonos com simetria e simetria ímpar	63
5.3	Cúspides e vértices tangentes paralelos	67
5.4	O número máximo de cúspides	73
<b>6</b>	<b>A construção inversa</b>	<b>82</b>
6.1	O polígono auxiliar	82
<b>7</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>88</b>
<b>8</b>	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>90</b>



## Lista de figuras

Figura 1.1	Uma família de círculos em azul, e sua envoltória em preto.	13
Figura 1.2	Exemplo de curva convexa fechada	14
Figura 1.3	A envoltória $\mathcal{H}$ em vermelho	15
Figura 2.1	Família de circunferências de raio unitário, ao longo do eixo $x$ .	16
Figura 2.2	Em roxo, a parábola; em vermelho, a família de retas normais; em preto, o cuspide que representa $\mathcal{D}$ .	20
Figura 2.3	Em preto, temos a família de retas, em azul, a envoltória $\mathcal{D}$ e em vermelho uma das retas destacadas.	21
Figura 2.4	Em preto, temos a família de elipses, em azul temos a envoltória $\mathcal{D}$ , e em vermelho, uma elipse destacada.	22
Figura 2.5	A superfície $S = F^{-1}(0)$ .	23
Figura 2.6	Ao longo da superfície $S$ (em preto), temos o conjunto $\mathcal{P}_v$ (contorno aparente) que é um par de retas em laranja. A envoltória $\mathcal{D}$ é o par de retas $y = \pm 1$ no plano (em roxo).	24
Figura 3.1	Exemplos de curvas convexas e não convexas. Fonte: (CARMO, 2010).	33
Figura 3.2	Elipse $\gamma$ e uma reta bissetora $r(s)$ passando pelos pontos $\gamma(s)$ e $\gamma(t(s))$ .	33
Figura 3.3	Em vermelho o vetor $v(s)$ , em preto o vetor $(x, y) - \gamma(s)$ , e em azul o polígono $(x, y)\gamma(s)\gamma(s + T_0)$ .	37
Figura 3.4	Em vermelho estão as retas bissetoras, e em azul está a envoltória $\mathcal{E}(s)$ .	38
Figura 4.1	A área do triângulo em azul somada com a área em vermelho é igual a área do triângulo verde somada com a área em vermelho.	46
Figura 4.2	Decágono de meia-área. As retas tracejadas foram utilizadas na construção do polígono	48
Figura 4.3	Polígonos de meia-área e suas retas bissetoras.	49
	(a) Quadrilátero.	49
	(b) Hexágono.	49
Figura 4.4	Polígonos de meia-área e suas retas bissetoras.	49
	(a) Octógono.	49
	(b) Decágono.	49
	(c) Dodecágono.	49
	(d) Tetradecágono.	49
Figura 4.5	Significado geométrico de $\mathcal{A}^+$ e $\mathcal{A}^-$ para $i = 1$ e $n = 3$ .	50
Figura 4.6	$\mathcal{A}^+(i + 1/2) = \mathcal{A}^-(i + n + 1/2)$ .	51
Figura 4.7	$\mathcal{A}^-(i + 1/2) = \mathcal{A}^+(i + n + 1/2)$ .	51
Figura 5.1	Significado geométrico da função $F$ , onde $i = 1$ , e $n = 3$ .	55
Figura 5.2	Quadrilátero: em vermelho o ponto que representa $\mathcal{E}$ e $\mathcal{M}$ .	58
Figura 5.3	Hexágono e suas envoltórias discreta $\mathcal{E}$ reduzida a um ponto (vermelho) e dos pontos médios $\mathcal{M}$ (azul).	58

Figura 5.4	Octógono e suas envoltórias discreta $\mathcal{E}$ (vermelho) e dos pontos médios $\mathcal{M}$ (azul).	59
Figura 5.5	Decágono e suas envoltórias discreta $\mathcal{E}$ (vermelho) e dos pontos médios $\mathcal{M}$ (azul).	59
Figura 5.6	Dodecágono e Tetradecágono e suas envoltórias ampliadas.	60
	(a) Dodecágono.	60
	(b) Envoltórias $\mathcal{E}$ (vermelho) e $\mathcal{M}$ (azul).	60
	(c) Tetradecágono.	60
	(d) Envoltórias $\mathcal{E}$ (vermelho) e $\mathcal{M}$ (azul).	60
Figura 5.7	Hexágono, Octógono, Decágono, Dodecágono e Tetradecágono com suas envoltórias hiperbólicas.	61
	(a) Hexágono.	61
	(b) Apenas a envoltória.	61
	(c) Octógono e sua envoltória.	61
	(d) Apenas a envoltória	61
	(e) Decágono e sua envoltória	61
	(f) Apenas a envoltória	61
	(g) Dodecágono e sua envoltória	61
	(h) Apenas a envoltória	61
	(i) Tetradecágono e sua envoltória	61
	(j) Apenas a envoltória	61
Figura 5.8	Hexágono com simetria ímpar.	65
Figura 5.9	Hexágono com simetria ímpar, e sua envoltória discreta reduzida a um único ponto em vermelho.	67
Figura 5.10	Hexágono, Octógono, Decágono e Tetradecágono com suas envoltórias $\mathcal{H}$ , $\mathcal{M}$ e $\mathcal{E}$ .	69
	(a) Hexágono e suas envoltórias.	69
	(b) Apenas as envoltórias.	69
	(c) Octógono e suas envoltórias.	69
	(d) Apenas as envoltórias.	69
	(e) Decágono e suas envoltórias.	69
	(f) Apenas as envoltórias.	69
	(g) Dodecágono e suas envoltórias.	69
	(h) Apenas as envoltórias.	69
Figura 5.11	Envoltórias do Tetradecágono.	70
Figura 5.12	Octógono no plano cartesiano.	72
Figura 5.13	Trapézio que ilustra a situação acima.	74
Figura 5.14	Segmento $\overline{PQ}$ , sobre a reta $y = \frac{1}{1+c}$ , paralelo ao segmento $\overline{AB}$ ,	76
Figura 5.15	Octógono com número máximo de cúspides.	77
Figura 5.16	Octógono com número máximo de cúspides não colineares.	78
Figura 6.1	Hexágono, Octógono e Decágono, e exemplos de polígonos auxiliares.	86
	(a) Hexágono com $c(i) = 1, 5$ .	86
	(b) Para $c(i) = 0, 4$ , não há convexidade.	86
	(c) Octógono com $c(i) = 1, 6$ .	86
	(d) Para $c(i) = 0, 2$ , não há convexidade	86

	(e) Decágono com $c(i) = 0,9$ .	86
	(f) Para $c(i) = 0,7$ não há convexidade	86
Figura 6.2	Hexágono e seu polígono auxiliar com parâmetro $c(i) = 4,5$	87
	(a) Hexágono (em preto) e o polígono auxiliar (vermelho)	87
	(b) Os arcos de hipérbole das envoltórias	87
Figura 7.1	Curva convexa aproximada por polígono	88

*No, try not. Do or do not. There is no try.*

**Master Yoda**, *Star Wars V - The Empire Strikes Back*.

# 1

## Introdução

A Geometria Diferencial é, de fato, uma área de pesquisa fascinante dentro da Matemática como um todo. Suas aplicações se estendem a inúmeros campos da ciência, como os diversos ramos da Física, Engenharia, Computação, entre outros. Mais geralmente, a Geometria Diferencial desempenha um papel fundamental na análise de curvas, superfícies e de forma mais geral, em variedades (em dimensões maiores). Em particular, podemos citar o estudo sobre famílias de curvas ao longo do plano, que é basicamente o que iremos abordar neste trabalho. Sabemos que, em geral, sendo  $I$  um intervalo da reta, uma curva plana pode ser definida como uma aplicação  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que associa cada  $s \in I$  a um ponto  $(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$  no plano. Dado um parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ , podemos indexar as curvas de uma família não enumerável (a cardinalidade depende do conjunto de onde tomarmos o parâmetro  $t$ ) de curvas planas. Em termos de conjuntos, podemos pensar numa família de curvas planas como:

$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}} (\gamma_t(I)) \subset \mathbb{R}^2$$

Nosso foco aqui será um objeto chamado envoltória. Inicialmente, podemos pensar em uma envoltória como uma outra curva que tangencia todas as curvas da família em um ponto. Como estamos interessados em tangência, é necessário que o conceito de diferenciabilidade seja cumprido em cada curva da família. Além disso, iremos considerar apenas curvas regulares.

Calcular a envoltória de uma família de curvas, digamos, fechadas possui diversas aplicações práticas. Veja por exemplo a figura abaixo, retirada de (VILCHES, 2009):

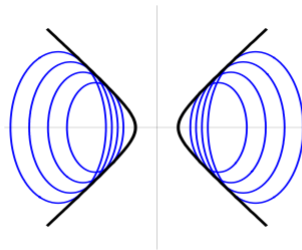


Figura 1.1: Uma família de círculos em azul, e sua envoltória em preto.

Conforme (VILCHES, 2009), este modelo é utilizado para estudar um fenômeno chamado zona de auditibilidade dentro da Acústica. Determinar a envoltória de uma família de curvas, em geral, não é uma tarefa simples e pode

requerer cálculos complicados e trabalhosos, e às vezes é necessário recorrer a métodos numéricos.

Neste trabalho iremos fazer um estudo breve sobre a teoria das envoltórias de uma família de curvas planas, e posteriormente, sobre curvas planas fechadas convexas. Nesta última classe de curvas, estamos interessados nas chamadas retas bissetoras, as quais dividem o interior desta curva em regiões com áreas iguais. Então, dada uma curva fechada convexa, estamos interessados em determinar a envoltória de sua família de retas bissetoras. Entretanto, conforme já explicitado, para determinar de tal envoltória, normalmente envolve cálculos longos e complicados. Veja, por exemplo, na figura abaixo, um exemplo de curva cuja envoltória da família de retas bissetoras é complicada de calcular e é necessária a utilização de métodos numéricos:

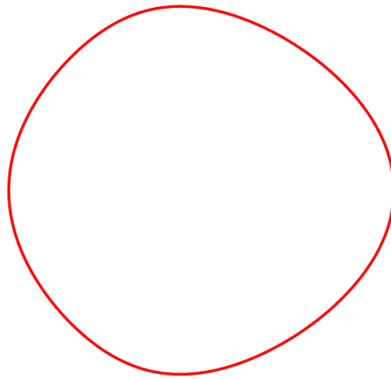


Figura 1.2: Exemplo de curva convexa fechada

O objetivo principal deste trabalho é utilizar a teoria estudada sobre envoltórias de retas bissetoras em curvas convexas fechadas para estudar tais envoltórias em polígonos convexas planos, isto é, dentro da Geometria Discreta. Conseqüentemente, a partir daí, utilizaremos variáveis discretas, e todas as construções e resultados analisados serão análogos aos obtidos anteriormente no caso contínuo. Além disso, o cálculo destas envoltórias em polígonos convexas é mais simples em termos computacionais. Veja na figura abaixo, no caso de um triângulo, a envoltória de suas retas bissetoras (neste caso, medianas) consiste em três arcos hiperbólicos concatenados. Observe ainda que as retas bissetoras intersectam a envoltória em três pontos especiais, os chamados cúspides.

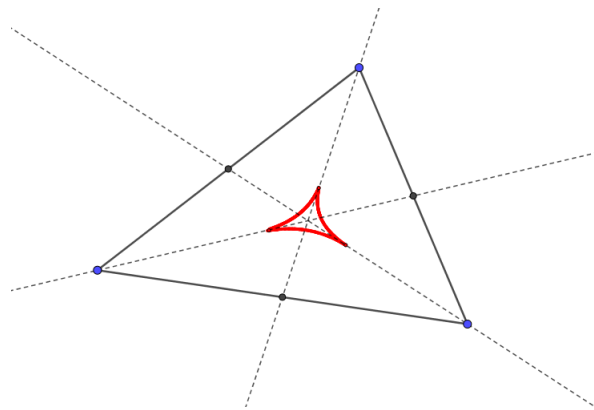


Figura 1.3: A envoltória  $\mathcal{H}$  em vermelho

Veremos no decorrer do trabalho que esta envoltória, a qual será denotada por  $\mathcal{H}$ , sempre será uma concatenação de arcos hiperbólicos.

Observe ainda na Figura 1.3 que cada reta bissetora conecta um cúspide da envoltória ao ponto médio do lado oposto do triângulo. Apesar deste ponto médio ser colinear a um par de vértices, é razoável incluímos tal ponto ao conjunto de vértices do polígono. Baseado nesta importante observação, iremos considerar neste trabalho apenas polígonos com um número par de vértices, isto é, polígonos com  $2n$  lados. No capítulo 2, veremos um tipo de parametrização para curvas convexas fechadas, chamada parametrização de meia-área. Baseado nisto, iremos trabalhar com uma classe de polígonos chamada polígonos de meia-área, em que as diagonais que conectam vértices opostos, dividem o polígono em duas regiões com áreas iguais. Apesar desta restrição, os resultados aqui estudados podem ser aplicados para qualquer polígono convexo.

Iremos estudar também outras duas noções de envoltórias nestes polígonos, que serão denotadas por  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{E}$ , as quais possuem propriedades que estão diretamente relacionadas com a envoltória  $\mathcal{H}$ . De forma breve, dado um polígono com  $2n$  lados, a envoltória  $\mathcal{M}$  será o polígono com  $n$  lados cujos vértices são os pontos médios das diagonais contidas nas retas bissetoras. E a envoltória  $\mathcal{E}$  será o polígono de  $n$  lados cujos vértices são os pontos de interseção das retas bissetoras adjacentes.

Finalmente, supondo que conhecemos apenas a envoltória  $\mathcal{H}$ , iremos determinar se é ou não possível determinar o polígono correspondente. E além disso, veremos que conhecendo-se apenas as envoltórias  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{M}$  a resposta deste problema de recuperar o polígono original é respondida de forma mais simples.

## 2

### Envoltórias de famílias de curvas planas

Neste capítulo inicial, iremos fazer uma breve abordagem sobre conceitos preliminares que são necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Em geral, iremos tratar de envoltórias de famílias de curvas planas. Tais conceitos envolvem determinados tópicos de Geometria Diferencial básica e Análise no  $\mathbb{R}^n$ , e sendo assim, alguns resultados que serão enunciados aqui, terão sua demonstração omitida. Aqui a nossa principal referência será (BRUCE; GIBLIN, 1992), mas também usaremos como complemento (RIUL, 2015) e (ALVES, 2014).

#### 2.1

##### Noção intuitiva

Primeiro, vamos mostrar aqui nesta seção, uma noção intuitiva (sem formalismo) e introdutória do que a envoltória de uma família de curvas planas representa.

Para fixar melhor a ideia, considere a família de circunferências em  $\mathbb{R}^2$  de raio unitário e centradas no eixo  $x$ , conforme a figura abaixo:

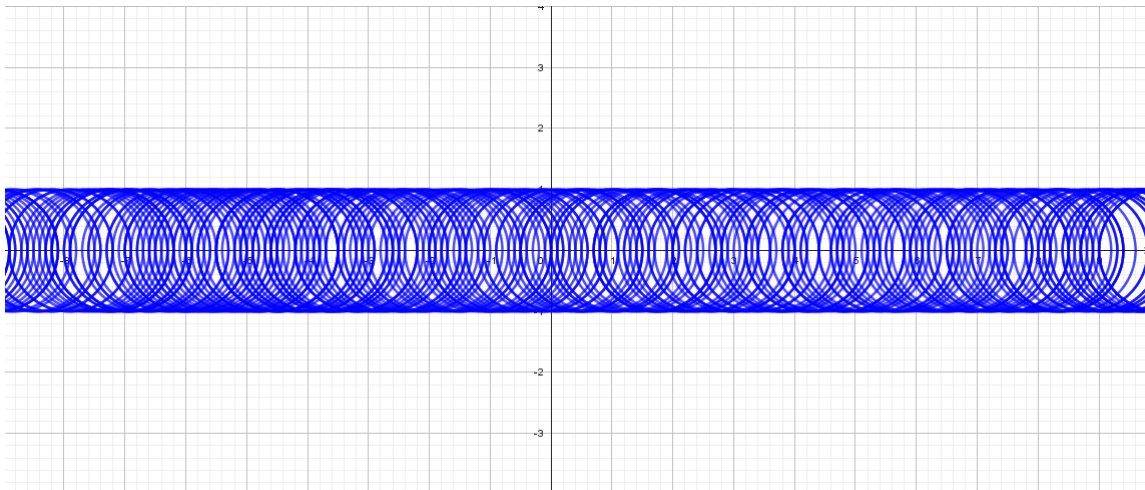


Figura 2.1: Família de circunferências de raio unitário, ao longo do eixo  $x$ .

Podemos indexar esta família por uma variável  $t \in \mathbb{R}$ , de modo que para cada  $t$ , obtemos uma circunferência centrada no ponto  $(t, 0)$ . Desse modo, para descrever esta família, temos a seguinte equação:

$$(x - t)^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{2-1}$$



De forma intuitiva, a envoltória desta família de curvas é uma outra curva que, a priori, pode ter seu traço completamente diferente das curvas da família. Mas de uma certa forma, estas circunferências parecem se "agrupar" ao longo de uma outra curva, e além disso, cada circunferência é tangenciada por esta outra curva. Esta outra curva mencionada (no caso da Figura 2.1), evidentemente é dada pelo par de retas  $y = \pm 1$ .

Veremos neste capítulo que existem diferentes definições para o conceito de envoltória. Entretanto, ainda no caso da Figura 2.1, observe que além de cada círculo tangenciar o par de retas  $y = \pm 1$ , temos que cada dois círculos da família com centros suficientemente próximos se intersectam em dois pontos que se aproximam das retas  $y = \pm 1$ , conforme estes dois círculos tendem a se coincidir. Esta nova curva, que no exemplo que estamos analisando é o par de retas  $y = \pm 1$ , é a chamada envoltória da família de curvas planas (neste caso, família de circunferências).

## 2.2

### Família de curvas e sua envoltória

Nesta seção, veremos o conceito formal de envoltória de uma família de curvas planas. Em geral, a literatura clássica de Geometria Diferencial considera uma função diferenciável aquela que é de classe  $C^\infty$ . De fato, para este trabalho, é necessário que a função que iremos analisar, seja de classe  $C^2$ . Sendo assim, quando for feita referência a alguma função diferenciável, estaremos considerando uma função de classe  $C^k$ , com  $k \geq 2$ .

Considere uma função diferenciável definida como:

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto F(x, t) \end{aligned}$$

Uma outra forma de considerar a função  $F$  é como uma família de funções indexadas por  $t \in \mathbb{R}$ . Isto é, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , defina:  $F_t: \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F_t(x) = F(x, t)$ . Além disso, suponha que  $0 \in \mathbb{R}$  seja um valor regular de  $F_t$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , o que é equivalente a dizer que sempre que  $F(x, t) = 0$ , então existe  $i \in \{1, \dots, r\}$  tal que  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, t) \neq 0$ .

**Proposição 2.1** *Considere  $A \subset \mathbb{R}^m$  um aberto, o ponto  $v \in A$  e suponha que  $f(v) = c \in \mathbb{R}^q$ . Seja  $f: A \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^q$  uma submersão em  $v \in A$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $v$  em  $\mathbb{R}^m$  tal que  $f^{-1}(c) \cap V$  é uma variedade de dimensão  $m - q$  em  $\mathbb{R}^m$ .*

*Prova.* Pode ser encontrada em (BRUCE; GIBLIN, 1992). ■

Pela Proposição 2.1, e pelo fato de estarmos supondo que 0 é um valor regular de  $F_t$ , temos então que a imagem inversa do 0, dada pelo conjunto abaixo:

$$C_t := F_t^{-1}(0) = \{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r \mid F_t(x, \dots, x_r) = 0\}$$

é uma variedade parametrizada de dimensão  $r - 1$  numa vizinhança de cada ponto. Neste trabalho consideraremos, em geral,  $r = 2$ , obtendo-se assim uma curva.

**Observação 2.2** *Afirmamos que se 0 é valor regular de  $F_t$ , então também é valor regular de  $F$ . De fato, conforme definimos,  $F_t(x) = F(x, t)$ , temos que a matriz Jacobiana de  $F$  é dada por:*

$$dF = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_r} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_t}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_t}{\partial x_r} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{bmatrix}$$

Como por hipótese 0 é valor regular de  $F_t$ , então as  $r$  primeiras entradas da segunda matriz não se anulam simultaneamente para qualquer ponto  $(x, t) \in F^{-1}(0)$ . Portanto, temos que  $F^{-1}(0)$  é uma  $r$ -variedade parametrizada em  $\mathbb{R}^{r+1}$ .

Pela observação anterior, note então que  $F^{-1}(0)$  também é localmente uma  $r$ -variedade parametrizada. E sendo  $r = 2$ , temos então que  $F^{-1}(0)$  é uma superfície. Note ainda que esta superfície pode ser obtida fazendo variar o índice  $t$ . De fato com esta variação, iremos obter uma infinidade de curvas  $C_t$ , a qual foi definida acima como sendo  $F_t^{-1}(0)$ . Logo, para obter a superfície desejada, “movemos”  $C_t$  para o nível  $t$  ao longo da terceira dimensão do espaço.

Abaixo, temos a definição formal de envoltória. Alguns aspectos técnicos desta definição serão entendidos de forma mais clara na próxima seção.

**Definição 2.3** *A **envoltória**, ou o **discriminante** da família  $F$  é o conjunto:*

$$\mathcal{D} = \left\{ (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r \mid \exists t \in \mathbb{R}, F(x, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = 0 \right\}$$

Assim, pela Definição 2.3, para determinar a envoltória, é suficiente resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} F(x, t) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = 0 \end{cases} \quad (2-2)$$

Até aqui, estamos considerando  $x = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$ . A partir de agora, iremos nos restringir apenas à curvas, e portanto usaremos a notação usual  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Abaixo temos alguns exemplos:

**Exemplo 2.4** Vamos considerar:  $F(x, y, t) = F_t(x, y) = (x - t)^2 + y^2 - 1$ . É evidente que  $C_t = F_t^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - t)^2 + y^2 - 1 = 0\}$  são circunferências centradas em  $(t, 0)$  de raio unitário, conforme vimos na seção anterior. Além disso,  $\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = -2(x - t)$ . Logo, temos que:

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t = x, y^2 = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \pm 1\}$$

como esperávamos.

**Exemplo 2.5** Considere agora uma parábola dada por  $y = x^2$ . Podemos considerar a seguinte parametrização:  $(t, t^2)$ . Assim, em qualquer ponto  $(t, t^2) \neq (0, 0)$  da parábola, temos a reta normal dada por  $2t^3 + t(1 - 2y) - x = 0$ .

Vamos definir então a função:

$$F(x, y, t) = 2t^3 + t(1 - 2y) - x$$

Temos também que:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 6t^2 + 1 - 2y$$

A ideia é resolvermos o sistema  $F(x, y, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0$  de forma a eliminar o parâmetro  $t$ . Veja que  $\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0$  obtemos  $6t^2 = 2y - 1$ , donde:

$$t = \pm \sqrt{\frac{1}{6}(2y - 1)} \quad (2-3)$$

Agora, de  $F(x, y, t) = 0$  temos:  $2t^3 + t(1 - 2y) - x = 0 \implies 2t^3 + t(-6t^2) - x = 0$ , donde

$$x^2 = 16t^6 \quad (2-4)$$

Substituindo-se (2-3) em (2-4) obtemos finalmente:

$$27x^2 = 2(2y - 1)^3$$

Concluimos então que:

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 27x^2 = 2(2y - 1)^3\}$$

Observe na figura abaixo, que  $\mathcal{D}$  tem o traço de um cúspide. Além disso, o ponto onde ocorre a singularidade é justamente quando a derivada da curvatura da curva  $y = 2x^2$  se anula, conforme esperávamos.

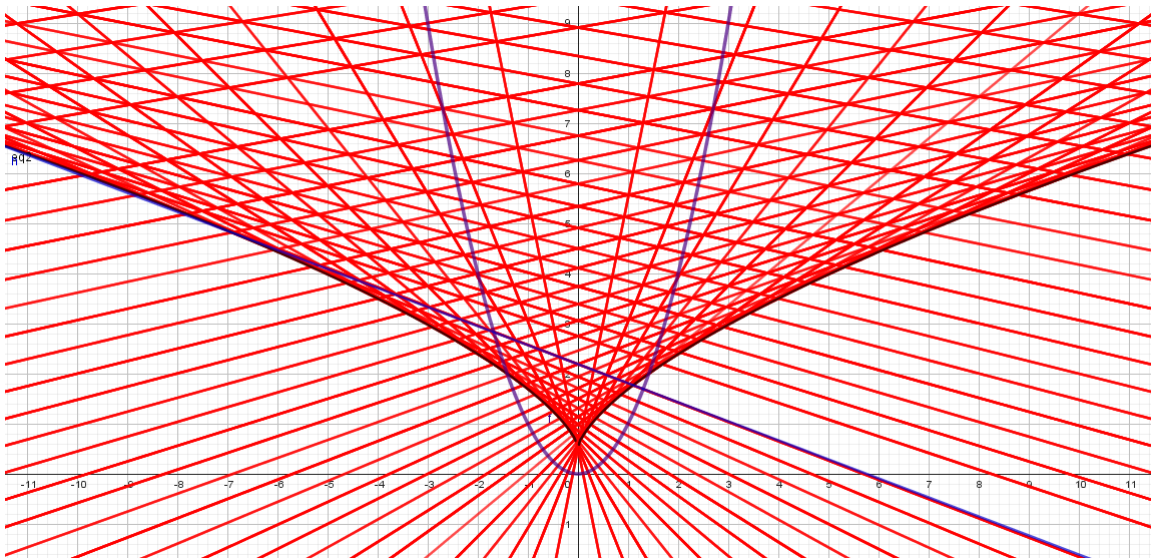


Figura 2.2: Em roxo, a parábola; em vermelho, a família de retas normais; em preto, o cuspide que representa  $\mathcal{D}$ .

**Exemplo 2.6** Considere a função:  $F_t(x, y) = x \sin(t) + y \cos(t) - \cos(t) \sin(t)$ .

Note que:

$$C_t = F_t^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F_t(x, y) = 0\}$$

representa uma família de retas. Temos que:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = x \cos(t) - y \sin(t) - \cos(2t)$$

Para resolver  $F(x, y, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0$  podemos proceder com:

$$\sin(t)F(x, y, t) + \cos(t)\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0$$

o que nos dá:

$$x = \cos(t) \sin^2(t) + \cos(2t) \cos(t) \quad (2-5)$$

Substituindo-se a Equação (2-5) em  $F(x, y, t) = 0$  e usando identidades trigonométricas básicas, obtemos que:  $y = \sin^3(t)$ . E substituindo este resultado em  $F(x, y, t) = 0$ , obtemos  $x = \cos^3(t)$ . Assim, segue-se que:

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1\}$$

Portanto, a envoltória da família  $F_t$  é uma **astróide**. Veja a figura abaixo:

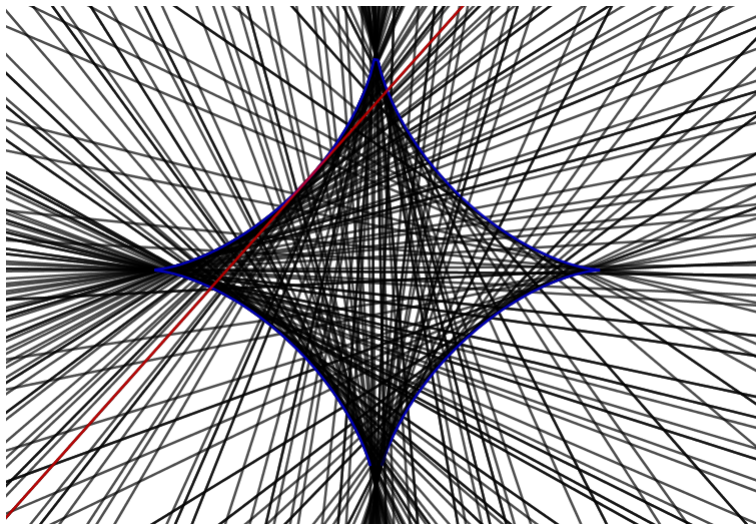


Figura 2.3: Em preto, temos a família de retas, em azul, a envoltória  $\mathcal{D}$  e em vermelho uma das retas destacadas.

**Exemplo 2.7** Vamos considerar desta vez a função  $F_t(x, y) = \frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{(1-t)^2} - 1$ , com  $0 < t < 1$ . Evidentemente, temos que:

$$C_t = F_t^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F_t(x, y) = 0\}$$

é uma família de elipses. Além disso,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = \frac{-2x^2}{t^3} + \frac{2y^2}{(1-t)^3}$$

Para resolver  $F(x, y, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0$ , vamos proceder da seguinte forma:

De  $\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0$ , obtemos que:

$$x^2 = \frac{t^3 y^2}{(1-t)^3} \quad (2-6)$$

Substituindo-se a Equação (2-5) em  $F(x, y, t) = 0$  segue-se que:  $y^2 = (1-t)^3$ .

Finalmente, segue-se que

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

E portanto, novamente obtemos a envoltória como sendo a **astróide**.

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1\}$$

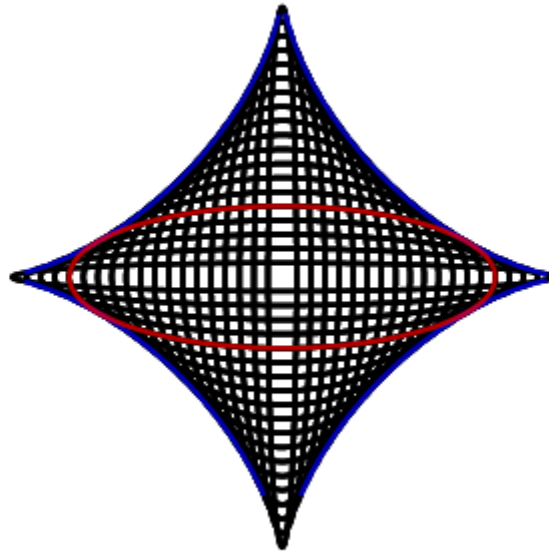


Figura 2.4: Em preto, temos a família de elipses, em azul temos a envoltória  $\mathcal{D}$ , e em vermelho, uma elipse destacada.

Note que os Exemplos 2.6 e 2.7 nos mostram que, duas famílias de curvas, embora com traços completamente diferentes, podem possuir a mesma envoltória  $\mathcal{D}$ .

## 2.3

### Contorno aparente em superfícies

Agora, nesta seção, alguns detalhes técnicos a respeito da Definição 2.3 serão esclarecidos. Nosso objetivo aqui é mostrar uma forma análoga, porém em geral mais complicada, de determinar a envoltória  $\mathcal{D}$  de uma família de curvas.

Em vez de iniciarmos a análise com uma família de funções  $F_t$  como fizemos anteriormente, vamos considerar uma superfície  $S$  regular e suave em  $\mathbb{R}^3$  com coordenadas  $(x, y, t)$ . Sabemos que para todo  $k \in \mathbb{R}$ , a interseção de  $S$  com o plano  $t = k$  resulta em uma família de curvas de nível no espaço.

**Definição 2.8** *Sejam uma superfície  $S$  regular e suave, e  $T_p S$  o plano tangente a  $S$  no ponto  $p$ . Dado um vetor  $v \in \mathbb{R}^3$  fixo, defina o conjunto:*

$$\mathcal{P}_v = \{p \in S \mid T_p S \text{ paralelo a } v\}$$

**Observação 2.9** Em particular, neste trabalho, vamos sempre considerar  $v = (0, 0, 1)$ .

**Definição 2.10** Definimos como **contorno aparente** da superfície  $S$ , o conjunto  $\mathcal{P}_v$  para  $v = (0, 0, 1)$ . E, a envoltória  $\mathcal{D}$  será a imagem da projeção ortogonal de  $\mathcal{P}_v$  sobre o plano  $t = 0$ .

**Exemplo 2.11** Considere a função:  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1$ . É claro que 0 é um valor regular de  $F$ , e portanto o conjunto  $F^{-1}(0)$  é uma superfície regular conforme a figura abaixo:

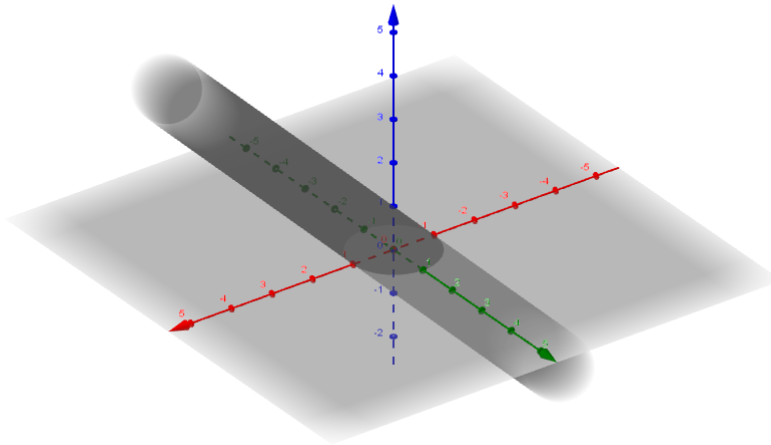


Figura 2.5: A superfície  $S = F^{-1}(0)$ .

Usando a notação usual  $(\nabla F(q))$  para o gradiente da função  $F$  no ponto  $q$ , e sendo  $v = (0, 0, 1)$ , então o conjunto  $\mathcal{P}_v$  é formado pelos pontos  $q \in S$  que satisfazem a equação:

$$\langle \nabla F(q), (0, 0, 1) \rangle = 0 \quad (2-7)$$

onde  $\langle, \rangle$  é o produto interno canônico do espaço euclidiano.

Relembre da Definição 2.3 que precisávamos que  $\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0$ , o que por sua vez é equivalente à Equação (2-7). Logo, temos que:

$$\mathcal{P}_v = \{(t, \pm 1, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Consequentemente, conforme vimos, a **contorno aparente** de  $S$  será o conjunto  $\mathcal{P}_v$ . Finalmente observe na figura abaixo, que o conjunto  $\{(t, \pm 1) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$  é exatamente a imagem da projeção ortogonal de  $\mathcal{P}_v$  sobre o plano  $t = 0$ , e portanto, a envoltória  $\mathcal{D}$  definida na seção anterior. Observe ainda que

para cada parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ , obtemos uma circunferência no plano, exatamente conforme vimos anteriormente.

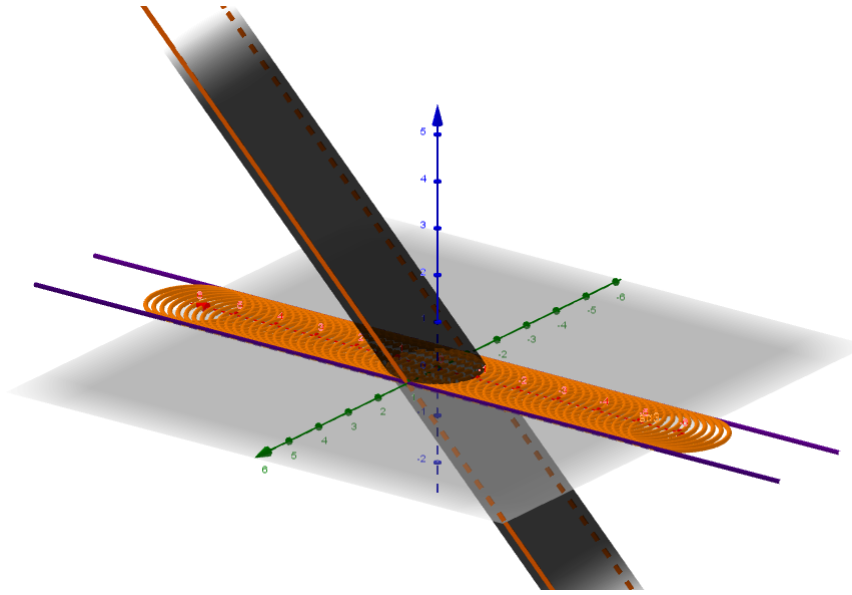


Figura 2.6: Ao longo da superfície  $S$  (em preto), temos o conjunto  $\mathcal{P}_v$  (contorno aparente) que é um par de retas em laranja. A envoltória  $\mathcal{D}$  é o par de retas  $y = \pm 1$  no plano (em roxo).

E novamente em relação à Definição 2.3, precisamos que  $F(x, y, t) = 0$  porque o ponto  $(x, y, t)$  tem que pertencer ao conjunto  $F^{-1}(0)$ . O leitor interessado em mais detalhes técnicos a respeito do assunto pode consultar: (BRUCE; GIBLIN, 1992), (RIUL, 2015) e (VILCHES, 2009).

Um fato importante é que existem outras definições de envoltória. E além disso, tais definições não são equivalentes à Definição 2.3. É o que veremos nas próximas seções.

## 2.4

### A envoltória $E_1$

Nesta seção veremos outra definição de envoltória. De qualquer forma, como vínhamos fazendo anteriormente, considere a função  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x, y, t)$ .

Veremos nesta seção que  $E_1$  possui um caráter discreto. Resumidamente, conforme (BRUCE; GIBLIN, 1992), a envoltória  $E_1$  é o limite de interseções de curvas  $C_t = F_t^{-1}(0)$ . De uma maneira mais formal, temos:

**Definição 2.12** A *envoltória*  $E_1$  é o conjunto de pontos:

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x_n, y_n, t_n, t'_n \in \mathbb{R}; t_n \neq t'_n, \forall n \in \mathbb{N}; F(x_n, y_n, t_n) = F(x_n, y_n, t'_n) = 0\}$$



Na definição anterior, podemos supor sem perda de generalidade, que  $t_n < t'_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , embora tenhamos exigido que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t'_n = t.$$

Além disso, precisamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ , com  $(x, y, t)$  pertencente ao domínio de  $F$ . Note que o fato de que  $F(x_n, y_n, t_n) = F(x_n, y_n, t'_n) = 0$  implica em  $(x_n, y_n) \in C_{t_n} \cap C_{t'_n}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 2.13** *Dadas as definições de envoltória já estudadas até aqui, temos que:  $E_1 \subset \mathcal{D}$ .*

*Prova.* Para algum  $n \in \mathbb{N}$ , defina a função real:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto F(x_n, y_n, t) \end{aligned}$$

Observe que, por construção,  $f$  é diferenciável, e além disso, temos que:

$$f(t_n) = F(x_n, y_n, t_n) = F(x_n, y_n, t'_n) = f(t'_n) = 0$$

Observe ainda que como  $f$  é uma função real em uma variável real, podemos usar o Teorema de Rolle, que nos garante a existência de  $\tau_n \in ]t_n, t'_n[$  tal que  $f'(\tau_n) = 0$ . Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t'_n = t$$

temos, é claro, que para todo  $n$  suficientemente grande,  $[t_n, t'_n]$  está no domínio de  $f$ . Agora, veja que:

$$f'(\tau_n) = \frac{\partial F}{\partial t}(x_n, y_n, \tau_n) = 0$$

e assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial t}(x_n, y_n, \tau_n) = \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0$$

Portanto, segue-se que  $E_1 \subset \mathcal{D}$ . ■

Observe agora os seguintes exemplos:

**Exemplo 2.14** *Vamos considerar novamente  $F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1$ . Neste exemplo, nosso objetivo é mostrar que  $E_1 = \mathcal{D}$ . Então, usando o Teorema 2.13, é suficiente mostrarmos que  $\mathcal{D} \subset E_1$ .*

*Dado  $(x, y) \in \mathcal{D}$ , temos que  $(x, y)$  é da forma  $(x, y) = (t, \pm 1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Podemos tomar, por exemplo as sequências  $t_n = t - \frac{1}{n}$  e  $t'_n = t + \frac{1}{n}$ . Sendo*

assim, segue-se que:

$$C_{t_n} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - t_n)^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

$$C_{t'_n} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - t'_n)^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

Precisamos definir  $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$  de forma que tenhamos  $(x_n, y_n) \in C_{t_n} \cap C_{t'_n}, \forall n \in \mathbb{N}$ . Assim, fixado  $n \in \mathbb{N}$  arbitrário, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} (x_n - t_n)^2 + y_n^2 - 1 = 0 \\ (x_n - t'_n)^2 + y_n^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Note que  $(x_n - t_n)^2 = (x_n - t'_n)^2$ , donde:

$$x_n - t_n = \begin{cases} x_n - t'_n, & x_n \geq t'_n \\ -x_n + t'_n, & x_n < t'_n \end{cases}$$

Observe que a única alternativa é  $x_n - t_n = -x_n + t'_n$ , o que implica em  $x_n = t, \forall n \in \mathbb{N}$ . E conseqüentemente, como  $y_n$  é um termo quadrático, obtemos:  $y'_n = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$  e  $y''_n = -\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$ . Logo, a seqüência  $(x_n, y_n)$  é dada por:

$$(x_n, y'_n) = \left( t, \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right)$$

e

$$(x_n, y''_n) = \left( t, -\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right)$$

Finalmente, note que como  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = t, \lim_{n \rightarrow \infty} y'_n = 1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} y''_n = -1$ , temos:

$$F(x_n, y'_n, t_n) = F(x_n, y'_n, t'_n) = F(x_n, y''_n, t_n) = F(x_n, y''_n, t'_n) = 0$$

e que:

$$F(t, \pm 1, t) = 0$$

Portanto  $E_1 = \mathcal{D}$ .

Agora, o exemplo abaixo, evidencia que em geral,  $E_1 \neq \mathcal{D}$ .

**Exemplo 2.15** Consideremos agora a função  $F = (x, y, t) = x - t^k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ . Primeiro, vamos mostrar que se  $k = 2$ , então  $E_1 = \mathcal{D}$ .

Fixe  $(x, y) \in \mathcal{D}$ . Vamos considerar as seqüências de números reais:  $t_n = t - \frac{1}{n}$  e  $t'_n = t + \frac{1}{n}$ . É claro que  $t_n \neq t'_n, \forall n \in \mathbb{N}$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t'_n = t$ .

Além disso, vamos determinar o par de seqüências  $x_n, y_n$  de forma que  $x_n, y_n \in C_{t_n} \cap C_{t'_n}$  de forma análoga a que fizemos no exemplo anterior. Isto é, vamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} x_n - t_n^2 = 0 \\ x_n - (t'_n)^2 = 0 \end{cases}$$

Deste sistema, segue-se que:

$$t - \frac{1}{n} = \begin{cases} t + \frac{1}{n} \\ -t - \frac{1}{n} \end{cases}$$

donde podemos concluir facilmente que  $x_n = \frac{1}{n^2}$ . Logo, temos que

$$F(x_n, y_n, t_n) = F(x_n, y_n, t'_n) = 0$$

e pelo Teorema 2.13, concluímos que  $E_1 = \mathcal{D}$  quando  $k = 2$ .

Para  $k \geq 2$  e par, pode-se verificar de forma simples que  $\mathcal{D}$  é o eixo  $y$ .

Agora, para  $k$  ímpar, isto é, para  $k = 2p + 1$  para algum  $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , mostraremos que  $E_1 = \emptyset$ . De fato, se  $(x, y) \in E_1$ , pela definição, existem  $x_n, y_n, t_n, t'_n \in \mathbb{R}$  tais que  $t_n \neq t'_n, \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t'_n = t$  e  $(x_n, y_n) \in C_{t_n} \cap C_{t'_n}, \forall n \in \mathbb{N}$ . Assim, o par  $(x_n, y_n)$  deve satisfazer o sistema

$$\begin{cases} x_n - t_n^{2p+1} = 0 \\ x_n - (t'_n)^{2p+1} = 0 \end{cases}$$

Observe que para  $p = 0$ , é imediato que  $t_n = t'_n$ , o que é uma contradição. Além disso, para um  $p \in \mathbb{N}$  qualquer, conclui-se que  $x_n = t_n^{2p+1} = (t'_n)^{2p+1}$  implica em  $t_n = t'_n$ , o que é um absurdo. Portanto, concluímos que neste caso,  $E_1 = \emptyset$ .

Finalmente, o Exemplo 2.15 mostra que  $E_1$  pode ser estritamente menor do que  $\mathcal{D}$ .

## 2.5

### A envoltória $E_2$

Nesta seção, veremos uma outra definição de envoltória. Nosso objetivo aqui é análogo ao da seção anterior: concluir que  $E_2$ , em geral, é um conjunto estritamente menor do que  $\mathcal{D}$ .

**Definição 2.16** Dada uma função  $F$ , a envoltória  $E_2$  de sua família  $F_t$  é definida como o seguinte conjunto:

$$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \gamma: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ regular, } \exists t_0 \in \mathbb{R}; \gamma(t_0) = (x, y)\}$$

Além disso, para todo  $t \in A$ , tem-se:

1.  $\gamma(t) \in C_t$ , isto é,  $F(\gamma(t), t) = 0$ .
2. As tangentes a  $C_t$  e a  $\gamma$  em  $\gamma(t)$  coincidem.

Note que, decorre imediatamente da Definição 2.16 que o traço da curva regular  $\gamma$  está contido em  $E_2$ .

**Observação 2.17** A condição (2) da Definição 2.16 pode ser reescrita de algumas formas equivalentes. São elas:

A  $\langle \nabla F_t(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$ .

B  $\text{Im}(\text{D}\gamma(t)) = \text{Nuc}(\text{D}F_t(\gamma(t)))$ .

De fato, uma vez que o item (2) nos diz que as tangentes a  $C_t$  e a  $\gamma(t)$  coincidem, a equivalência entre o item (1) e o item A é imediata, pois a única possibilidade é que o vetor  $\nabla F_t(\gamma(t))$  seja ortogonal ao  $\gamma'(t)$ .

Agora, para verificar a equivalência entre o item (2) e o item B, vamos primeiro considerar  $(x, y) \in \text{Im}(\text{D}\gamma(t))$ . Assim, existe  $b \in \mathbb{R}$  tal que:

$$(x, y) = \text{D}\gamma(t) \cdot b = \begin{bmatrix} \gamma'_1(t) \cdot b \\ \gamma'_2(t) \cdot b \end{bmatrix}$$

Daí, segue-se que:

$$\begin{aligned} \text{D}F_t(\gamma(t)) \cdot (x, y) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_t}{\partial x}(\gamma(t)) & \frac{\partial F_t}{\partial y}(\gamma(t)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma'_1(t) \cdot b \\ \gamma'_2(t) \cdot b \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial F_t}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_1(t) \cdot b + \frac{\partial F_t}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_2(t) \cdot b \\ &= b \cdot \langle \nabla F_t(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Isto é,  $(x, y) \in \text{Nuc}(\text{D}F_t(\gamma(t)))$ . Reciprocamente, se tomarmos:

$$(x, y) \in \text{Nuc}(\text{D}F_t(\gamma(t))) \setminus \{(0, 0)\}$$

teremos que:

$$\text{D}F_t(\gamma(t)) \cdot (x, y) = 0 \implies \langle \nabla F(\gamma(t)), (x, y) \rangle = 0$$

o que implica na existência de  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que:

$$(x, y) = \lambda \gamma'(t) = \begin{bmatrix} \gamma'_1(t) \cdot \lambda \\ \gamma'_2(t) \cdot \lambda \end{bmatrix}$$

Isto é,  $(x, y) \in \text{Im}(D(\gamma(t)))$ .

**Teorema 2.18** *Temos que:  $E_2 \subset \mathcal{D}$ .*

*Prova.* De fato, dado  $(x, y) \in E_2$  fixo, segue diretamente da Definição 2.16 e da Observação 2.17 que existem curva regular  $\gamma$  e  $t_0 \in \mathbb{R}$  com  $\gamma(t_0) = (x, y)$  tal que para todo  $t \in \mathbb{R}$  tenhamos:

1.  $F(\gamma(t), t) = 0$ .
2.  $\langle \nabla F_t(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$ .

Do item (1) obtemos:

$$F(\gamma(t_0), t_0) = F(x, y, t_0) = 0$$

Agora, derivando (1) em relação a  $t$ , segue-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t), t) \cdot t' + \frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t), t) \cdot \gamma'_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t), t) \cdot \gamma'_2(t) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t), t) + \frac{\partial F_t}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_1(t) + \frac{\partial F_t}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_2(t) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t), t) + \langle \nabla F_t(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t), t) &= 0 \end{aligned}$$

Em particular,  $\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t_0) = 0$ . Logo,  $(x, y) \in \mathcal{D}$ , donde  $E_2 \subset \mathcal{D}$ . ■

Agora, vejamos os seguintes exemplos:

**Exemplo 2.19** *Considere  $F_t(x, y) = (x-t)^2 + y^2 - 1$ . Vamos mostrar aqui que  $E_2 = \mathcal{D}$ . Para isso, considere  $(x, y) = (x, \pm 1) \in \mathcal{D}$ , e  $\gamma(t) = (t, \pm 1)$ . Assim, temos que:*

$$\gamma(x) = (x, \pm 1) = (x, y)$$

Daí, segue-se que:

1.  $F(\gamma(t), t) = (t-t)^2 + (\pm 1)^2 - 1 = 0$
2.  $\langle \nabla F_t(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle (0, \pm 2), (1, 0) \rangle = 0$ .

Logo,  $(x, y) \in E_2$  e portanto, aqui temos que  $E_2 = \mathcal{D}$ .

**Exemplo 2.20** *Consideremos agora  $F_t(x, y) = x - t^k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ . Afirmamos que  $E_2 = \emptyset$ .*

Para mostrar isso, suponhamos que exista  $(x, y) \in E_2$ . Pela Definição 2.16, existem curva regular  $\gamma$  e  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\gamma(t_0) = (x, y)$ . Além disso, temos que:

$$\begin{aligned}\langle \nabla F_t(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle &= 0 \\ \langle (1, 0), (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)) \rangle &= 0 \\ \gamma'_1(t) &= 0\end{aligned}\tag{2-8}$$

Mas por outro lado, como  $F(\gamma(t), t) = 0$ , segue-se que  $\gamma_1(t) = t^k, \forall t \in \mathbb{R}$ . Mas isto é uma contradição, porque pela Equação (2-8), temos que  $\gamma'_1(t) = 0$ , o que implicaria que  $t$  é constante. Portanto,  $E_2 = \emptyset$ .

## 2.6

### A envoltória $E_3$

Nesta seção, veremos de forma breve uma última definição de envoltória. Nosso objetivo aqui é análogo ao da seção anterior: concluir que  $E_3$ , em geral, não é igual a  $\mathcal{D}$ . De forma resumida, conforme (BRUCE; GIBLIN, 1992), dada a família  $F_t$ , a envoltória  $E_3$  é a fronteira da região preenchida pela família de curvas  $C_t$ . De uma maneira mais formal, temos que:

**Definição 2.21** Dada uma família de funções  $F_t$ , a envoltória  $E_3$  é o conjunto de pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  que cumprem as seguintes propriedades:

1. Existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $F(x, y, t_0) = 0$ .
2. Existe  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$  arbitrariamente próximo de  $(x, y)$  tal que  $F(\bar{x}, \bar{y}, t) \neq 0$

Novamente, mostraremos que  $E_3$  pode ser estritamente menor do que  $\mathcal{D}$  em termos de conjuntos.

**Teorema 2.22** Temos que:  $E_3 \subset \mathcal{D}$ .

*Prova.* De fato, suponha que  $(x, y) \notin \mathcal{D}$ . Caso tenhamos que  $F(x, y, t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ , então obviamente há uma contradição com o item (1) da Definição 2.21 e a demonstração é concluída. Agora, caso exista  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $F(x, y, t) = 0$ , como  $(x, y) \notin \mathcal{D}$ , nos resta que:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) \neq 0$$

o que, por sua vez, implica que o plano tangente à superfície em  $(x, y, t)$  não é vertical. Logo, a projeção de  $F^{-1}(0)$  no plano  $t = 0$ , será uma bijeção numa vizinhança de  $(x, y)$ . Mas em particular, para todo  $(\bar{x}, \bar{y})$  suficientemente

próximo de  $(x, y)$ , existirá  $\bar{t} \in \mathbb{R}$  tal que  $F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 0$ , o que nos leva a concluir finalmente que  $x \notin E_3$ . ■

Vejamos abaixo alguns exemplos:

**Exemplo 2.23** Novamente, vamos considerar a família de funções dada por:

$$F_t(x, y) = (x - t)^2 + y^2 - 1$$

Vamos mostrar aqui que  $E_3 = \mathcal{D}$ . Como já vimos, o Teorema 2.22 garante que:

$$E_3 \subset \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \pm 1\}$$

Dado  $(x, y) = (x, \pm 1) \in \mathcal{D}$ , precisamos mostrar que existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $F(x, y, t) = 0$  e que existe  $(\bar{x}, \bar{y})$  suficientemente próximo de  $(x, \pm 1)$  tal que  $F(\bar{x}, \bar{y}, t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ . De fato, consideremos  $t = x$ , segue-se então que:

$$F(x, \pm 1, x) = (x - x)^2 + (\pm 1)^2 - 1 = 0$$

Agora, fixe  $\varepsilon > 0$  arbitrário suficientemente pequeno, e tome  $(\bar{x}, \bar{y}) = (x, \pm(1 + \varepsilon/2))$ . Segue-se então que  $F(\bar{x}, \bar{y}, t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ . Portanto, segue-se que  $E_3 = \mathcal{D}$ .

**Exemplo 2.24** Consideremos agora a família de funções dada por:

$$F_t(x, y) = x - t^k$$

com  $k \in \mathbb{N}$ . Conforme já vimos, para  $k$  ímpar, as retas dadas por  $C_t^{-1}$  preenchem todo o plano, e temos  $E_3 = \emptyset$ . Mas para  $k$  par, as retas dadas por  $C_t^{-1}$  preenchem apenas a parte do plano que corresponde a  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$ , e  $E_3$  corresponde ao eixo  $y$ .

De forma análoga ao que concluímos nas seções anteriores, temos então que o conjunto  $E_3$  pode ser, em geral, estritamente menor do que  $\mathcal{D}$ .

## 3

### Curvas planas convexas

Neste capítulo, iremos aplicar a teoria estudada anteriormente sobre envoltórias de curvas planas em um estudo sobre envoltórias de retas bissetoras em uma curva convexa fechada, e para isso, a partir daqui iremos nos basear apenas em (CRAIZER, 2022) e (FECHTOR-PRADINES, 2015). Dada uma curva fechada e convexa, dizemos que uma reta é bissetora, se tal reta divide a região interior do seu traço em duas partes com áreas iguais. De modo geral, vamos estudar aqui a estrutura destas envoltórias, e em particular, estamos interessados em determinados pontos deste objeto que passam pelas retas bissetoras, chamados de cúspides.

Antes de iniciarmos, precisamos primeiro de mais alguns conceitos importantes a respeito de curvas sob o ponto de vista da Geometria Diferencial.

#### 3.1

##### Parametrização de meia-área

Antes de enunciarmos e demonstrarmos os resultados principais dessa seção, vamos revisar alguns conceitos importantes a respeito de curvas planas.

**Definição 3.1** *Uma curva diferenciável plana fechada é uma aplicação  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  diferenciável de um intervalo  $I$  da reta real  $\mathbb{R}$  no plano  $\mathbb{R}^2$ , e sendo  $I = [a, b]$ , dizemos que a curva  $\gamma$  é fechada se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Além disso,  $\gamma$  é uma curva regular, se  $\gamma'(s) \neq (0, 0), \forall t \in I$ .*

Embora as referências clássicas de Geometria Diferencial considerem o termo "diferenciável" como sendo "infinitamente diferenciável", aqui neste trabalho é suficiente que a curva  $\gamma$  seja de classe  $C^2$ .

**Definição 3.2** *Dizemos que uma curva plana regular  $\gamma$ , não necessariamente fechada, é **convexa** se para todo  $s \in I$ , o traço  $\gamma(I)$  de  $\gamma$  está totalmente contido em um lado do semi-plano fechado determinado pela reta tangente em  $s$ .*





Figura 3.1: Exemplos de curvas convexas e não convexas. Fonte: (CARMO, 2010).

Na figura acima, os três primeiros exemplos representam curvas convexas, e os dois seguintes representam curvas não convexas.

Considere uma curva plana convexa e fechada, parametrizada por  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , conforme as Definições 3.1 e 3.2. Para cada  $s \in I$  considere também a reta bissetora  $r(s)$  que passa pelo ponto  $\gamma(s)$  e, conforme explicitamos no início do capítulo, tal reta divide a curva em duas partes de áreas iguais. Sendo assim, vamos denotar por  $\gamma(t)$  o segundo ponto de interseção da reta  $r(s)$  com  $\gamma$ , onde  $t = t(s)$ . A figura abaixo ilustra esta situação.

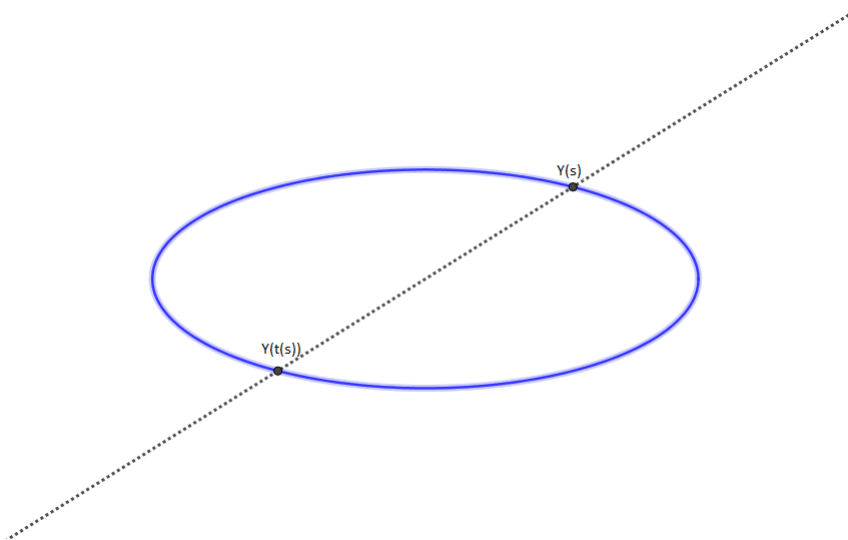


Figura 3.2: Elipse  $\gamma$  e uma reta bissetora  $r(s)$  passando pelos pontos  $\gamma(s)$  e  $\gamma(t(s))$ .

De agora em diante, salvo menção em contrário, sempre que for mencionada uma curva parametrizada  $\gamma$ , fica estabelecido que esta curva é plana, fechada e convexa, conforme todas as definições já estabelecidas até aqui.

**Observação 3.3** Utilizaremos a notação  $[A, B]$  para nos referirmos ao determinante da matriz formada pelas colunas  $A$  e  $B$ .

**Lema 3.4** Para qualquer número real  $a > 0$ , sempre existe uma parametrização  $\gamma(s)$  tal que:

$$[\gamma'(s), \gamma(t(s)) - \gamma(s)] = a \quad (3-1)$$

*Prova.* Fixe  $a > 0$  arbitrário, e considere  $\gamma(u)$  uma parametrização qualquer. Seja

$$[\gamma'(u), \gamma(t(u)) - \gamma(u)] = \rho(u)$$

Defina:

$$s(r) = \frac{1}{a} \int_0^r \rho(u) du$$

Podemos considerar então uma reparametrização para  $\gamma$  como sendo:

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(r(s))$$

Temos então que:

$$\begin{aligned} [\bar{\gamma}'(s), \bar{\gamma}(t(s)) - \bar{\gamma}(s)] &= [\gamma'(s)r'(s), \gamma(t(s)) - \gamma(s)] \\ &= r'(s)[\gamma'(s), \gamma(t(s)) - \gamma(s)] \\ &= \frac{a}{\rho(s)}\rho(s) \\ &= a \end{aligned}$$

como queríamos. ■

**Definição 3.5** Uma parametrização conforme a Equação (3-1) para uma curva  $\gamma$  é chamada de **parametrização de meia-área**.

Podemos supor sem perda de generalidade que o domínio da aplicação  $\gamma$  é um intervalo do tipo  $[0, 2T_0]$ , onde  $T_0 > 0$  é uma constante real tal que  $\gamma(T_0)$  é o segundo ponto do traço da curva  $\gamma$  que é interceptado pela reta bissetora  $r(s)$  que intercepta a curva também no ponto  $\gamma(0)$ . Além disso, como  $\gamma$  é uma curva fechada, obviamente, temos que  $\gamma(0) = \gamma(2T_0)$ .

O Lema abaixo estabelece equivalências importantes para curvas com parametrizações de meia-área.

**Lema 3.6** Seja  $\gamma: [0, 2T_0] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva plana convexa com  $\gamma(0) = \gamma(2T_0)$ . Os seguintes itens são equivalentes:

1. A parametrização é meia-área.
2.  $t'(s) = 1$ .

3.  $t = s + T_0$ .

*Prova.* Mostraremos aqui que 1 é equivalente a 2 e que 2 é equivalente a 3.

Primeiro, fixemos  $s_0, t(s_0) \in [0, 2T_0]$  e  $a > 0$ . Com este par de números fixados em  $[0, 2T_0]$ , vamos determinar duas regiões  $A_1$  e  $A_2$  no interior da curva  $\gamma$ . Para a região  $A_1$ , consideremos os pontos  $\gamma(s_0)$ ,  $\gamma(t(s_0))$  e  $\gamma(s_0 + s)$  com  $s \in [0, 2T_0]$ . Podemos supor sem perda de generalidade que  $s_0 + s < t(s_0)$ . Assim,  $A_1$  é a região delimitada pelo arco  $\gamma(s_0)\gamma(s_0 + s)$  e pelas cordas  $\overline{\gamma(s_0)\gamma(t(s_0))}$  e  $\overline{\gamma(t(s_0))\gamma(s_0 + s)}$ .

Para a região  $A_2$ , consideremos os pontos  $\gamma(t(s_0))$ ,  $\gamma(s_0 + s)$  e  $\gamma(t(s_0 + s))$ . Como supomos para  $A_1$  que  $s_0 + s < t(s_0)$ , segue-se então que  $s_0 + s < t(s_0) < t(s_0 + s)$ . Assim,  $A_2$  é a região delimitada pelo arco  $\gamma(t(s_0))\gamma(t(s_0 + s))$  e pelas cordas  $\overline{\gamma(s_0 + s)\gamma(t(s_0 + s))}$  e  $\overline{\gamma(s_0 + s)\gamma(t(s_0))}$ .

Pela forma que construímos as regiões  $A_1$  e  $A_2$ , e pela forma que definimos  $t(s)$ , segue-se que as áreas destas regiões são iguais. Isto é:

$$\text{área}(A_1) = \text{área}(A_2) \quad (3-2)$$

Por outro lado, usando o Teorema de Green para  $A_1$ , podemos concluir que:

$$\text{área}(A_1) = \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_0+s} [\gamma(s) - \gamma(t(s_0)), \gamma'(s)] ds$$

E de forma análoga para  $A_2$ :

$$\text{área}(A_2) = \frac{1}{2} \int_{t(s_0)}^{t(s_0+s)} [\gamma(s_0) - \gamma(t(s)), \gamma'(t(s))] ds$$

Derivando a Equação (3-2) em relação a  $s$  e tomando-se  $s = 0$ , obtemos:

$$[\gamma'(s_0), \gamma(t(s_0)) - \gamma(s_0)] = [\gamma'(t(s_0)), \gamma(s_0) - \gamma(t(s_0))]t'(s_0) \quad (3-3)$$

Assim, da Equação (3-3) concluímos que a parametrização de  $\gamma$  é meia-área se, e somente se,  $t'(s_0)a = a$  e portanto, se e somente se,  $t'(s) = 1$ . Logo, o item 1 é equivalente ao item 2.

A equivalência entre os itens 2 e 3 segue do Teorema Fundamental do Cálculo. ■

Seja  $\gamma: [0, 2T_0] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva com parametrização de meia-área. Para cada  $s \in [0, 2T_0]$  defina o campo vetorial transverso  $v(s)$  por:

$$v(s) = \gamma(s + T_0) - \gamma(s) \quad (3-4)$$

Observe que  $v(s)$  é paralelo à  $v(s + T_0)$ . De fato,  $v(s + T_0) = \gamma(s + 2T_0) - \gamma(s + T_0) = \gamma(s) - \gamma(s + T_0) = -v(s)$ .

Fixado  $a > 0$  arbitrário, como  $\gamma$  é uma parametrização de meia-área, podemos usar os Lemas 3.4 e 3.6 para obter que:

$$[\gamma'(s), v(s)] = [\gamma'(s), \gamma(s + T_0) - \gamma(s)] = [\gamma'(s), \gamma(t(s)) - \gamma(s)] = a \quad (3-5)$$

E que:

$$\begin{aligned} [v(s), v'(s)] &= [v(s), \gamma'(s + T_0) - \gamma'(s)] \\ &= [v(s), \gamma'(s + T_0)] + [v(s), -\gamma'(s)] \\ &= [-v(s + T_0), \gamma'(s + T_0)] + [\gamma'(s), v(s)] \\ &= [\gamma'(s + T_0), v(s + T_0)] + a \\ &= [\gamma'(t), v(t)] + a \\ &= 2a \end{aligned} \quad (3-6)$$

É evidente então que os vetores  $v(s)$  e  $\gamma'(s)$  são linearmente independentes. Logo, para cada  $s \in [0, 2T_0]$ , podemos escrever o vetor  $v'(s) = \gamma'(s + T_0) - \gamma'(s)$  como combinação linear da base  $\{v(s), \gamma'(s)\}$ . Isto é, existem coeficientes  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que

$$v'(s) = \alpha v(s) + \beta \gamma'(s) \quad (3-7)$$

Para calcular o coeficiente  $\alpha$  desta combinação linear, tomemos o determinante:

$$[v'(s), \gamma'(s)] = [\alpha v(s) + \beta \gamma'(s), \gamma'(s)] = \alpha[v(s), \gamma'(s)] + \beta[\gamma'(s), \gamma'(s)] = -\alpha a$$

assim, segue-se que:

$$\begin{aligned} \alpha a &= [\gamma'(s), v'(s)] = [\gamma'(s), \gamma'(s + T_0) - \gamma'(s)] = [\gamma'(s), \gamma'(s + T_0)] + [\gamma'(s), -\gamma'(s)] \\ &= [\gamma'(s), \gamma'(s + T_0)] \end{aligned}$$

donde,

$$\alpha = \frac{[\gamma'(s), \gamma'(s + T_0)]}{a}$$

Para calcular o coeficiente  $\beta$ , tomemos o determinante:

$$[v'(s), v(s)] = [\alpha v(s) + \beta \gamma'(s), v(s)] = \alpha[v(s), v(s)] + \beta[\gamma'(s), v(s)] = \beta a$$

Mas por outro lado, vimos que  $[v'(s), v(s)] = -2a$ . Assim, segue-se que  $\beta = -2$ . Portanto, a Equação (3-7) se torna:

$$v'(s) = \frac{[\gamma'(s), \gamma'(s + T_0)]}{a} v(s) - 2\gamma'(s) \quad (3-8)$$

### 3.2

#### Envoltória de retas bissetoras

Considere uma curva plana  $\gamma$  conforme as hipóteses da seção anterior. Agora nesta seção, iremos determinar a envoltória  $\mathcal{D}$  das linhas bissetoras de  $\gamma$ . Defina a função:

$$F: \mathbb{R}^2 \times [0, 2T_0] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, s) \longmapsto [(x, y) - \gamma(s), v(s)]$$

Para ilustrar o significado geométrico da função  $F$ , suponha que  $\gamma: [0, 2T_0] \longrightarrow \mathbb{R}^2$  seja a elipse representada na figura abaixo. Dado um ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , a função  $F$  retorna o dobro do valor da área do polígono  $(x, y)\gamma(s)\gamma(s + T_0)$  destacado em azul.

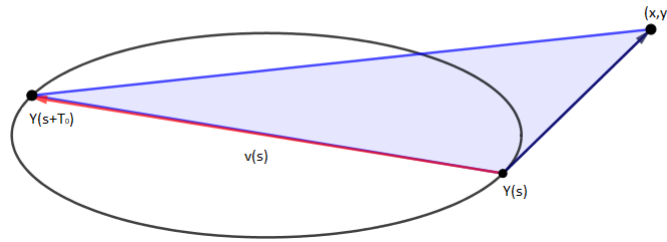


Figura 3.3: Em vermelho o vetor  $v(s)$ , em preto o vetor  $(x, y) - \gamma(s)$ , e em azul o polígono  $(x, y)\gamma(s)\gamma(s + T_0)$ .

A derivada de  $F$  em relação à variável  $s$  é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s}(x, y, s) &= [-\gamma'(s), v(s)] + [(x, y) - \gamma(s), v'(s)] \\ &= [(x, y) - \gamma(s), v'(s)] - [\gamma'(s), v(s)] \end{aligned} \quad (3-9)$$

Vimos anteriormente que para cada parametro  $s$ , podemos definir:

$$F_s: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto F(x, y, s)$$

Isto é, para cada parâmetro  $s$ , o conjunto  $F_s^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | F_s(x, y) = 0\}$  representa uma reta bissetora em  $\gamma$ .

Para calcular a envoltória  $\mathcal{D}$  de  $F$ , precisamos resolver  $F(x, y, s) = \frac{\partial F}{\partial s}(x, y, s) = 0$ . Observe que  $F(x, y, s) = 0$  se, e somente se, os vetores  $(x, y) - \gamma(s)$  e  $v(s)$  são linearmente dependentes, o que ocorre se, e somente se, existe uma função  $\lambda$  que associa cada  $s \in [0, 2T_0]$  a um número real  $\lambda(s)$

tal que:

$$(x, y) = \gamma(s) + \lambda(s)v(s) \quad (3-10)$$

Agora, tomando-se  $\frac{\partial F}{\partial s}(x, y, s) = 0$ , obtemos de (3-9) e de (3-10):

$$[\lambda(s)v(s), v'(s)] = [\gamma'(s), v(s)] \implies \lambda(s)[v(s), v'(s)] = [\gamma'(s), v(s)] \quad (3-11)$$

E como vimos na seção anterior, (3-11) torna-se  $2\lambda(s)a = a$ , donde  $\lambda(s) = \frac{1}{2}, \forall s \in [0, 2T_0]$ .

Finalmente, substituindo-se o que obtemos acima na equação (3-10), temos:  $(x(s), y(s)) = \gamma(s) + \frac{1}{2}v(s) = \gamma(s) + \frac{1}{2}(\gamma(s + T_0) - \gamma(s)) = \frac{1}{2}\gamma(s) + \frac{1}{2}\gamma(s + T_0)$ , o que é uma função da variável  $s$  como esperávamos. Vamos denotar por:

$$\mathcal{E}(s) = \frac{1}{2}(\gamma(s) + \gamma(s + T_0)) \quad (3-12)$$

Segue-se que portanto, que a envoltória  $\mathcal{D}$  é dada por  $\mathcal{E}(s)$ , que geometricamente representa o ponto médio das cordas bisetoras em  $\gamma$ .

Considerando-se ainda o exemplo da elipse  $\gamma$ , a figura abaixo mostra a família de retas bisetoras que dividem a elipse em duas regiões com áreas iguais, e sua envoltória  $\mathcal{E}(s)$ . Observe que neste caso, é apenas um ponto.

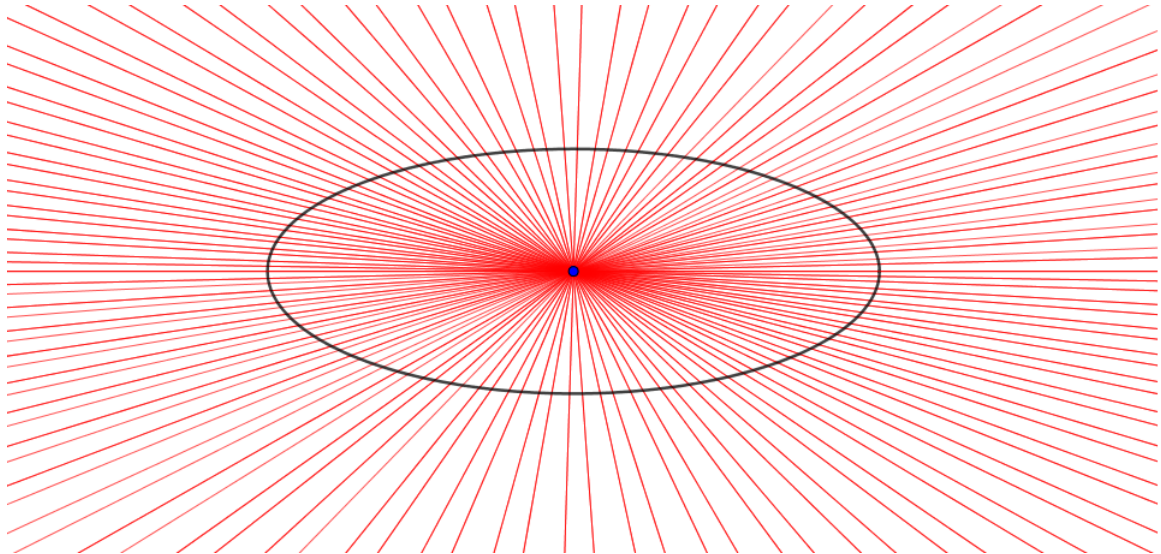


Figura 3.4: Em vermelho estão as retas bisetoras, e em azul está a envoltória  $\mathcal{E}(s)$ .

### 3.3

#### Vértices tangentes paralelos

Nesta seção, nosso objetivo principal é enunciar e demonstrar um resultado muito importante e contra-intuitivo: o Teorema dos Três Vértices. Mas primeiro, precisamos de algumas definições e outros resultados preliminares.

**Definição 3.7** Dado um  $s \in [0, 2T_0]$ , dizemos que  $s$  é um **vértice tangente paralelo** de  $\gamma$  quando  $\alpha(s) = 0$ , onde  $\alpha$  é o coeficiente da combinação linear dada pela Equação (3-7). Dizemos ainda que um vértice tangente paralelo é **ordinário** se  $\alpha'(s) \neq 0$ .

**Observação 3.8** É fundamental observar que a Definição 3.7 tem um significado geométrico importante, o qual é equivalente a afirmar que os vértices tangentes paralelos de  $\gamma$  em  $s$  e em  $s + T_0$  são paralelos. De fato, isto é evidente, pois basta notar que  $\alpha(s) = 0$  é equivalente a  $[\gamma'(s), \gamma'(s + T_0)] = 0$ , o que por sua vez, é equivalente a afirmar que  $\gamma'(s)$  e  $\gamma'(s + T_0)$  são linearmente dependentes.

**Observação 3.9** Por comodidade, para denotar um vértice tangente paralelo, usaremos a abreviação *pt – vértice*.

**Definição 3.10** Um ponto  $\mathcal{E}(s)$  da envoltória  $\mathcal{E}$  é chamado de **ponto estacionário** se  $\mathcal{E}'(s) = 0$ .

**Definição 3.11** Um ponto estacionário é um **cúspide** de  $\mathcal{E}$  se  $\mathcal{E}''(s) \neq 0$ .

**Teorema 3.12** Sejam  $\gamma$  uma curva plana fechada e convexa e  $\mathcal{E}$  a envoltória das retas bissetoras. As seguintes equivalências são verdadeiras:

1. Para que um ponto da envoltória  $\mathcal{E}$  seja estacionário, é necessário e suficiente que este seja *pt – vértice* de  $\gamma$ .
2. Para que um ponto da envoltória  $\mathcal{E}$  seja uma cúspide, é necessário e suficiente que este seja *pt – vértice ordinário* de  $\gamma$ .

*Prova.* Vamos provar cada item separadamente.

1. Vimos que a envoltória das retas bissetoras é dada por  $\mathcal{E}(s) = \frac{1}{2}(\gamma(s) + \gamma(s + T_0))$ . Logo, sua derivada é

$$\mathcal{E}'(s) = \frac{1}{2}(\gamma'(s) + \gamma'(s + T_0))$$

Se  $\mathcal{E}'(s) = 0$ , então  $\gamma'(s) = -\gamma'(s + T_0)$ . Logo,

$$\alpha(s) = \frac{[\gamma'(s), -\gamma'(s)]}{a} = 0$$

Reciprocamente, se  $\alpha'(s) = 0$ , então temos que  $v'(s) = -2\gamma'(s)$ . Por outro lado,  $v'(s) = \gamma'(s + T_0) - \gamma'(s)$ . Segue-se então que  $-2\gamma'(s) = \gamma'(s + T_0) - \gamma'(s)$ , donde  $\gamma'(s + T_0) = -\gamma'(s)$ . Logo,

$$\mathcal{E}'(s) = \frac{1}{2}(\gamma'(s) + \gamma'(s + T_0)) = 0$$

o que prova o item 1.

2. Temos que:

$$\mathcal{E}''(s) = \frac{1}{2}\gamma''(s) + \frac{1}{2}\gamma''(s + T_0) \quad (3-13)$$

e  $v''(s) = \gamma''(s + T_0) - \gamma''(s)$ , donde:

$$\gamma''(s + T_0) = v''(s) + \gamma''(s) \quad (3-14)$$

Por outro lado, como:  $v'(s) = \alpha(s)v(s) - 2\gamma'(s)$ , segue-se que:

$$v''(s) = \alpha'(s)v(s) + \alpha(s)v'(s) - 2\gamma''(s) \quad (3-15)$$

Substituindo-se (3-14) e (3-15) em (3-13), obtemos:

$$\mathcal{E}''(s) = \frac{\alpha'(s)v(s) + \alpha(s)v'(s)}{2} \quad (3-16)$$

Agora, basta observar que  $s$  é um *pt-vértice* ordinário de  $\gamma$  se, e somente se,  $\alpha(s) = 0$  e  $\alpha'(s) \neq 0$ . Isto é,  $s$  é um *pt-vértice* ordinário de  $\gamma$  se, e somente se,  $\mathcal{E}''(s) = \frac{\alpha'(s)v(s)}{2} \neq 0$ , ou seja, uma cúspide de  $\mathcal{E}$ , como queríamos. ■

Fixe  $a > 0$  e seja  $\gamma$  uma curva que cumpre todas as hipóteses da seção anterior. Vamos agora novamente considerar o coeficiente  $\alpha(s)$  da combinação linear (3-7). Afirmamos que:

$$\alpha(s + T_0) = -\alpha(s), \forall s \in [0, 2T_0] \quad (3-17)$$

De fato, dado  $s \in [0, 2T_0]$  arbitrário, temos que:

$$\begin{aligned} \alpha(s + T_0) &= \frac{[\gamma'(s + T_0), \gamma'(s + 2T_0)]}{a} = \frac{[\gamma'(s + T_0), \gamma'(s)]}{a} \\ &= -\frac{[\gamma'(s), \gamma'(s + T_0)]}{a} = -\alpha(s) \end{aligned}$$

É importante observar que a Equação (3-17) implica que a quantidade de *pt-vértices* em  $[0, T_0]$  é ímpar. De fato, se fosse par, então não haveria troca de sinais, pois  $\alpha$  é claramente uma função contínua. Uma outra consequência da Equação (3-17) é que:

$$\int_0^{2T_0} \alpha(s) ds = 0 \quad (3-18)$$



De fato,

$$\int_0^{2T_0} \alpha(s) ds = \underbrace{\int_0^{T_0} \alpha(s) ds}_{(I)} + \underbrace{\int_{T_0}^{2T_0} \alpha(s) ds}_{(II)}$$

Em (II), considere a seguinte mudança de variável:  $u = s - T_0$ . Daí, usando a Equação (3-17), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^{2T_0} \alpha(s) ds &= \int_0^{T_0} \alpha(s) ds + \int_{T_0}^{2T_0} \alpha(s) ds \\ &= \int_0^{T_0} \alpha(s) ds + \int_0^{T_0} \alpha(u + T_0) du \\ &= \int_0^{T_0} \alpha(s) ds - \int_0^{T_0} \alpha(u) du = 0 \end{aligned}$$

**Lema 3.13** *Se  $\gamma$  é uma curva que satisfaz todas as hipóteses anteriores, então*

$$\int_0^{2T_0} \alpha(s) \gamma(s) ds = 0$$

*Prova.* Primeiro, basta observar que:

$$\int_0^{2T_0} \alpha(s) \gamma(s) ds = \underbrace{\int_0^{T_0} \alpha(s) \gamma(s) ds}_{(I)} + \underbrace{\int_0^{T_0} \alpha(s) \gamma(s) ds}_{(II)} \quad (3-19)$$

Usaremos a mudança de variável  $s = u - T_0$  em (II) para obtermos:

$$\int_0^{2T_0} \alpha(s) \gamma(s) ds = \int_0^{T_0} \alpha(s) \gamma(s) ds + \int_0^{2T_0} \alpha(u) \gamma(u) du$$

Assim, da Equação (3-19) segue-se que:

$$\begin{aligned} \int_0^{2T_0} \alpha(s) \gamma(s) ds &= \int_0^{T_0} \alpha(s) \gamma(s) ds + \int_0^{T_0} \alpha(s + T_0) \gamma(s + T_0) ds \\ &= \int_0^{T_0} \alpha(s) (\gamma(s) - \gamma(s + T_0)) ds \\ &= - \int_0^{T_0} \alpha(s) v(s) ds \\ &= - \int_0^{T_0} v'(s) + 2\gamma'(s) ds \\ &= - \int_0^{T_0} \gamma'(s + T_0) + \gamma'(s) ds \\ &= -\gamma(2T_0) + \gamma(T_0) - \gamma(T_0) + \gamma(0) = 0 \end{aligned}$$

como queríamos. ■

Agora finalmente temos todos os resultados e definições necessárias para enunciar e demonstrar o Teorema dos Três Vértices.

**Teorema 3.14 (Teorema dos Três Vértices)** *Seja  $\gamma$  uma curva conforme as hipóteses anteriores. O número de  $pt - vértices$  de  $\gamma$  em  $[0, T_0]$  é sempre ímpar e maior ou igual a três.*

*Prova.* Primeiro, observe que a igualdade (3-17) implica que existe uma quantidade ímpar de zeros da função  $\alpha$  em  $[0, T_0)$ , isto é, uma quantidade ímpar de  $pt - vértices$  de  $\gamma$ .

Suponha que o resultado que queremos provar seja falso, isto é, vamos admitir que este zero, digamos  $s_0 \in [0, T_0)$ , é único, e vamos denotar  $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ . Consideremos  $A, B \in \mathbb{R}$  constantes, donde podemos escrever a equação da reta bissetora que intercepta  $\gamma$  em  $\gamma(s_0)$  como

$$A(x - \gamma_1(s_0)) + B(y - \gamma_2(s_0)) = 0$$

Podemos supor sem perda de generalidade que na região do plano cujos pontos  $(x, y)$  satisfazem

$$A(x - \gamma_1(s_0)) + B(y - \gamma_2(s_0)) > 0$$

tenhamos  $\alpha(s) > 0, \forall s \in [s_0, s_0 + T_0)$ . Assim, obtemos que:

$$\int_{s_0}^{s_0+T_0} \alpha(s)(A\gamma_1(s) + B\gamma_2(s))ds = A \int_{s_0}^{s_0+T_0} \alpha(s)\gamma_1(s)ds + B \int_{s_0}^{s_0+T_0} \alpha(s)\gamma_2(s)ds > 0 \quad (3-20)$$

e

$$\int_{s_0+T_0}^{s_0+2T_0} \alpha(s)(A\gamma_1(s) + B\gamma_2(s))ds = A \int_{s_0+T_0}^{s_0+2T_0} \alpha(s)\gamma_1(s)ds + B \int_{s_0+T_0}^{s_0+2T_0} \alpha(s)\gamma_2(s)ds > 0 \quad (3-21)$$

Mas as expressões (3-20) e (3-21) implicam em

$$\int_{s_0}^{2T_0} \alpha(s)\gamma_1(s)ds \neq 0$$

$$\int_{s_0}^{2T_0} \alpha(s)\gamma_2(s)ds \neq 0$$

o que contradiz o Lema 3.13. Portanto, segue o resultado. ■

### 3.4

#### A construção inversa

O objetivo desta seção é responder a seguinte pergunta: dada  $\mathcal{E}$ , é possível obtermos a curva  $\gamma$  correspondente? Dado  $c \in \mathbb{R}$ , considere a seguinte curva:

$$\gamma_c(s) = c\gamma(s) + (1 - c)\gamma(s + T_0) \quad (3-22)$$

O Teorema abaixo irá responder a pergunta desta seção.

**Teorema 3.15** *A envoltória das retas bissetoras de uma curva  $\bar{\gamma}$  é igual a envoltória das retas bissetoras de  $\gamma$  se, e somente se, existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\bar{\gamma} = \gamma_c$ .*

*Prova.* Sejam  $\gamma$  uma curva convexa fechada e com parametrização de meia-área,  $r(s)$  uma reta bissetora de  $\gamma$ , e  $\bar{\gamma}$  uma curva convexa fechada qualquer. Vamos denotar por  $s$  e  $s_1$  os parâmetros da interseção da reta bissetora  $r(s)$  com  $\bar{\gamma}$ .

Afirmamos que:  $\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\bar{\gamma}(s) + \bar{\gamma}(s_1))$  se, e somente se,

$$\bar{\gamma}(s) = c(s)\gamma(s) + (1 - c(s))\gamma(s + T_0)$$

onde  $c$  é uma função real que depende de  $s$ . De fato, podemos parametrizar a reta  $r(s)$  passando por  $\gamma(s)$  e  $\gamma(s + T_0)$  como:

$$r(s): t\gamma(s) + (1 - t)\gamma(s + T_0)$$

Assim, veja que  $\bar{\gamma}(s) \in r(s)$  se, e somente se, para cada  $s$ , tivermos:

$$\bar{\gamma}(s) = c(s)\gamma(s) + (1 - c(s))\gamma(s + T_0) \quad (3-23)$$

E de forma análoga,  $\bar{\gamma}(s_1) \in r(s)$  se, e somente se, para cada  $s$ , tivermos:

$$\bar{\gamma}(s_1) = d(s)\gamma(s) + (1 - d(s))\gamma(s + T_0) \quad (3-24)$$

Somando-se as Equações (3-23) e (3-24) obtemos:

$$\bar{\gamma}(s) + \bar{\gamma}(s_1) = \gamma(s)(c(s) + d(s)) + \gamma(s + T_0)(2 - (c(s) + d(s)))$$

Assim, para que tenhamos  $\bar{\gamma}(s) + \bar{\gamma}(s_1) = \gamma(s) + \gamma(s + T_0)$  é necessário e suficiente que  $c(s) + d(s) = 1$ . Logo,

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(s) &= \gamma(s) + \gamma(s + T_0) - \bar{\gamma}(s_1) \\ &= \gamma(s) + \gamma(s + T_0) - ((1 - c(s))\gamma(s) - c(s)\gamma(s + T_0)) \\ &= c(s)\gamma(s) + (1 - c(s))\gamma(s + T_0) \end{aligned}$$

o que prova a afirmação feita.

Afirmamos que:  $c(s) = c(s + T_0), \forall s$ . De fato, note que:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\gamma}(s) + \bar{\gamma}(s + T_0)}{2} &= \frac{c(s)\gamma(s) + (1 - c(s))\gamma(s + T_0) + c(s + T_0)\gamma(s + T_0) + (1 - c(s + T_0))\gamma(s)}{2} \\ &= \left( \frac{c(s) + 1 - c(s + T_0)}{2} \right) \gamma(s) + \left( \frac{1 - c(s) + c(s + T_0)}{2} \right) \gamma(s + T_0) \end{aligned} \quad (3-25)$$

Assim, para que a Equação (3-25) seja verdadeira, devemos ter:

$$c(s) + 1 - c(s + T_0) = 1$$

e portanto  $c(s) = c(s + T_0)$ , o que prova a afirmação.

Desta última afirmação, segue-se que:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(s + T_0) - \bar{\gamma}(s) &= c(s)\gamma(s + T_0) + (1 - c(s))\gamma(s) - c(s)\gamma(s) - (1 - c(s))\gamma(s + T_0) \\ &= 2c(s)(\gamma(s + T_0) - \gamma(s)) - (\gamma(s + T_0) - \gamma(s)) \\ &= (2c(s) - 1)(\gamma(s + T_0) - \gamma(s)) \\ &= (2c(s) - 1)v(s) \end{aligned}$$

Além disso, temos que:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}'(s) &= c'(s)\gamma(s) + c(s)\gamma'(s) + \gamma'(s + T_0) - c'(s)\gamma(s + T_0) - c(s)\gamma'(s + T_0) \\ &= c'(s)(\gamma(s) - \gamma(s + T_0)) + c(s)(\gamma'(s) - \gamma'(s + T_0)) + \gamma'(s + T_0) \\ &= -c'(s)v(s) - c(s)v'(s) + \gamma'(s + T_0) \end{aligned}$$

Daí, segue-se que:

$$\begin{aligned} [\bar{\gamma}'(s), \bar{\gamma}(s + T_0) - \bar{\gamma}(s)] &= [-c'(s)v(s) - c(s)v'(s) + \gamma'(s + T_0), (2c(s) - 1)v(s)] \\ &= (2c(s) - 1)[-c'(s)v(s) - c(s)v'(s) + \gamma'(s + T_0), v(s)] \\ &= (2c(s) - 1)(-c'(s)[v(s), v(s)] - c(s)[v'(s), v(s)] + [\gamma'(s + T_0), v(s)]) \\ &= (2c(s) - 1)(2ac(s) - a) \\ &= a(2c(s) - 1)^2 \end{aligned}$$

Isto é, concluímos que  $[\bar{\gamma}'(s), \bar{\gamma}(s + T_0) - \bar{\gamma}(s)] = a(2c(s) - 1)^2$ . Portanto, pelo Lema 3.6, segue-se que  $r(s)$  é uma reta bissetora para  $\bar{\gamma}(s)$  se, e somente se,  $c$  for uma constante. E isto prova o Teorema. ■

## 4

### Polígonos de meia-área

Neste capítulo iremos dar continuidade ao estudo de envoltórias de retas bissetoras. Entretanto, não iremos continuar o estudo sobre curvas planas, mas sim sobre polígonos. A partir daqui, todas as construções serão feitas com variáveis discretas, e haverá versões análogas dos resultados já vistos para variáveis contínuas. Além disso, todo polígono estará sempre orientado positivamente, isto é, no sentido anti-horário.

#### 4.1

##### Características de polígonos de meia-área

Iremos concentrar este estudo em polígonos com número par de vértices. Para isso, considere um polígono  $\gamma$  com  $2n$  vértices identificados por  $\gamma(i)$ , com  $1 \leq i \leq 2n$ . Mas antes precisamos fixar algumas definições e notações que serão utilizadas.

**Definição 4.1** *Dada uma função  $f$ , definimos aqui sua derivada discreta por*

$$f'(i + 1/2) = f(i + 1) - f(i)$$

**Observação 4.2** *O lado do polígono  $\gamma$  que une os vértices  $\gamma(i)$  e  $\gamma(i + 1)$  será denotado por  $\gamma(i + 1/2)$ . É importante observar que a notação  $\gamma(i + 1/2)$  estará sendo utilizada apenas para denotar um lado do polígono  $\gamma$ , e não possui nenhum significado matemático. Em geral, para realizar cálculos, utilizaremos a notação  $\gamma'(i + 1/2) = \gamma(i + 1) - \gamma(i)$  para representar o segmento que representa o lado do polígono.*

A partir de agora, todos os índices  $i$  cuja imagem por  $\gamma$  identificam algum vértice do polígono  $\gamma$ , serão considerados módulo  $2n$ , isto é, cada  $k \in \mathbb{Z}$  é equivalente a algum  $i \in \{1, \dots, 2n\}$ . Além disso, sempre que for mencionado um polígono  $\gamma$  (salvo menção em contrário), estaremos considerando um polígono de **meia-área, convexo e com  $2n$  vértices**. Antes de continuarmos, precisamos de algumas definições importantes.

**Definição 4.3** *Dado um polígono  $\gamma$ , chamamos de **diagonal principal** o segmento de reta que liga os vértices  $\gamma(i)$  e  $\gamma(i + n)$  e divide o polígono em duas regiões com áreas iguais. Dizemos também que  $\gamma$  é um polígono de **meia-área**.*

Observe que entre os vértices  $\gamma(i)$  e  $\gamma(i+n)$ , a diagonal principal definida acima coincide com a reta bissetora  $r(s)$  que definimos no início do capítulo anterior. Além disso, no âmbito das variáveis discretas, os vértices  $\gamma(i)$  e  $\gamma(i+n)$  são análogos (no âmbito das variáveis contínuas) aos pontos  $\gamma(s)$  e  $\gamma(s + T_0)$  conforme vimos no capítulo anterior.

**Definição 4.4** Considere um polígono  $\gamma$  e um lado  $\gamma(i + 1/2)$ . O segmento de reta que conecta os vértices  $\gamma(i)$  e  $\gamma(i + n + 1)$  e o segmento de reta que conecta os vértices  $\gamma(i + 1)$  e  $\gamma(i + n)$  são chamados de **diagonais centrais** (em relação ao lado  $\gamma(i + 1/2)$ ).

Com o objetivo de simplificar a escrita, para nos referirmos a um determinado segmento de reta que conecta dois pontos, digamos  $A$  e  $B$ , usaremos a notação  $\overline{AB}$ .

O Teorema abaixo apresenta uma caracterização importante para polígonos  $\gamma$  de meia-área.

**Teorema 4.5** Para que um polígono  $\gamma$  seja meia-área, é necessário e suficiente que, para cada lado  $\gamma(i + 1/2)$ , as diagonais centrais sejam paralelas.

*Prova.* Primeiro, vamos fixar um polígono  $\gamma$  e um de seus lados  $\gamma(i + 1/2)$ . Sabemos que  $\gamma$  é um polígono de meia-área se, e somente se, os segmentos  $\overline{\gamma(i)\gamma(i+n)}$  e  $\overline{\gamma(i+1)\gamma(i+n+1)}$  estiverem contidos em suas respectivas retas bissetoras.

Considere os triângulos  $\gamma(i)\gamma(i+1)\gamma(i+n)$  e  $\gamma(i+1)\gamma(i+n)\gamma(i+n+1)$  (veja Figura 4.1). Observe que estes triângulos possuem a mesma área e a mesma base. E isto ocorre se, e somente se, possuírem a mesma altura. O que por sua vez é equivalente a afirmar que os segmentos de reta  $\overline{\gamma(i)\gamma(i+n+1)}$  e  $\overline{\gamma(i+1)\gamma(i+n)}$  são paralelos, isto é, as diagonais centrais. ■

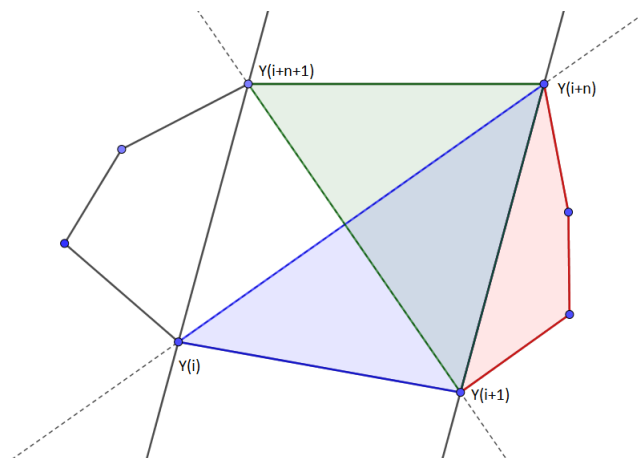


Figura 4.1: A área do triângulo em azul somada com a área em vermelho é igual a área do triângulo verde somada com a área em vermelho.

Baseado no que vimos até aqui neste capítulo, o Teorema abaixo e sua demonstração especificam detalhes de como construir um polígono de meia-área com  $2n$  vértices.

Observe a seguir que o algoritmo de construção de um polígono  $\gamma$  é dividido em passos, e que os primeiros  $n + 1$  passos consistem em escolher livremente as duas coordenadas dos primeiros  $n + 1$  vértices ao longo do plano. Isto é, dizemos que para cada vértice  $\gamma(i)$ , com  $i \leq n + 1$ , temos **dois graus de liberdade**. Veremos também que se  $n + 1 < i \leq 2n - 1$ , então cada vértice  $\gamma(i)$  deverá ser escolhido obrigatoriamente ao longo de alguma diagonal central, e diremos nestas condições que temos **um grau de liberdade** para cada escolha. Finalmente, o vértice  $\gamma(2n)$  será um ponto fixado na interseção entre duas determinadas diagonais centrais. Este processo ficará mais claro com o próximo Teorema e com o próximo exemplo.

**Teorema 4.6** *O espaço do polígonos de meia-área com  $2n$  vértices tem grau de liberdade  $3n$ .*

*Prova.* Vamos construir um polígono  $\gamma$  de meia-área com  $2n$  vértices. Primeiro, podemos escolher de forma arbitrária os primeiros  $n + 1$  vértices ao longo do plano euclidiano. Para cada vértice  $\gamma(i)$ ,  $i \in \{1, \dots, n, n + 1\}$ , temos dois graus de liberdade, então no total até aqui, teremos  $2n + 2$  graus de liberdade. Assim, o vértice  $\gamma(n + 2)$  precisa estar no segmento que passa pelo vértice  $\gamma(1)$  e é paralelo ao segmento  $\overline{\gamma(2)\gamma(n + 1)}$ . Observe que o vértice  $\gamma(n + 2)$  está posicionado no segmento  $\overline{\gamma(i)\gamma(i + n + 1)}$ ,  $i = 1$ , que é uma diagonal central, a qual é paralela à diagonal  $\overline{\gamma(i + 1)\gamma(i + n)}$ . Isto contabiliza mais um grau de liberdade, pois  $\gamma(n + 2)$  está fixo neste segmento.

Observe que, de forma generalizada, para um  $k \in \{2, \dots, n - 1\}$  qualquer, podemos definir indutivamente: o vértice  $\gamma(n + k)$  pertence ao segmento que passa pelo vértice  $\gamma(k - 1)$  e é paralelo ao segmento  $\overline{\gamma(k)\gamma(n + k - 1)}$ , e possui  $n - 3$  graus de liberdade. Note que, pela forma que construímos, para cada  $k \in \{2, \dots, n - 1\}$ , o vértice  $\gamma(n + k)$  estará sempre na diagonal central que é paralela à diagonal central  $\overline{\gamma(k)(n + k - 1)}$ .

Resta completarmos o polígono  $\gamma$  com o vértice  $\gamma(2n)$ . Este último estará obrigatoriamente fixado na interseção entre dois segmentos de retas: o segmento que passa pelo vértice  $\gamma(n - 1)$  e é paralelo ao segmento  $\overline{\gamma(n)\gamma(2n - 1)}$ ; e o segmento que passa pelo vértice  $\gamma(n + 1)$  e é paralelo ao segmento  $\overline{\gamma(1)\gamma(n)}$ . Isto faz com que o último vértice seja unicamente determinado por um ponto, o que não contabiliza graus de liberdade.

Observe que por construção, podemos concluir pelo Teorema 4.5 que o polígono  $\gamma$  é de meia-área. ■

Iremos agora exibir um exemplo de construção de um polígono de meia-área, conforme o algoritmo dado na demonstração do Teorema 4.6.

**Exemplo 4.7** *Vamos escolher  $n = 5$ . Podemos escolher arbitrariamente os pontos  $\gamma(i)$ , com  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Agora, o vértice  $\gamma(7)$  está na reta paralela ao segmento  $\overline{\gamma(2)\gamma(6)}$  e que passa pelo vértice  $\gamma(1)$ . O vértice  $\gamma(8)$  está na reta paralela ao segmento  $\overline{\gamma(3)\gamma(7)}$  e que passa pelo vértice  $\gamma(2)$ . O vértice  $\gamma(9)$  está na reta paralela ao segmento  $\overline{\gamma(4)\gamma(8)}$  e que passa pelo vértice  $\gamma(3)$ . E finalmente, o vértice  $\gamma(10)$  está na interseção entre as retas: paralela ao segmento  $\overline{\gamma(5)\gamma(9)}$  e que passa pelo vértice  $\gamma(4)$ , e uma outra paralela ao segmento  $\overline{\gamma(1)\gamma(5)}$  que passa pelo vértice  $\gamma(6)$ . Feito isso, basta conectar os vértices por segmentos de reta para obter o polígono de 10 lados.*

A figura abaixo ilustra a construção deste polígono.

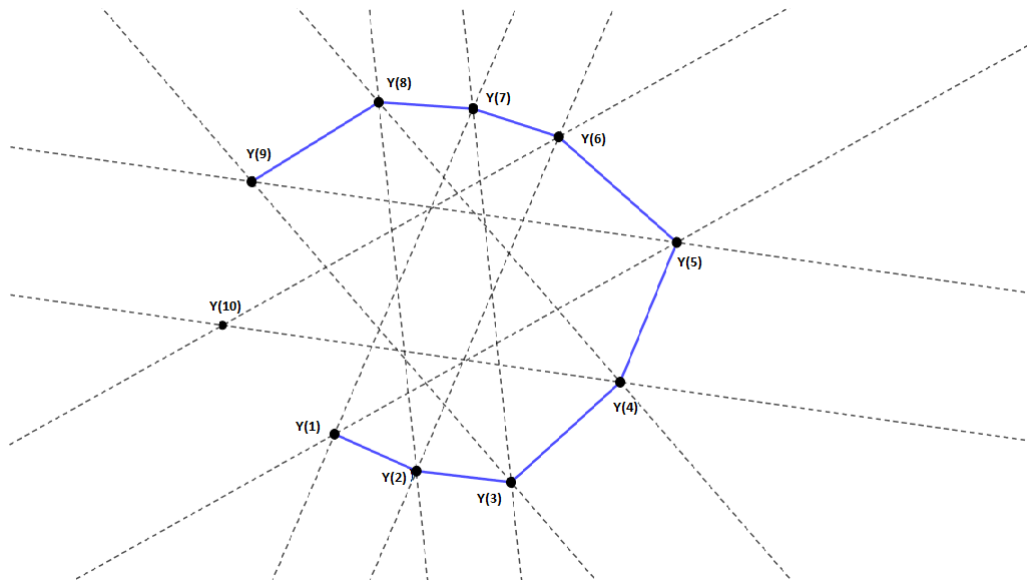


Figura 4.2: Decágono de meia-área. As retas tracejadas foram utilizadas na construção do polígono

Veja na figura acima que, de fato, todas as diagonais centrais são paralelas, conforme o Teorema 4.5. Abaixo temos exemplos de polígonos de meia-área obtidos pelo algoritmo do Teorema 4.6. Observe ainda que cada polígono está com sua família de retas bissetoras.



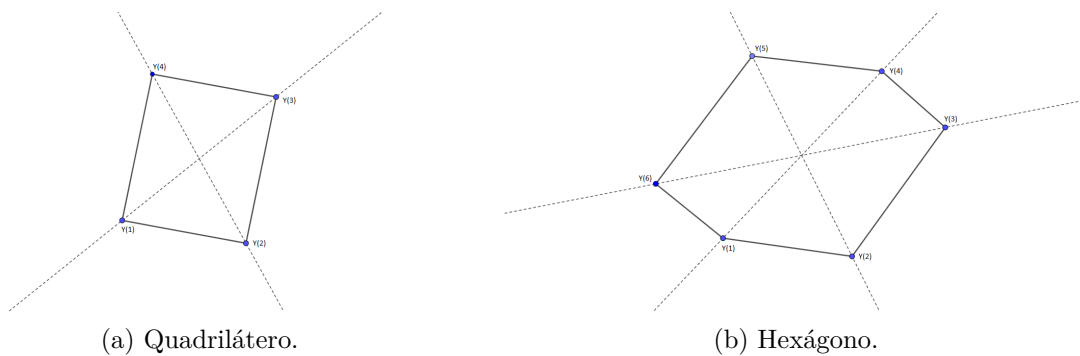


Figura 4.3: Polígonos de meia-área e suas retas bissetoras.

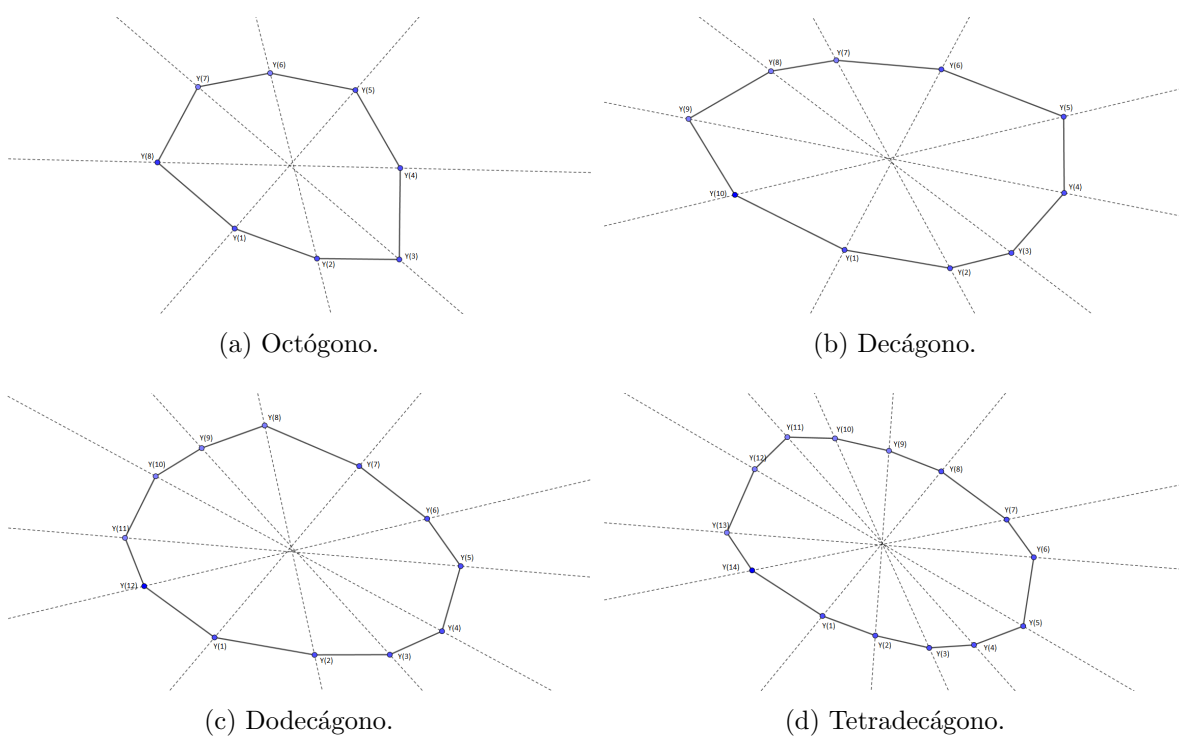


Figura 4.4: Polígonos de meia-área e suas retas bissetoras.

## 4.2 Relações em polígonos de meia-área

Dado um polígono  $\gamma$ , da mesma maneira que fizemos no capítulo anterior, vamos definir o campo de vetores:

$$v(i) = \gamma(i + n) - \gamma(i)$$

Agora, para o mesmo polígono  $\gamma$  fixado acima, vamos definir as seguintes funções:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^+ : \{1, \dots, 2n\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ i &\longmapsto \mathcal{A}^+(i + 1/2) \end{aligned} \tag{4-1}$$

onde  $\mathcal{A}^+(i + 1/2) = [\gamma'(i + 1/2), v(i)]$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^- : \{1, \dots, 2n\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ i &\longmapsto \mathcal{A}^-(i + 1/2) \end{aligned} \tag{4-2}$$

onde  $\mathcal{A}^-(i + 1/2) = [\gamma'(i + 1/2), v(i + 1)]$ .

$$\begin{aligned} \delta : \{1, \dots, 2n\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ i &\longmapsto \delta(i + 1/2) \end{aligned} \tag{4-3}$$

onde  $\delta(i + 1/2) = [\gamma'(i + 1/2), \gamma'(i + n + 1/2)]$ . Com o objetivo de simplificar os cálculos, vamos considerar a seguinte notação:

$$\mathcal{A}(i + 1/2) = \mathcal{A}^+(i + 1/2) + \mathcal{A}^-(i + 1/2) \tag{4-4}$$

Observe na figura abaixo o significado geométrico das funções  $\mathcal{A}^+$  e  $\mathcal{A}^-$ . Note que  $\mathcal{A}^+$  fornece o valor do dobro da área do polígono em azul, e  $\mathcal{A}^-$  fornece o valor do dobro da área do polígono em vermelho.

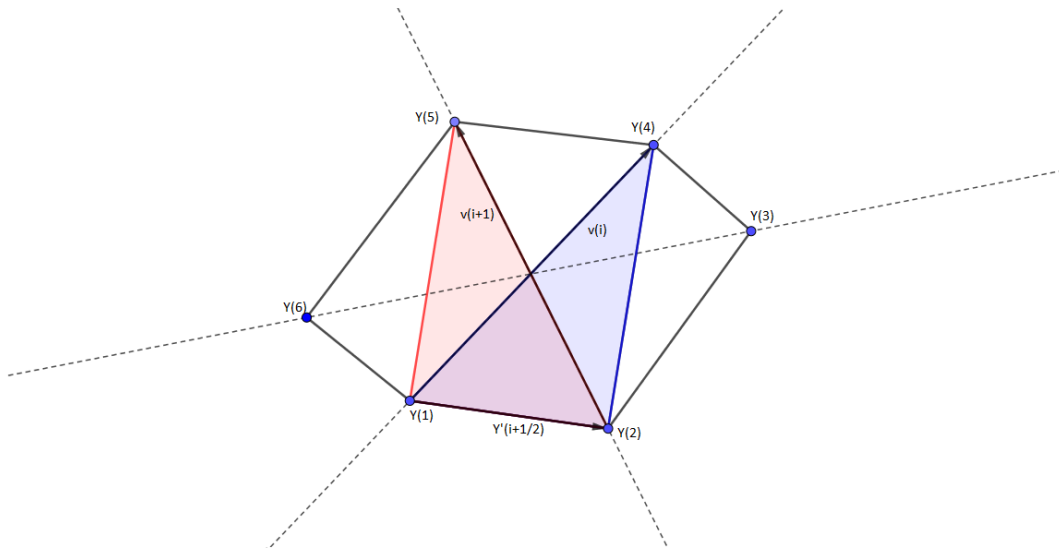


Figura 4.5: Significado geométrico de  $\mathcal{A}^+$  e  $\mathcal{A}^-$  para  $i = 1$  e  $n = 3$ .

**Observação 4.8** Para qualquer polígono  $\gamma$ , note que as seguintes igualdades são válidas para cada  $i \in \{1, \dots, 2n\}$ :

1.  $\mathcal{A}^+(i + 1/2) = \mathcal{A}^-(i + n + 1/2)$ .
2.  $\mathcal{A}^-(i + 1/2) = \mathcal{A}^+(i + n + 1/2)$ .

De fato, as figuras abaixo exemplificam o porquê de as igualdades (1) e (2) da Observação 4.8 serem verdadeiras. Note que na Figura 4.6, temos em azul a representação do polígono cuja área é a metade de  $\mathcal{A}^+(i + 1/2)$  e em vermelho temos o polígono cuja área é a metade de  $\mathcal{A}^-(i + n + 1/2)$ . E analogamente na Figura 4.7 em vermelho temos a representação de metade de  $\mathcal{A}^-(i + 1/2)$  e em verde, a metade de  $\mathcal{A}^+(i + n + 1/2)$ , para  $i = 1$  e  $n = 3$ .

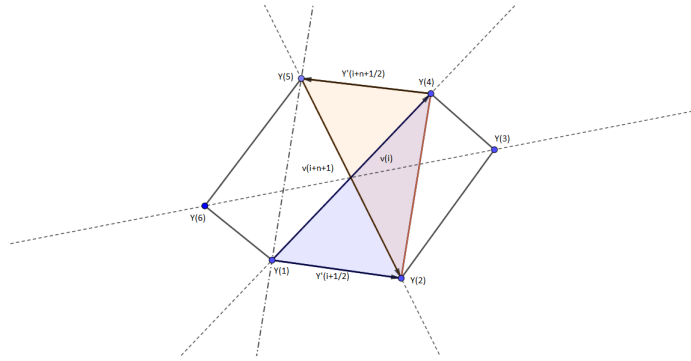


Figura 4.6:  $\mathcal{A}^+(i + 1/2) = \mathcal{A}^-(i + n + 1/2)$ .

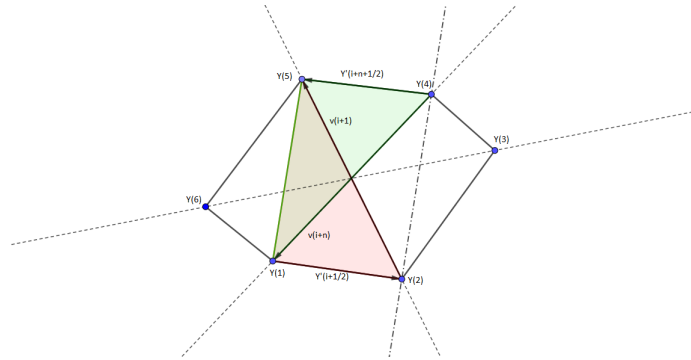


Figura 4.7:  $\mathcal{A}^-(i + 1/2) = \mathcal{A}^+(i + n + 1/2)$ .

Os próximos Lemas estabelecem relações algébricas importantes para polígonos  $\gamma$  de meia-área e as funções  $\mathcal{A}^+$ ,  $\mathcal{A}^-$  e  $\delta$  definidas acima.

**Lema 4.9** *Dado um polígono  $\gamma$ , as seguintes relações são verdadeiras para todo  $i \in \{1, \dots, 2n\}$ :*

1.  $[\gamma'(i + 1/2), v'(i + 1/2)] = \delta(i + 1/2)$ .
2.  $\mathcal{A}^-(i + 1/2) - \mathcal{A}^+(i + 1/2) = \delta(i + 1/2)$ .
3.  $[v(i), v'(i + 1/2)] = [v(i + 1), v'(i + 1/2)] = [v(i), v(i + 1)] = \mathcal{A}(i + 1/2)$ .

*Prova.* Vamos mostrar cada item separadamente.

1. Basta observar que:

$$\begin{aligned}
 [\gamma'(i + 1/2), v'(i + 1/2)] &= [\gamma'(i + 1/2), v(i + 1) - v(i)] \\
 &= [\gamma'(i + 1/2), \gamma'(i + n + 1/2) - \gamma'(i + 1/2)] \\
 &= [\gamma'(i + 1/2), \gamma'(i + n + 1/2)] + [\gamma'(i + 1/2), -\gamma'(i + 1/2)] \\
 &= [\gamma'(i + 1/2), \gamma'(i + n + 1/2)] \\
 &= \delta(i + 1/2)
 \end{aligned}$$

2. Temos que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}^+(i + 1/2) + \delta(i + 1/2) &= [\gamma'(i + 1/2), v(i)] + [\gamma'(i + 1/2), \gamma'(i + n + 1/2)] \\
 &= [\gamma'(i + 1/2), v(i) + \gamma'(i + n + 1/2)] \\
 &= [\gamma'(i + 1/2), \gamma(i + n) - \gamma(i) + \gamma(i + n + 1) - \gamma(i + n)] \\
 &= [\gamma'(i + 1/2), v(i + 1) + \gamma'(i + 1/2)] \\
 &= [\gamma'(i + 1/2), v(i + 1)] + [\gamma'(i + 1/2), \gamma'(i + 1/2)] \\
 &= [\gamma'(i + 1/2), v(i + 1)] \\
 &= \mathcal{A}^-(i + 1/2)
 \end{aligned}$$

Logo,  $\mathcal{A}^+(i + 1/2) + \delta(i + 1/2) = \mathcal{A}^-(i + 1/2)$ , e portanto, segue-se que:

$$\mathcal{A}^-(i + 1/2) - \mathcal{A}^+(i + 1/2) = \delta(i + 1/2)$$

3. Primeiro, observe que:

$$[v(i), v'(i+1/2)] = [v(i), v(i+1)-v(i)] = [v(i), v(i+1)] - [v(i), v(i)] = [v(i), v(i+1)]$$

e que

$$[v(i+1), v'(i+1/2)] = [v(i+1), v(i+1)-v(i)] = [v(i+1), v(i+1)] - [v(i+1), v(i)] = [v(i), v(i+1)]$$

donde concluimos que:

$$[v(i), v'(i + 1/2)] = [v(i + 1), v'(i + 1/2)] = [v(i), v(i + 1)].$$

Observe ainda que:  $v(i+n) = \gamma(i+2n) - \gamma(i+n) = \gamma(i) - \gamma(i+n) = -v(i)$ .

Daí, temos que:

$$\begin{aligned}
[v(i), v'(i + 1/2)] &= [v(i), \gamma'(i + n + 1/2) - \gamma(i + n) - \gamma(i + 1) + \gamma(i)] \\
&= [v(i), \gamma'(i + n + 1/2) - \gamma'(i + 1/2)] \\
&= [v(i), \gamma'(i + n + 1/2)] + [v(i), -\gamma'(i + 1/2)] \\
&= [\gamma'(i + n + 1/2), v(i + n)] + [\gamma'(i + 1/2), v(i)] \\
&= \mathcal{A}^+(i + n + 1/2) + \mathcal{A}^+(i + 1/2) \\
&= \mathcal{A}^-(i + 1/2) + \mathcal{A}^+(i + 1/2) \\
&= \mathcal{A}(i + 1/2)
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos o que queríamos:

$$[v(i), v'(i + 1/2)] = [v(i + 1), v'(i + 1/2)] = [v(i), v(i + 1)] = \mathcal{A}(i + 1/2).$$

■

**Lema 4.10** *Dado um polígono  $\gamma$ , para todo  $i \in \{1, \dots, 2n\}$ , podemos obter o vetor  $v'(i + 1/2)$  como a seguinte combinação linear:*

$$v'(i + 1/2) = \alpha_1 v(i) + \beta_1 \gamma'(i + 1/2) = \alpha_2 v(i + 1) + \beta_2 \gamma'(i + 1/2)$$

$$\text{onde } \alpha_1 = \frac{\delta(i + 1/2)}{\mathcal{A}^+(i + 1/2)}, \beta_1 = -\frac{\mathcal{A}(i + 1/2)}{\mathcal{A}^+(i + 1/2)}, \alpha_2 = \frac{\delta(i + 1/2)}{\mathcal{A}^-(i + 1/2)} \text{ e } \beta_2 = -\frac{\mathcal{A}(i + 1/2)}{\mathcal{A}^-(i + 1/2)}.$$

*Prova.* Sendo  $v'(i + 1/2) = \alpha_1 v(i) + \beta_1 \gamma'(i + 1/2)$ , para determinarmos o coeficiente  $\alpha_1$ , basta calcularmos:

$$\begin{aligned}
[\gamma'(i + 1/2), v'(i + 1/2)] &= [\gamma'(i + 1/2), \alpha_1 v(i) + \beta_1 \gamma'(i + 1/2)] \\
&= \beta_1 [\gamma'(i + 1/2), \gamma'(i + 1/2)] + \alpha_1 [\gamma'(i + 1/2), v(i)] \\
&= \alpha_1 \mathcal{A}^+(i + 1/2)
\end{aligned}$$

Mas por outro lado, usando o Lema 4.9 obtemos:  $[\gamma'(i + 1/2), v'(i + 1/2)] = \delta(i + 1/2)$ . Logo:

$$\alpha_1 = \frac{\delta(i + 1/2)}{\mathcal{A}^+(i + 1/2)}$$

Para determinarmos o coeficiente  $\beta_1$ , basta calcularmos:

$$\begin{aligned}
[v'(i + 1/2), v(i)] &= [\alpha_1 v(i) + \beta_1 \gamma'(i + 1/2), v(i)] \\
&= \alpha_1 [v(i), v(i)] + \beta_1 [\gamma'(i + 1/2), v(i)] \\
&= \beta_1 \mathcal{A}^+(i + 1/2)
\end{aligned}$$

Mas por outro lado, novamente pelo Lema 4.9:  $[v'(i+1/2), v(i)] = -\mathcal{A}(i+1/2)$ .

Logo:

$$\beta_1 = -\frac{\mathcal{A}(i+1/2)}{\mathcal{A}^+(i+1/2)}$$

De forma análoga, podemos determinar os demais coeficientes. Para  $\alpha_2$ , temos:

$$\begin{aligned} [\gamma'(i+1/2), v'(i+1/2)] &= [\gamma'(i+1/2), \alpha_2 v(i+1) + \beta_2 \gamma'(i+1/2)] \\ &= \alpha_2 [\gamma'(i+1/2), v(i+1)] \\ &= \alpha_2 \mathcal{A}^-(i+1/2) \end{aligned}$$

Novamente pelo Lema 4.9,  $[\gamma'(i+1/2), v'(i+1/2)] = \delta(i+1/2)$ , e portando

$$\alpha_2 = \frac{\delta(i+1/2)}{\mathcal{A}^-(i+1/2)}$$

O cálculo para determinar  $\beta_2$  é idêntico. Portanto, segue-se que:

$$v'(i+1/2) = \frac{\delta(i+1/2)}{\mathcal{A}^+(i+1/2)} v(i) - \frac{\mathcal{A}(i+1/2)}{\mathcal{A}^+(i+1/2)} \gamma'(i+1/2) \quad (4-5)$$

ou

$$v'(i+1/2) = \frac{\delta(i+1/2)}{\mathcal{A}^-(i+1/2)} v(i) - \frac{\mathcal{A}(i+1/2)}{\mathcal{A}^-(i+1/2)} \gamma'(i+1/2) \quad (4-6)$$

como queríamos demonstrar. ■

## 5 Envoltórias de retas bissetoras em polígonos

Neste capítulo iremos continuar o estudo sobre polígonos de meia-área iniciado no capítulo anterior. Entretanto, agora iremos introduzir o conceito de envoltória para retas bissetoras de tais polígonos. Existem diversas noções de envoltórias neste caso discreto, todavia, nesta dissertação, iremos estudar três tipos, os quais iremos denotar por  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{H}$ . Ao longo do capítulo, iremos estudar as propriedades destas envoltórias, e além disso, iremos estabelecer importantes relações entre elas.

Observe que alguns resultados que serão estudados aqui são versões análogas de resultados já estudados anteriormente, porém aqui, nosso foco está em variáveis discretas.

### 5.1 Os conjuntos $\mathcal{E}$ , $\mathcal{M}$ e $\mathcal{H}$

Primeiro, lembre que  $\gamma$  sempre irá representar um polígono de meia-área com  $2n$  vértices (salvo menção em contrário). Sendo assim, fixemos  $\gamma$ , e definimos a seguinte função:

$$F: \mathbb{R}^2 \times \{1, \dots, 2n\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, i) \longmapsto [(x, y) - \gamma(i), v(i)]$$

De maneira análoga ao que vimos anteriormente, a função  $F$  associa cada ponto  $(x, y)$  no plano e cada  $i \in \{1, \dots, 2n\}$ , ao dobro do valor da área do polígono em azul representado na figura abaixo:

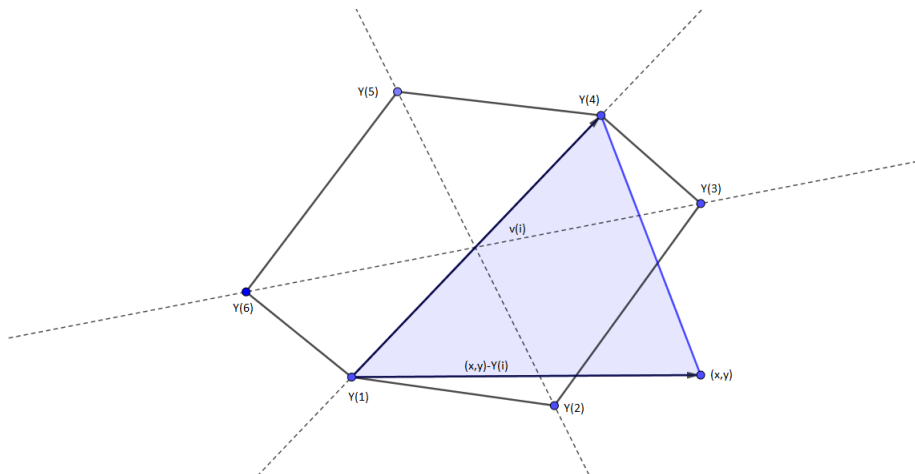


Figura 5.1: Significado geométrico da função  $F$ , onde  $i = 1$ , e  $n = 3$ .

Vamos calcular agora a derivada de  $F$  em relação a variável discreta  $i$ . Temos que:

$$\begin{aligned}
F'(x, y, i + 1/2) &= F(x, y, i + 1) - F(x, y, i) \\
&= [(x, y) - \gamma(i + 1), v(i + 1)] - [(x, y) - \gamma(i), v(i)] \\
&= [(x, y) - \gamma(i + 1), v'(i + 1/2) + v(i)] - [(x, y) - \gamma(i + 1) + \gamma'(i + 1/2), v(i)] \\
&= [(x, y) - \gamma(i + 1), v'(i + 1/2)] + [(x, y) - \gamma(i + 1), v(i)] - \\
&\quad ([(x, y) - \gamma(i + 1), v(i)] + [\gamma'(i + 1/2), v(i)]) \\
&= [(x, y) - \gamma(i + 1), v'(i + 1/2)] - [\gamma'(i + 1/2), v(i)]
\end{aligned}$$

De forma análoga, podemos obter também:

$$\begin{aligned}
F'(x, y, i + 1/2) &= F(x, y, i + 1) - F(x, y, i) \\
&= [(x, y) - \gamma(i + 1), v(i + 1)] - [(x, y) - \gamma(i), v(i)] \\
&= [(x, y) - \gamma(i) - \gamma'(i + 1/2), v(i + 1)] - [(x, y) - \gamma(i), v(i + 1) - v'(i + 1/2)] \\
&= [(x, y) - \gamma(i), v(i + 1)] + [-\gamma'(i + 1/2), v(i + 1)] - \\
&\quad ([(x, y) - \gamma(i), v(i + 1)] + [(x, y) - \gamma(i), -v'(i + 1/2)]) \\
&= [(x, y) - \gamma(i), v'(i + 1/2)] - [\gamma'(i + 1/2), v(i + 1)]
\end{aligned}$$

Assim, temos então que:

$$F'(x, y, i + 1/2) = [(x, y) - \gamma(i + 1), v'(i + 1/2)] - [\gamma'(i + 1/2), v(i)] \quad (5-1)$$

ou de forma equivalente:

$$F'(x, y, i + 1/2) = [(x, y) - \gamma(i), v'(i + 1/2)] - [\gamma'(i + 1/2), v(i + 1)] \quad (5-2)$$

Pela forma que definimos a função  $F$ , a equação da reta bissetora que passa pelo vértice  $\gamma(i)$  é dada por

$$F(x, y, i) = 0 \quad (5-3)$$

Isto é, a reta bissetora que passa por  $\gamma(i)$  nada mais é do que a pré-imagem de zero pela  $F$ , ou seja:

$$F^{-1}(0) = \{(x, y, i) \in \mathbb{R}^2 \times \{1, \dots, 2n\} \mid F(x, y, i) = 0\}$$

Observe ainda que a Equação (5-3) é equivalente ao fato de os vetores  $(x, y) - \gamma(i)$  e  $v(i)$  serem linearmente dependentes. O que, por sua vez, é equivalente a existência de uma função  $\mu$  que associa cada  $i \in \{1, \dots, 2n\}$  a um número real  $\mu(i)$  tal que:

$$(x, y) = \gamma(i) + \mu(i)v(i) \quad (5-4)$$



Observe também, que de forma análoga, a Equação (5-3) também é equivalente ao fato de os vetores  $(x, y) - \gamma(i+1)$  e  $v(i+1)$  serem linearmente dependentes, o que também é equivalente a existência de uma função  $\sigma(i)$  que associa cada  $i \in \{1, \dots, 2n\}$  a um número real  $\sigma(i)$  tal que:

$$(x, y) = \gamma(i+1) + \sigma(i)v(i) \quad (5-5)$$

Para determinar a envoltória, precisamos resolver  $F(x, y, i) = F'(x, y, i + 1/2) = 0$ . Substituindo-se a Equação (5-4) na Equação (5-2), obtemos:

$$\mu(i)[v(i), v'(i + 1/2)] = [\gamma'(i + 1/2), v(i + 1)]$$

Assim, usando o Lema 4.9, segue-se:

$$\mu(i) = \frac{\mathcal{A}^-(i + 1/2)}{\mathcal{A}(i + 1/2)}$$

De forma análoga, seguindo-se o mesmo raciocínio anterior, podemos substituir a Equação (5-5) na Equação (5-1) e assim temos:

$$\sigma(i)[v(i), v'(i + 1/2)] = [\gamma'(i + 1/2), v(i)]$$

Novamente, usando o Lema 4.9, segue-se que:

$$\sigma(i) = \frac{\mathcal{A}^+(i + 1/2)}{\mathcal{A}(i + 1/2)} \quad (5-6)$$

Denotaremos novamente esta envoltória por  $\mathcal{E}$ . Daí, pelo que vimos acima, um ponto  $(x, y)$  que pertence a  $\mathcal{E}$  é dado pela relação:

$$\mathcal{E}(i + 1/2) = \gamma(i) + \frac{\mathcal{A}^-(i + 1/2)}{\mathcal{A}(i + 1/2)}v(i) \quad (5-7)$$

ou

$$\mathcal{E}(i + 1/2) = \gamma(i + 1) + \frac{\mathcal{A}^+(i + 1/2)}{\mathcal{A}(i + 1/2)}v(i + 1) \quad (5-8)$$

**Observação 5.1** *Note que, geometricamente, o ponto  $\mathcal{E}(i+1/2)$  é a interseção das retas bissetoras  $r(i)$  e  $r(i+1)$ . Ao tomarmos todos estes pontos em um dado polígono  $\gamma$ , e traçarmos segmentos de retas ligando tais pontos, obtemos um novo polígono.*

**Definição 5.2** *Seja  $\gamma$  um polígono. O conjunto  $\mathcal{E}$ , o qual chamaremos de **envoltória discreta**, é o conjunto de pontos  $(x, y)$  do plano que satisfazem as Relações (5-7) e (5-8). Além disso, definimos como  $\mathcal{E}(i)$  o segmento de reta que conecta os pontos  $\mathcal{E}(i + 1/2)$  e  $\mathcal{E}(i - 1/2)$ .*

Abaixo, definimos a segunda envoltória que estudaremos aqui. Para isso, dado um polígono  $\gamma$ , considere a relação abaixo para cada  $i \in \{1, \dots, 2n\}$ , que

claramente, representa o ponto médio entre os vértices de todas as diagonais principais:

$$\mathcal{M}(i) = \frac{\gamma(i) + \gamma(i+n)}{2} \tag{5-9}$$

**Definição 5.3** *Seja  $\gamma$  um polígono. O conjunto  $\mathcal{M}$ , o qual chamaremos de **envoltória dos pontos médios**, é o conjunto dos pontos  $(x, y)$  do plano que satisfazem a Relação (5-9). Além disso, definimos como  $\mathcal{M}(i+1/2)$  o segmento de reta que conecta os pontos  $\mathcal{M}(i)$  e  $\mathcal{M}(i+1)$ .*

**Observação 5.4** *Para cada  $i \in \{1, \dots, 2n\}$ , ao conectarmos os pontos  $\mathcal{M}(i)$  e  $\mathcal{E}(i+1)$ , obtemos um outro polígono que também possui relações importantes com o polígono obtido na Observação 5.1.*

As figuras abaixo exemplificam os polígonos  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{M}$  obtidos para alguns polígonos com  $2n$  vértices. Vejamos primeiro o caso mais simples: um quadrilátero. Note que ambos os polígonos  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{M}$  se reduzem a um único ponto.

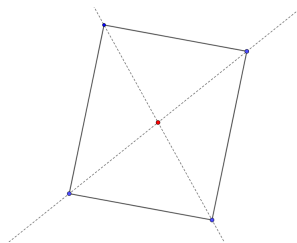


Figura 5.2: Quadrilátero: em vermelho o ponto que representa  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{M}$ .

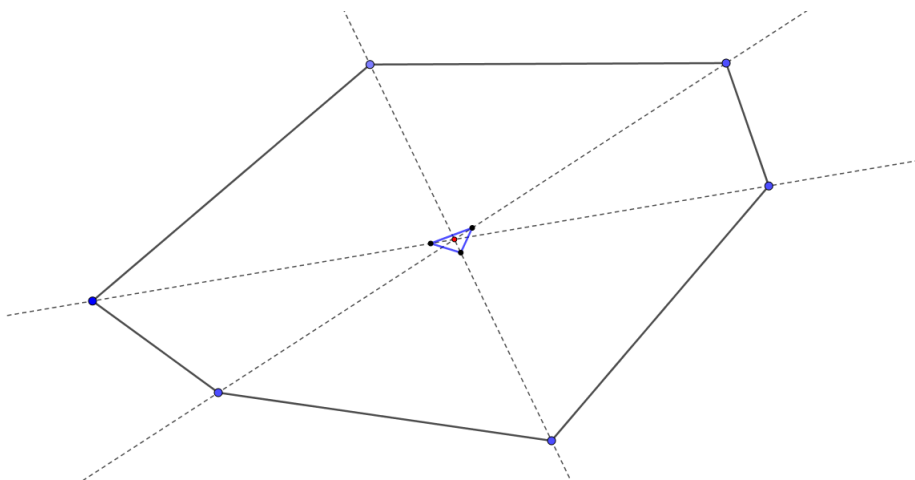


Figura 5.3: Hexágono e suas envoltórias discreta  $\mathcal{E}$  reduzida a um ponto (vermelho) e dos pontos médios  $\mathcal{M}$  (azul).

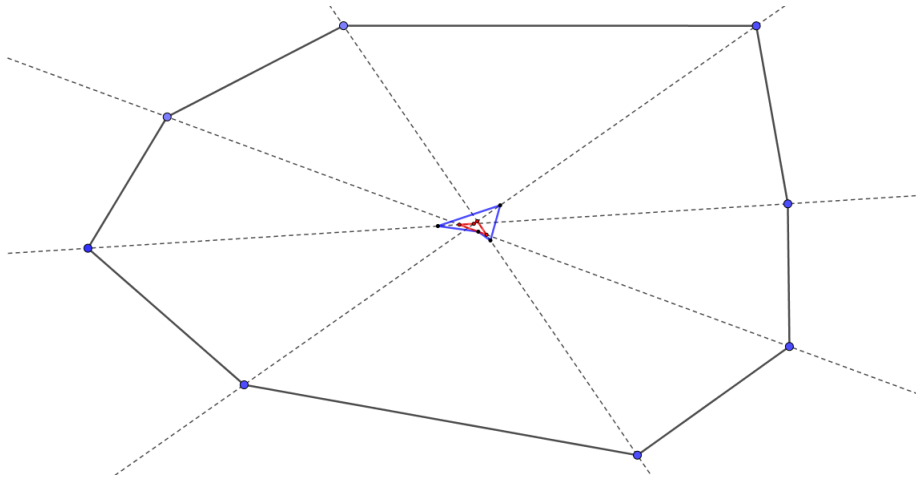


Figura 5.4: Octógono e suas envoltórias discreta  $\mathcal{E}$  (vermelho) e dos pontos médios  $\mathcal{M}$  (azul).

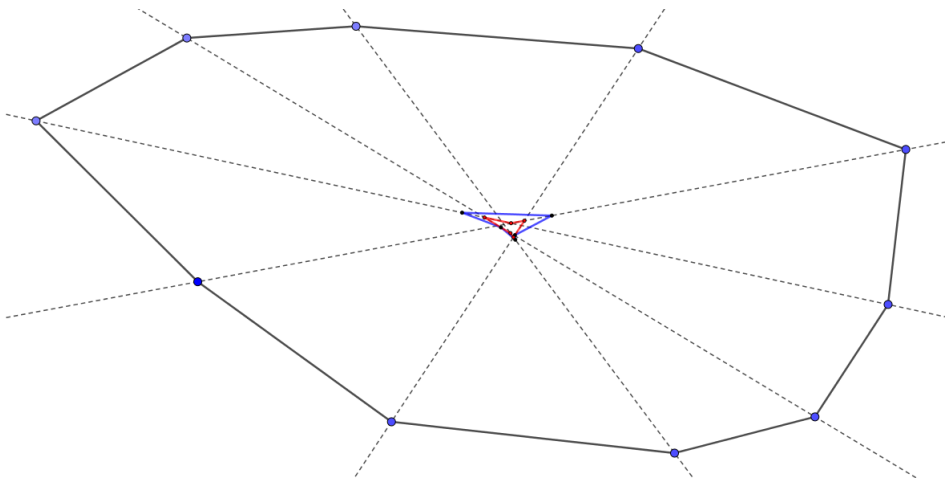


Figura 5.5: Decágono e suas envoltórias discreta  $\mathcal{E}$  (vermelho) e dos pontos médios  $\mathcal{M}$  (azul).

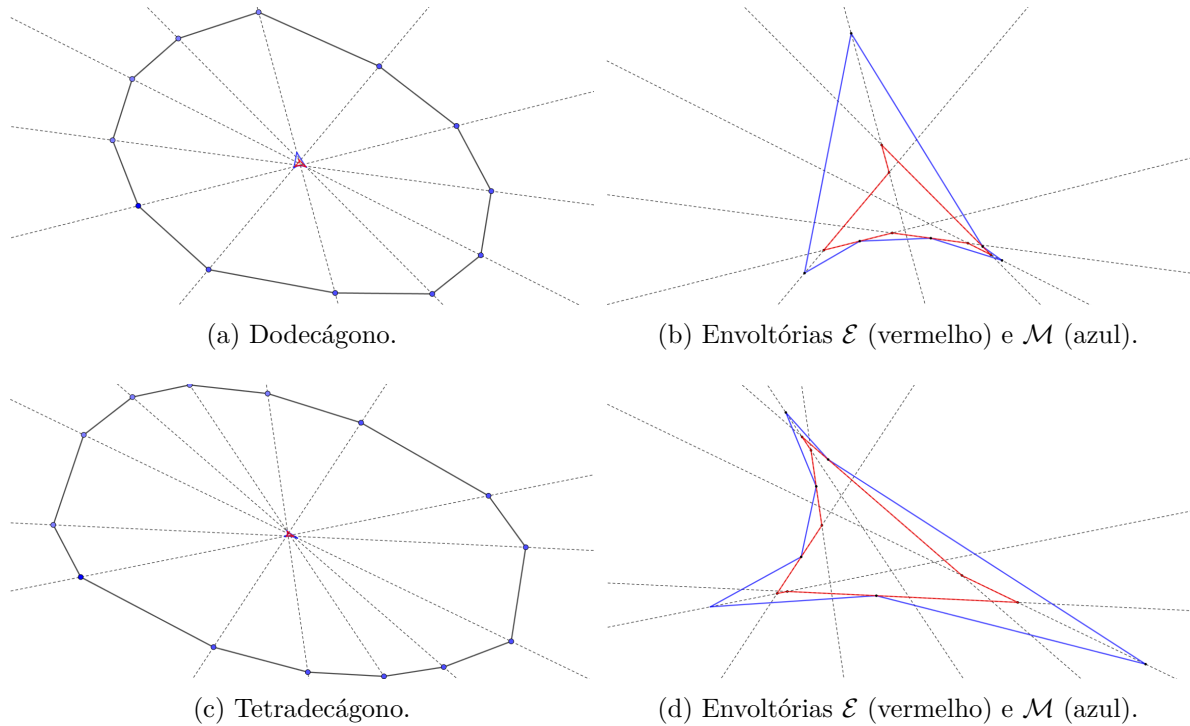


Figura 5.6: Dodecágono e Tetradeágono e suas envoltórias ampliadas.

Note que a convexidade do polígono  $\gamma$  em geral não é preservada em  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{M}$ . Note também que para curvas planas suaves, a envoltória que definimos anteriormente coincide com a envoltória dos pontos médios  $\mathcal{M}$  para polígonos. Mas para polígonos de meia-área,  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{M}$ , em geral não coincidem.

Agora, iremos introduzir uma terceira definição de envoltória para retas bissetoras de polígonos de meia-área. Entretanto, esta envoltória não se constrói apenas em retas bissetoras que passam por vértices  $\gamma(i)$ , mas sim em retas bissetoras que passam por qualquer ponto do lado  $\gamma'(i + 1/2)$  do polígono.

**Definição 5.5** Dado um polígono  $\gamma$ , definimos como **envoltória hiperbólica** de  $\gamma$ , e denotamos por  $\mathcal{H}$ , a envoltória de retas bissetoras que passam por qualquer ponto de um dado lado de  $\gamma$ , e não apenas nos vértices.

**Observação 5.6** Como esperado, denotamos por  $\mathcal{H}(i + 1/2)$  cada arco de  $\mathcal{H}$  que passa entre os pontos  $\mathcal{H}(i)$  e  $\mathcal{H}(i + 1)$ .

Com as figuras abaixo, temos exemplos de envoltórias hiperbólicas dos polígonos de meia-área exibidos anteriormente. Observe que nestes casos, o padrão seguido pelas curvas fechadas  $\mathcal{H}$  não se altera significativamente, o que veremos mais adiante, no próximo teorema, que não é por acaso.

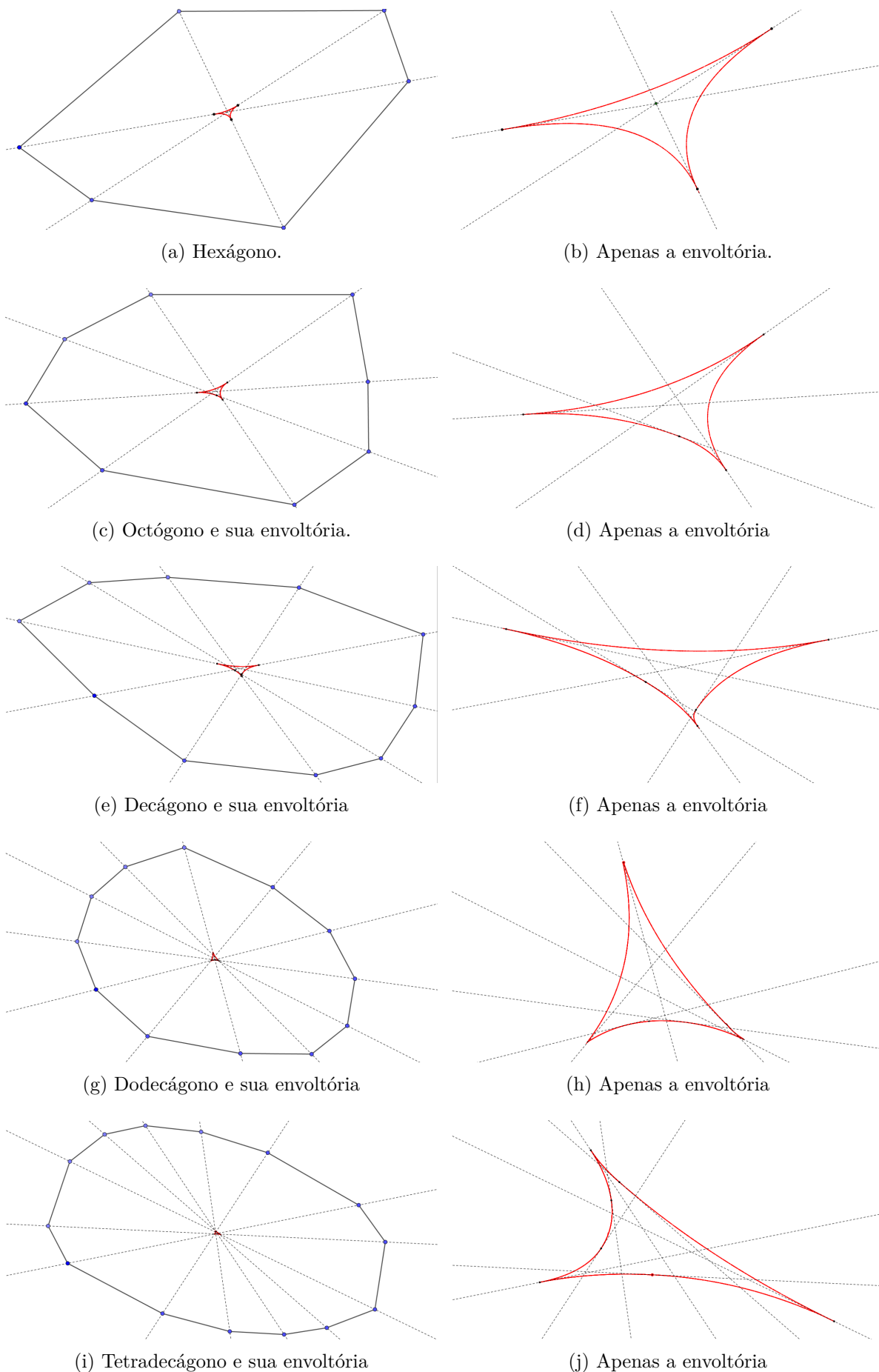


Figura 5.7: Hexágono, Octógono, Decágono, Dodecágono e Tetradecágono com suas envoltórias hiperbólicas.

**Teorema 5.7** *Dado um polígono  $\gamma$ , sua envoltória hiperbólica  $\mathcal{H}$  é a concatenação de arcos hiperbólicos  $\mathcal{H}(i + 1/2)$  que passam por  $\mathcal{M}(i)$  e  $\mathcal{M}(i + 1)$ , tangentes a  $r(i)$  e  $r(i + 1)$  nestes pontos e assintóticos às retas de suporte aos lados  $\gamma(i + 1/2)$  e  $\gamma(i + n + 1/2)$ .*

*Prova.* Fixemos um polígono  $\gamma$ , e o par de lados  $\gamma'(i+1/2)$  e  $\gamma'(i+n+1/2)$ . Para fixar as ideias, podemos supor sem perda de generalidade que este par de lados são ortogonais, e as suas retas suportes formam um sistema de coordenadas onde a origem  $(0, 0)$  é um dos vértices de  $\gamma$ . Estamos interessados na família de retas bissetoras que passam por todos os pontos dos lados  $\gamma(i + 1/2)$  e  $\gamma(i + n + 1/2)$ .

Dada uma constante real fixada  $k \neq 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , teremos a reta bissetora dada pela equação:

$$y = -\frac{k}{t^2}x + \frac{k}{t} \tag{5-10}$$

Assim, podemos definir:

$$F(x, y, t) = y + \frac{kx}{t^2} - \frac{k}{t}$$

Temos então que:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = -\frac{2kx}{t^3} + \frac{k}{t^2}$$

Para determinar o arco  $\mathcal{H}(i + 1/2)$  da envoltória  $\mathcal{H}$ , basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} F(x, y, t) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0 \end{cases}$$

De  $\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0$ , segue-se que  $t = 2x$ . Daí, substituindo-se isto em  $F(x, y, t) = 0$ , segue-se que  $xy = \frac{k}{4}$ . Isto é, o arco  $\mathcal{H}(i + 1/2)$  da envoltória hiperbólica  $\mathcal{H}$  é dada pelo seguinte conjunto de pontos:

$$\mathcal{H}(i + 1/2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = \text{constante}\}$$

Portanto,  $\mathcal{H}(i + 1/2)$  corresponde a um arco de hipérbole, e a envoltória  $\mathcal{H}$  é composta pela concatenação destes arcos. Além disso, é evidente que  $\mathcal{H}(i+1/2)$  possui comportamento assintótico às retas suporte aos lados  $\gamma'(i + 1/2)$  e  $\gamma(i + n + 1/2)$ . Observe também que para todo  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , o ponto médio da reta dada pela Equação (5-10) pertence a  $\mathcal{H}(i + 1/2)$ . Em particular, temos que  $\mathcal{H}(i + 1/2)$  passa por  $\mathcal{M}(i)$  e  $\mathcal{M}(i + 1)$ , o que prova o Teorema. ■

## 5.2

**Polígonos com simetria e simetria ímpar**

Nesta seção, iremos introduzir um importante estudo a respeito de simetria em polígonos  $\gamma$  de meia-área com  $2n$  vértices. Além disso, iremos estudar as propriedades que são consequências de tal simetria.

**Definição 5.8** *Um polígono  $\gamma$  possui simetria com respeito a um ponto  $O$ , se para cada  $i \in \{1, \dots, 2n\}$  valer a relação:*

$$O = \frac{\overline{\gamma(i)\gamma(i+n)}}{2}$$

isto é, se o ponto  $O$  for o ponto médio da diagonal principal  $\overline{\gamma(i)\gamma(i+n)}$ .

A partir da Definição 5.8, fica evidente que a condição de simetria de um polígono  $\gamma$  é equivalente ao fato de o polígono  $\mathcal{M}$  se reduzir a um ponto, que no caso é o próprio ponto  $O$  definido acima. Mais geralmente, a Definição 5.8 nos permite enunciar o seguinte lema:

**Lema 5.9** *Dado um polígono  $\gamma$ , para cada  $i \in \{1, \dots, 2n\}$ , os seguintes itens são equivalentes:*

1.  $\gamma$  é simétrico com respeito a  $O$ .
2.  $\mathcal{M} = \mathcal{H} = O$ .
3. Os segmentos de reta  $\overline{\gamma(i)\gamma(i+1)}$  e  $\overline{\gamma(i+n)\gamma(i+n+1)}$  são paralelos.
4.  $\delta(i+1/2) = 0$ .

*Prova.* A equivalência entre os itens (1) e (2) são óbvias, assim como a equivalência entre os itens (2) e (3). Já a equivalência entre (3) e (4) decorre do fato de que  $\overline{\gamma(i)\gamma(i+1)}$  e  $\overline{\gamma(i+n)\gamma(i+n+1)}$  são paralelos se, e somente se, os vetores  $\gamma'(i+1/2)$  e  $\gamma'(i+n+1/2)$  são linearmente dependentes se, e somente se,  $\delta(i+1/2) = [\gamma'(i+1/2), \gamma'(i+n+1/2)] = 0$ . ■

Note ainda que no caso de um polígono  $\gamma$  com simetria com respeito a um ponto  $O$ , o polígono  $\mathcal{E}$  também se reduz a este ponto  $O$ . De fato, por causa da simetria, pelo Lema 5.9 temos que  $\delta(i+1/2) = 0$ . Daí, pelo Lema 4.9, concluímos que  $\mathcal{A}^+(i+1/2) = \mathcal{A}^-(i+1/2)$ . Agora, considerando-se, digamos,

a Equação (5-7), temos que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(i + 1/2) &= \gamma(i) + \frac{\mathcal{A}^-(i + 1/2)}{\mathcal{A}(i + 1/2)} v(i) \\
 &= \gamma(i) + \frac{\mathcal{A}^-(i + 1/2)}{\mathcal{A}(i + 1/2)} (\gamma(i + n) - \gamma(i)) \\
 &= \frac{(\mathcal{A}(i + 1/2) - \mathcal{A}^-(i + 1/2))\gamma(i) + \mathcal{A}^-(i + 1/2)\gamma(i + n)}{\mathcal{A}(i + 1/2)} \\
 &= \frac{\mathcal{A}^+(i + 1/2)(\gamma(i) + \gamma(i + n))}{2\mathcal{A}^+(i + 1/2)} \\
 &= \frac{\overline{\gamma(i)\gamma(i + n)}}{2} \\
 &= O
 \end{aligned}$$

Isto é,  $\mathcal{E}$  se reduz ao ponto de simetria  $O$ . Entretanto, é importante observar que a recíproca deste fato não é verdadeira. Isto é, existe polígono  $\gamma$  tal que  $\mathcal{E}$  é apenas um ponto, mas  $\gamma$  não é simétrico. Como contra-exemplo, considere a Figura 5.3.

Agora, fixado um polígono  $\gamma$ , vamos definir a função:

$$\begin{aligned}
 \lambda: \{1, \dots, 2n\} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\
 i &\longmapsto \lambda(i + 1/2)
 \end{aligned}$$

em que  $\lambda(i + 1/2) = \frac{\overline{\gamma(i + 1)\gamma(i + n)}}{\overline{\gamma(i)\gamma(i + n + 1)}}$ . Isto é,  $\lambda$  associa cada  $i$  à razão entre os comprimentos das diagonais centrais do polígono  $\gamma$ .

**Definição 5.10** Dizemos que um polígono  $\gamma$  possui **simetria ímpar**, se existir uma constante  $c \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\lambda(i + 1/2) = c$  quando  $i$  for ímpar, e  $\lambda(i + 1/2) = \frac{1}{c}$  quando  $i$  for par.

Observe abaixo o exemplo de um hexágono ( $n = 3$ ) com simetria ímpar.



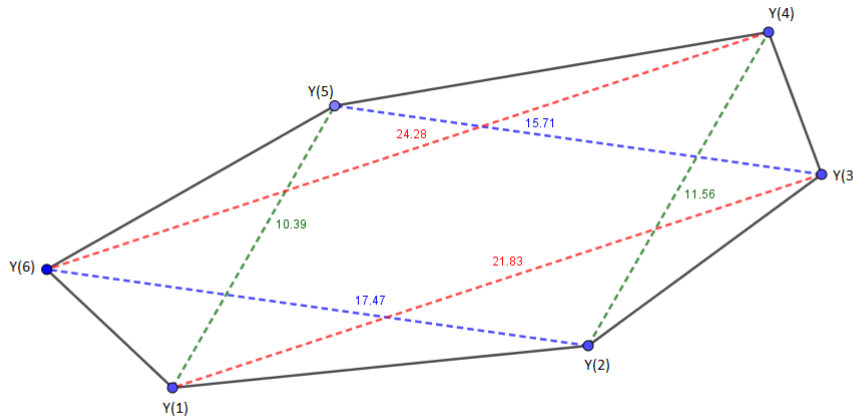


Figura 5.8: Hexágono com simetria ímpar.

Veja abaixo que no exemplo acima temos  $c = 1, 11$  quando  $i$  é ímpar:

1.  $\lambda(1 + 1/2) = \frac{\overline{\gamma(2)\gamma(4)}}{\overline{\gamma(1)\gamma(5)}} = \frac{11, 56}{10, 39} = 1, 11.$
2.  $\lambda(2 + 1/2) = \frac{\overline{\gamma(3)\gamma(5)}}{\overline{\gamma(2)\gamma(6)}} = \frac{15, 71}{17, 47} = 0, 90.$
3.  $\lambda(3 + 1/2) = \frac{\overline{\gamma(4)\gamma(6)}}{\overline{\gamma(3)\gamma(1)}} = \frac{24, 28}{21, 83} = 1, 11.$
4.  $\lambda(4 + 1/2) = \frac{\overline{\gamma(5)\gamma(1)}}{\overline{\gamma(4)\gamma(2)}} = \frac{1}{\lambda(1 + 1/2)} = 0, 90.$
5.  $\lambda(5 + 1/2) = \frac{\overline{\gamma(6)\gamma(2)}}{\overline{\gamma(5)\gamma(3)}} = \frac{1}{\lambda(2 + 1/2)} = 1, 11.$
6.  $\lambda(6 + 1/2) = \frac{\overline{\gamma(1)\gamma(3)}}{\overline{\gamma(6)\gamma(4)}} = \frac{1}{\lambda(3 + 1/2)} = 0, 90.$

Uma outra caracterização interessante para polígonos com simetria é descrita na observação abaixo:

**Observação 5.11** *Para que um polígono  $\gamma$  tenha simetria é necessário e suficiente que tenhamos a constante real  $c = 1$ . Este fato segue diretamente do Lema 5.9. Observe ainda que se  $c \neq 1$ , e  $\gamma$  tiver simetria ímpar, então necessariamente  $n$  é ímpar. De fato, suponhamos que  $n$  seja par, e fixemos um  $i \in \{1, \dots, 2n\}$  ímpar. Assim, decorre da Definição 5.10 que:*

1.  $\lambda(i + 1/2) = \frac{\overline{\gamma(i+1)\gamma(i+n)}}{\overline{\gamma(i)\gamma(i+n+1)}} = c$

$$2. \lambda(i+n+1/2) = \frac{\overline{\gamma(i+n+1)\gamma(i+2n)}}{\overline{\gamma(i+n)\gamma(i+2n+1)}} = \frac{\overline{\gamma(i+n+1)\gamma(i)}}{\overline{\gamma(i+n)\gamma(i+1)}} = c$$

Mas por outro lado, temos que  $c = \lambda(i+1/2) = \lambda(i+n+1/2) = \frac{1}{\lambda(i+1/2)} = \frac{1}{c}$ , o que é uma contradição, pois estamos considerando  $c \neq 1$ , o que mostra que  $n$  deverá ser ímpar.

Os resultados que enunciaremos abaixo também descrevem uma forma de caracterizar polígonos com simetria ímpar. Esta caracterização nos permite reconhecer um polígono com simetria ímpar de maneira mais rápida e eficiente.

**Teorema 5.12** *A igualdade  $\mathcal{E}(i+1/2) = \mathcal{E}(i-1/2)$  é verdadeira se, e somente se,*

$$\lambda(i+1/2) = \frac{1}{\lambda(i-1/2)}$$

*Prova.* Observe que o ponto  $\mathcal{E}(i+1/2)$  divide as diagonais principais  $r(i)$  e  $r(i+1)$  em dois segmentos cada, digamos  $r(i)_1$  e  $r(i)_2$ ;  $r(i+1)_1$  e  $r(i+1)_2$  respectivamente. Além disso, a razão entre os comprimentos destes segmentos coincidem com  $\lambda(i+1/2)$  e  $\frac{1}{\lambda(i+1/2)}$ . Isto é:

$$\frac{r(i)_1}{r(i)_2} = \lambda(i+1/2) = \frac{\overline{\gamma(i+1)\gamma(i+n)}}{\overline{\gamma(i)\gamma(i+n+1)}} \text{ e } \frac{r(i+1)_1}{r(i+1)_2} = \frac{1}{\lambda(i+1/2)} = \frac{\overline{\gamma(i)\gamma(i+n+1)}}{\overline{\gamma(i+1)\gamma(i+n)}}$$

De forma análoga, o ponto  $\mathcal{E}(i-1/2)$  faz o mesmo com as diagonais principais  $r(i-1)$  e  $r(i)$ . Isto é, as dividem em dois segmentos cada, digamos  $r(i)_a$  e  $r(i)_b$ . Assim:

$$\frac{r(i-1)_1}{r(i-1)_2} = \lambda(i-1/2) = \frac{\overline{\gamma(i)\gamma(i+n-1)}}{\overline{\gamma(i-1)\gamma(i+n)}} \text{ e } \frac{r(i)_a}{r(i)_b} = \frac{1}{\lambda(i-1/2)} = \frac{\overline{\gamma(i-1)\gamma(i+n)}}{\overline{\gamma(i)\gamma(i+n-1)}}$$

Agora, basta observar que:  $\mathcal{E}(i+1/2) = \mathcal{E}(i-1/2)$  se, e somente se,  $r(i)_1 = r(i)_2$ ,  $r(i+1)_1 = r(i+1)_2$  e  $r(i-1)_1 = r(i-1)_2$ ,  $r(i)_a = r(i)_b$ . O que por sua vez, é equivalente a:

$$\lambda(i+1/2) = 1 \text{ e } \frac{1}{\lambda(i-1/2)} = 1$$

Portanto,  $\lambda(i+1/2) = \frac{1}{\lambda(i-1/2)}$ , como queríamos. ■

**Corolário 5.13** *Para que um polígono  $\gamma$  tenha simetria ímpar é necessário e suficiente que sua envoltória discreta  $\mathcal{E}$  se reduza a um único ponto.*

*Prova.* De fato,  $\mathcal{E}$  é um ponto se, e somente se,  $\mathcal{E}(i+1/2) = \mathcal{E}(i-1/2)$  para todo  $i \in \{1, \dots, 2n\}$ . Pelo Teorema 5.12, isto é equivalente a  $\lambda(i+1/2) = \frac{1}{\lambda(i-1/2)}$  para cada  $i \in \{1, \dots, 2n\}$ , e portanto, pela Definição 5.10,  $\gamma$  possui simetria ímpar, e segue-se o resultado. ■

O Corolário 5.13 nos permite identificar facilmente quando um polígono  $\gamma$  possui ou não simetria ímpar. Veja a figura abaixo:

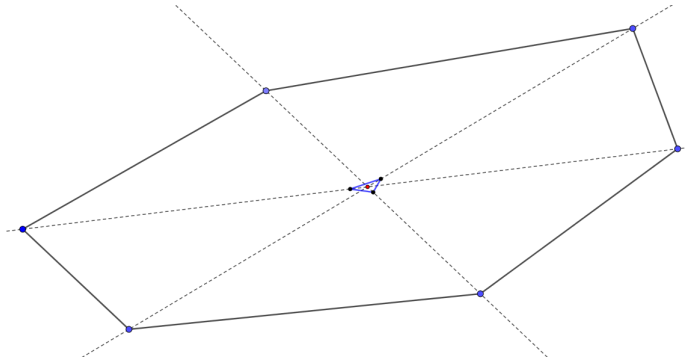


Figura 5.9: Hexágono com simetria ímpar, e sua envoltória discreta reduzida a um único ponto em vermelho.

### 5.3

#### Cúspides e vértices tangentes paralelos

Anteriormente, de forma mais específica na Definição 3.7, vimos que para curvas suaves, um *pt-vertice* ocorre quando o coeficiente  $\alpha$  da Equação (3-7) assume valor zero. Veremos abaixo que no caso de polígonos de meia-área, a definição de *pt-vertice* é parecida.

**Definição 5.14** *Dado um polígono  $\gamma$ , dizemos que  $\gamma(i)$  é um *pt-vertice* quando os coeficientes  $\alpha_1$  ou  $\alpha_2$  das combinações lineares dadas no Lema 4.10 mudam de sinal em  $i$ .*

É importante observar que no Lema 4.10, os coeficientes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são funções definidas em  $\{1, \dots, 2n\}$ , e que estas funções carregam propriedades referentes ao lado  $\gamma'(i+1/2)$  do polígono  $\gamma$ , isto é, o segmento compreendido entre os vértices  $\gamma(i)$  e  $\gamma(i+1)$ , o que justifica sua notação:

$$\alpha_1(i+1/2) = \frac{\delta(i+1/2)}{\mathcal{A}^+(i+1/2)} \text{ e } \alpha_2(i+1/2) = \frac{\delta(i+1/2)}{\mathcal{A}^-(i+1/2)}$$

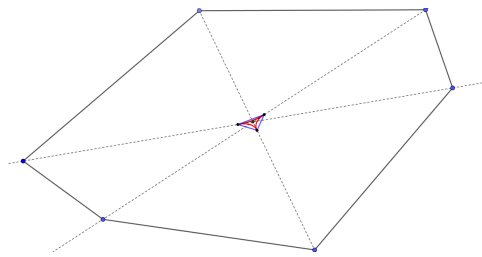
Como aqui estamos lidando com variável discreta, a expressão “mudar de sinal” na Definição 5.14 significa que estas funções assumem valores com sinais contrários em lados adjacentes de  $\gamma$ . Por exemplo, em relação ao segmento  $\gamma(i-1/2)$  poderíamos ter, digamos:  $\alpha_1(i-1/2) > 0$ . Mas em relação ao segmento adjacente  $\gamma(i+1/2)$ , teríamos  $\alpha_1(i+1/2) < 0$ .

Agora, a definição de cúspide é um pouco diferente no caso de polígonos de meia-área, conforme abaixo:

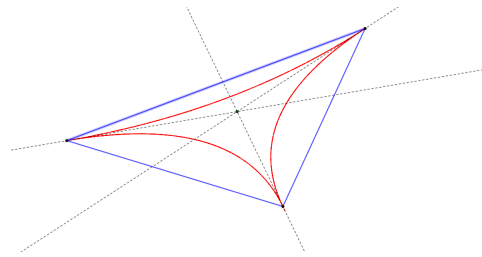
**Definição 5.15** *Um ponto  $\mathcal{M}(i)$  do polígono  $\mathcal{M}$  é um **cúspide** quando a reta bissetora  $r(i)$  separa os segmentos  $\mathcal{M}(i-1/2)$  e  $\mathcal{M}(i+1/2)$ . De modo análogo, dizemos que o ponto  $\mathcal{H}(i)$  é um **cúspide** de  $\mathcal{H}$  se a reta bissetora  $r(i)$  separa os arcos hiperbólicos  $\mathcal{H}(i-1/2)$  e  $\mathcal{H}(i+1/2)$ .*

Observe nas próximas figuras, que um cúspide  $\mathcal{M}(i)$  e  $\mathcal{H}(i)$  sempre está associado ao vértice  $\gamma(i)$ , em que neste caso particular, recebe o nome de *pt – vertice* conforme a Definição 5.14. Entretanto, nem sempre um vértice  $\gamma(i)$  estará associado a algum cúspide de  $\mathcal{M}$  ou  $\mathcal{H}$ .

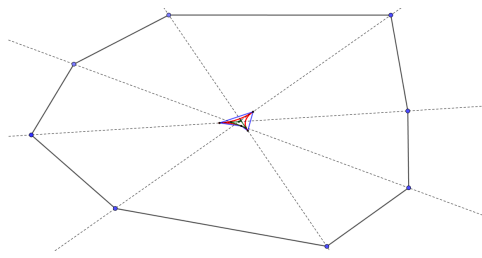
As próximas figuras exibem as envoltórias  $\mathcal{H}$  em vermelho,  $\mathcal{M}$  em azul e  $\mathcal{E}$  em verde. Note que às vezes uma envoltória intercepta a outra. Estes padrões obtidos com estas figuras são explicados e generalizados pelos próximos resultados que veremos.



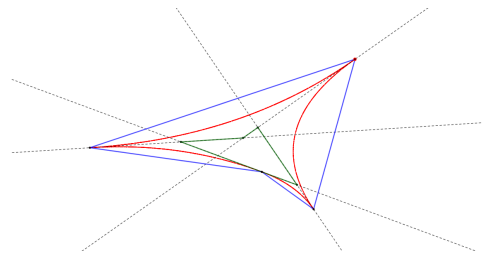
(a) Hexágono e suas envoltórias.



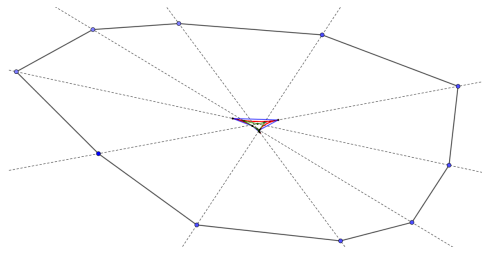
(b) Apenas as envoltórias.



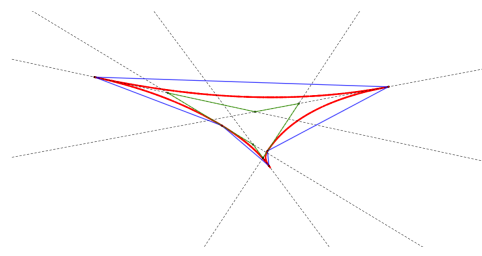
(c) Octógono e suas envoltórias.



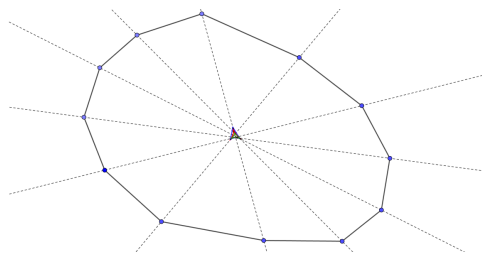
(d) Apenas as envoltórias.



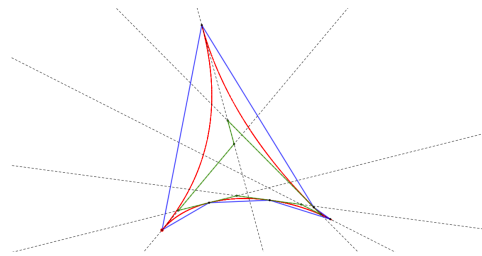
(e) Decágono e suas envoltórias.



(f) Apenas as envoltórias.



(g) Dodecágono e suas envoltórias.



(h) Apenas as envoltórias.

Figura 5.10: Hexágono, Octógono, Decágono e Tetradecágono com suas envoltórias  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{E}$ .

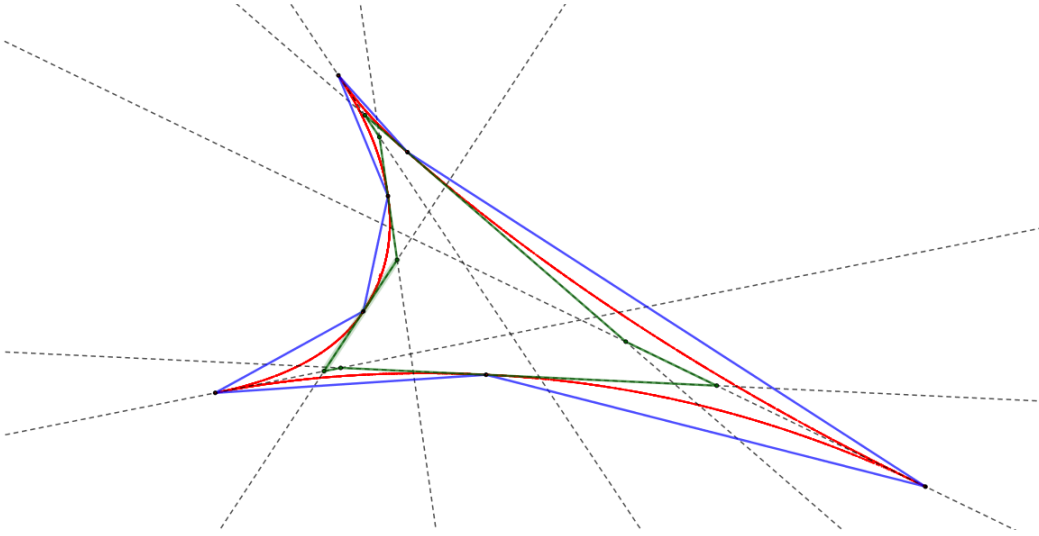


Figura 5.11: Envoltórias do Tetradeágono.

O Lema abaixo nos dá uma caracterização algébrica importante de  $pt - vertice$  em termos da função  $\delta$  definida em  $\{1, \dots, 2n\}$ .

**Lema 5.16** *Dado um polígono  $\gamma$ , temos que  $\gamma(i)$  é um  $pt - vertice$  se, e somente se,  $\delta(i - 1/2) \cdot \delta(i + 1/2) < 0$ .*

*Prova.* De fato, pela Definição 5.14,  $\gamma(i)$  é  $pt - vertice$  se, somente se,

$$\alpha_1(i - 1/2) \cdot \alpha_2(i + 1/2) = \frac{\delta(i - 1/2)}{\mathcal{A}^+(i - 1/2)} \cdot \frac{\delta(i + 1/2)}{\mathcal{A}^+(i + 1/2)} < 0$$

Isto é, como sempre  $\mathcal{A}^+ > 0$ , então  $\gamma(i)$  é  $pt - vertice$  se, e somente se,

$$\delta(i - 1/2) \cdot \delta(i + 1/2) < 0$$

O raciocínio utilizando o coeficiente  $\alpha_2$  é idêntico. Portanto, segue-se o resultado. ■

Já o teorema a seguir nos dá uma caracterização de  $pt - vertice$  que possibilita seu reconhecimento de forma imediata.

**Teorema 5.17** *Para que o ponto médio  $\mathcal{M}(i)$  não pertença ao segmento de reta  $\mathcal{E}(i)$ , é necessário e suficiente que,  $\gamma(i)$  seja um  $pt - vertice$  de  $\gamma$ .*

*Prova.* É possível observar geometricamente que o ponto  $\mathcal{M}(i)$  não pertence ao segmento  $\overline{\gamma(i)\mathcal{E}(i + 1/2)}$  se, e somente se,

$$\frac{\mathcal{A}^-(i + 1/2)}{2} < [\gamma(i) - \mathcal{E}(i + 1/2), \gamma(i + 1) - \mathcal{E}(i + 1/2)]$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} [\gamma(i) - \mathcal{E}(i + 1/2), \gamma(i + 1) - \mathcal{E}(i + 1/2)] &= \left[ -\frac{\mathcal{A}^-(i + 1/2)}{\mathcal{A}(i + 1/2)}v(i), -\frac{\mathcal{A}^+(i + 1/2)}{\mathcal{A}(i + 1/2)}v(i + 1) \right] \\ &= \frac{\mathcal{A}^-(i + 1/2)\mathcal{A}^+(i + 1/2)}{(\mathcal{A}(i + 1/2))^2} [v(i), v(i + 1)] \end{aligned}$$

Pelo item (3) do Lema 4.9,

$$\frac{\mathcal{A}^-(i + 1/2)\mathcal{A}^+(i + 1/2)}{(\mathcal{A}(i + 1/2))^2} [v(i), v(i + 1)] = \frac{\mathcal{A}^-(i + 1/2)\mathcal{A}^+(i + 1/2)}{\mathcal{A}(i + 1/2)}$$

Assim, temos que:

$$\frac{\mathcal{A}^-(i + 1/2)}{2} < \frac{\mathcal{A}^-(i + 1/2)\mathcal{A}^+(i + 1/2)}{\mathcal{A}(i + 1/2)}$$

E daí,

$$2\mathcal{A}^+(i + 1/2) > \mathcal{A}(i + 1/2) = \mathcal{A}^+(i + 1/2) + \mathcal{A}^-(i + 1/2)$$

Logo,

$$\mathcal{A}^+(i + 1/2) > \mathcal{A}^-(i + 1/2)$$

Mas pelo item (2) do Lema 4.9, temos que  $\mathcal{A}^-(i+1/2) - \mathcal{A}^+(i+1/2) = \delta(i+1/2)$ .

Concluimos então que:

$$\delta(i + 1/2) < 0 \tag{5-11}$$

Com o mesmo raciocínio, é possível mostrar que  $\mathcal{M}(i)$  não pertence ao segmento  $\overline{\gamma(i)\mathcal{E}(i - 1/2)}$  se, e somente se,

$$\delta(i - 1/2) > 0 \tag{5-12}$$

Finalmente, usando as Equações (5-11) e (5-12) concluimos que o ponto  $\mathcal{M}(i)$  não pertence ao segmento  $\overline{\mathcal{E}(i - 1/2)\mathcal{E}(i + 1/2)} = \mathcal{E}(i)$  se, e somente se,

$$\delta(i - 1/2) \cdot \delta(i + 1/2) < 0$$

O que, pelo Lema 5.16, é equivalente a  $\gamma(i)$  ser um *pt-vertice* de  $\gamma$ . Isto prova o Teorema. ■

É possível então generalizar tudo que vimos até o momento e enunciar o seguinte corolário:

**Corolário 5.18** *Dado um polígono  $\gamma$ , os seguintes itens são equivalentes:*

1.  $\gamma$  é um *pt-vertice* de  $\gamma$ .
2. O ponto médio  $\mathcal{M}(i)$  não pertence ao segmento de reta  $\mathcal{E}(i)$ .

3.  $\mathcal{M}(i)$  é um cúspide de  $\mathcal{M}$ .
4.  $\mathcal{H}(i)$  é um cúspide de  $\mathcal{H}$ .

*Prova.* A equivalência entre os itens (1) e (2) segue imediatamente do Teorema 5.17. A equivalência entre os itens (2) e (3), segue pelo Teorema 5.17 e por consequência imediata da Definição 5.15. Já a equivalência entre os itens (3) e (4) são óbvias também pela Definição 5.15. E finalmente, para a equivalência entre os itens (4) e (1), novamente basta usar o Teorema 5.17 e a Definição 5.15. ■

O exemplo abaixo é interessante para entendermos de maneira mais prática os resultados anteriores.

**Exemplo 5.19** *Com auxílio do software Geogebra, considere o Octógono da Figura 5.4 no plano cartesiano, conforme a figura abaixo:*

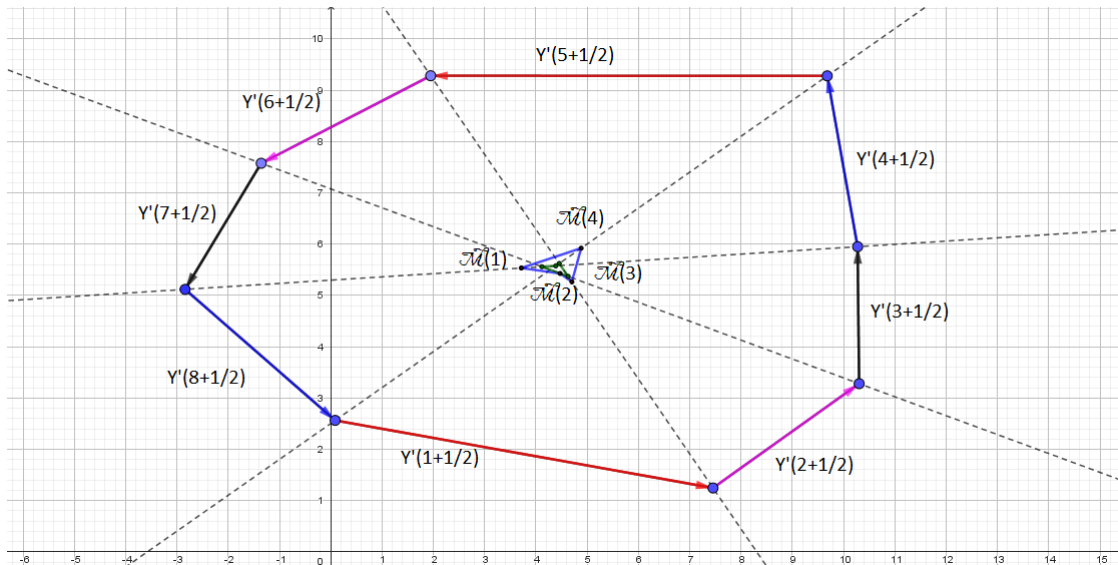


Figura 5.12: Octógono no plano cartesiano.

Pelo Teorema 5.17, observamos na figura, que apenas os vértices  $\gamma(3)$  e  $\gamma(7)$  não são pt – vertices. Além disso, pelo Corolário 5.18 apenas o ponto  $\mathcal{M}(2)$  não é um cúspide.

Note que, cada par de vetores com cores iguais representam lados "opostos" no polígono. Observe, por exemplo, os vetores em vermelho, eles correspondem aos vetores  $\gamma'(i + 1/2)$  e  $\gamma'(i + n + 1/2)$  para  $i = 1$  e  $n = 4$  fixo.

Pelo Geogebra, temos os seguintes dados:  $\gamma'(1 + 1/2) = (7, 37, -1, 32)$ ;  $\gamma'(2 + 1/2) = (2, 85, 2, 03)$ ;  $\gamma'(3 + 1/2) = (-0, 03, 2, 67)$ ;  $\gamma'(4 + 1/2) = (-0, 59, 3, 33)$ ;  $\gamma'(5 + 1/2) = (-7, 73, 0)$ ;  $\gamma'(6 + 1/2) = (-3, 31, -1, 71)$ ;  $\gamma'(7 + 1/2) = (-1, 48, -2, 46)$ ;  $\gamma'(8 + 1/2) = (2, 93, -2, 55)$ . Além disso, a



notação  $\gamma'(i - 1/2)$  representa simplesmente o lado anterior ao  $\gamma'(i + 1/2)$  considerando sempre o sentido positivo (anti-horário). Assim, temos que:

1.  $\delta(1+1/2) \cdot \delta(8+1/2) = [\gamma'(1+1/2), \gamma'(5+1/2)] \cdot [\gamma'(8+1/2), \gamma'(4+1/2)] < 0$ .
2.  $\delta(2+1/2) \cdot \delta(1+1/2) = [\gamma'(2+1/2), \gamma'(6+1/2)] \cdot [\gamma'(1+1/2), \gamma'(5+1/2)] < 0$ .
3.  $\delta(3+1/2) \cdot \delta(2+1/2) = [\gamma'(3+1/2), \gamma'(7+1/2)] \cdot [\gamma'(2+1/2), \gamma'(6+1/2)] > 0$ .
4.  $\delta(4+1/2) \cdot \delta(3+1/2) = [\gamma'(4+1/2), \gamma'(8+1/2)] \cdot [\gamma'(3+1/2), \gamma'(7+1/2)] < 0$ .

Logo, usando o Lema 5.16, o item (1) mostra que os vértices  $\gamma(1)$  e  $\gamma(5)$  são *pt-vertices*, assim como os itens (2) e (4) mostram que os vértices  $\gamma(2)$ ,  $\gamma(6)$  e  $\gamma(4)$ ,  $\gamma(8)$  respectivamente, também são *pt-vertices*. Por fim, apenas os vértices  $\gamma(3)$  e  $\gamma(7)$  não são *pt-vertices*.

E finalmente, se um polígono  $\gamma$  tem simetria ímpar, podemos contabilizar a quantidade exata de cúspides existentes sem mesmo precisar de cálculos. É isso que o seguinte corolário afirma.

**Corolário 5.20** *Se  $\gamma$  é um polígono com simetria ímpar, então  $\gamma$  possui  $n$  cúspides.*

*Prova.* De fato, se  $\gamma$  tem simetria ímpar, então a envoltória  $\mathcal{E}$  é um único ponto. Em particular,  $\gamma(i)$  e  $\gamma(i + n)$  correspondem a um único cúspide de  $\mathcal{M}$ . Como  $\mathcal{M}$  é um polígono de  $n$  lados, segue-se que  $\gamma$  tem  $n$  cúspides. ■

## 5.4

### O número máximo de cúspides

Nosso objetivo principal nesta seção é enunciar e demonstrar o Teorema dos três vértices para o caso discreto.

O Teorema dos três vértices (caso discreto) afirma que qualquer polígono  $\gamma$  possui uma quantidade ímpar, e maior ou igual a 3, de *pt-vertices* no conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Mas como o Corolário 5.20 afirma que em polígonos com simetria ímpar há  $n$  cúspides, então é claro que  $n$  é o número máximo de cúspides presentes num polígono com simetria ímpar. Dito isso, e assumindo como verdadeiro o Teorema dos três vértices (caso discreto), caso  $n$  seja par, então necessariamente não haverá  $n$  cúspides em  $\gamma$  e obviamente, o número máximo de cúspides em  $\{1, \dots, n\}$  será menor do que  $n$ .

Iremos então mostrar que é possível obter um polígono  $\gamma$  com  $2n$  vértices, com  $n$  par e com  $n - 1$  cúspides em suas envoltórias.

Mas antes, precisamos de uma propriedade importante dos trapézios. Consideremos um trapézio  $ABCD$ , em que os segmentos de reta  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são paralelos. Seja  $P = (x_0, y_0)$  um ponto qualquer do plano, e defina  $Q = Q(P) = (x_1, y_1)$  como a interseção das seguintes retas: a reta  $s'$  que passa pelo ponto  $B$  e é paralela à reta  $s$ , a qual contém o segmento  $\overline{PD}$ ; e a reta  $r'$  que passa pelo ponto  $C$  e é paralela à reta  $r$ , a qual contém o segmento  $\overline{PA}$ . A figura abaixo ilustra esta situação:

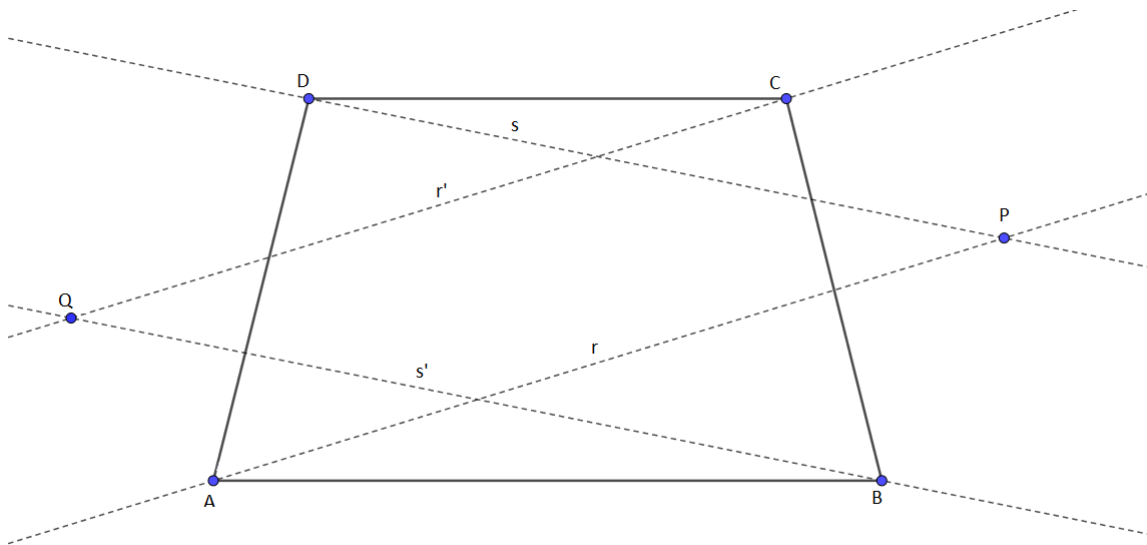


Figura 5.13: Trapézio que ilustra a situação acima.

**Lema 5.21** *Considerando-se o trapézio ABCD descrito acima, os seguintes itens são verdadeiros:*

1. O ponto  $Q$  está a esquerda do segmento  $\overline{AD}$  se, e somente se,  $P$  está a direita do segmento  $\overline{BC}$ .
2. O ponto  $Q$  está a direita do segmento  $\overline{AD}$  se, e somente se,  $P$  está a esquerda do segmento  $\overline{BC}$ .
3. Existe um único ponto  $P$  no segmento  $\overline{BC}$  para o qual  $Q$  está no segmento  $\overline{AD}$  e o segmento  $\overline{PQ}$  é paralelo ao segmento  $\overline{AB}$ .

*Prova.* Podemos supor sem perda de generalidade que  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$ ,  $D = (0, 1)$  e  $C = (c^2, 1)$  para algum  $0 < c < 1$ . Precisamos determinar as equações das retas  $r$ ,  $r'$ ,  $s$  e  $s'$ , o que é feito através de cálculos elementares.

Observe que como a reta  $r$  passa pelos pontos  $P = (x_0, y_0)$  e  $A = (0, 0)$ , sua equação é dada por:

$$y = \frac{y_0}{x_0}x$$

Como a reta  $r'$  é paralela a  $r$  e passa pelo ponto  $C = (c^2, 1)$ , sua equação é dada por:

$$y = \frac{y_0}{x_0}x + \left(1 - \frac{y_0}{x_0}c^2\right)$$

De forma análoga, como a reta  $s$  passa pelo ponto  $D = (0, 1)$  e  $P = (x_0, y_0)$ , então sua equação é dada por:

$$y = \left(\frac{y_0 - 1}{x_0}\right)x + 1$$

E finalmente, como  $s'$  é paralela a  $s$  e passa por  $B = (1, 0)$ , temos:

$$y = \left(\frac{y_0 - 1}{x_0}\right)x - \left(\frac{y_0 - 1}{x_0}\right)$$

Observe que  $Q = (x_1, y_1)$  é a interseção entre as retas  $r'$  e  $s'$ . Logo, para encontrar a coordenada  $x_1$ , podemos resolver:

$$\frac{y_0 x_1}{x_0} + 1 - \frac{y_0 c^2}{x_0} = \left(\frac{y_0 - 1}{x_0}\right)x_1 - \left(\frac{y_0 - 1}{x_0}\right)$$

donde

$$x_1 = 1 - x_0 - (1 - c^2)y_0 \quad (5-13)$$

Para encontrar a coordenada  $y_1$ , basta substituir a Equação (5-13) em, digamos, na equação de  $s'$ , obtendo então:

$$y_1 = \left(\frac{y_0 - 1}{x_0}\right)(1 - x_0 - (1 - c^2)y_0) - \left(\frac{y_0 - 1}{x_0}\right)$$

isto é,

$$y_1 = \frac{(1 - y_0)(x_0 + (1 - c^2)y_0)}{x_0} \quad (5-14)$$

Assim, o ponto  $Q$  é dado finalmente por:

$$Q = \left(1 - x_0 - (1 - c^2)y_0, \frac{(1 - y_0)(x_0 + (1 - c^2)y_0)}{x_0}\right)$$

Agora, note que a reta que contém o segmento  $\overline{BC}$  é dada por:

$$y = -\frac{x}{1 - c^2} + \frac{1}{1 - c^2}$$

Logo, para que o ponto  $P = (x_0, y_0)$  esteja a direita do segmento  $\overline{BC}$  é necessário e suficiente que:

$$y_0 > \frac{-x_0}{1 - c^2} + \frac{1}{1 - c^2} \iff y_0(1 - c^2) > -x_0 + 1 \iff x_0 > 1 - y_0(1 - c^2) \iff x_1 < 0$$

o que, por sua vez, é equivalente a  $Q$  está do lado esquerdo de  $\overline{AD}$ , o que prova o item (1). A demonstração do item (2) é análoga.

Vamos mostrar agora o item (3). Para isso, podemos assumir que  $x_0 = 1 - y_0(1 - c^2)$ , o que implica que  $x_1 = 0$ . Note que isto faz sentido, pois por construção do trapézio  $ABCD$ , o segmento  $\overline{AD}$  está contido no eixo  $y$ . Além disso, para que o segmento  $\overline{PQ}$  seja paralelo ao segmento  $\overline{AB}$  é necessário e suficiente que tenhamos  $y_1 = y_0$ . Isto é, basta resolver a equação quadrática para  $y_0$ :

$$y_0 = \frac{1 - y_0}{1 - y_0(1 - c^2)}$$

Daí, segue-se que  $y_0 = \frac{1 \pm c}{1 - c^2}$ . Observe que pela construção do trapézio  $ABCD$ , precisamos que  $0 < y_0 < 1$ . Assim, se  $y_0 = \frac{1 + c}{1 - c^2}$ , segue-se que:

$$0 < \frac{1}{1 - c} < 1 \iff c < 0$$

o que é uma contradição pois  $0 < c < 1$ . Logo, a única possibilidade é que  $y_0 = \frac{1}{1 + c}$ , pois

$$0 < \frac{1}{1 + c} < 1 \iff c > 0$$

Portanto, nestas condições, concluímos que a única possibilidade é que o ponto  $P$  seja tal que:

$$P = \left( 1 - (1 - c^2), \frac{1}{1 + c} \right)$$

Isto é, o segmento  $\overline{PQ}$  pertence à reta horizontal  $y = \frac{1}{1 + c}$ . ■

A figura abaixo ilustra a situação descrita no Lema 5.21 para  $c = 0,5$ .

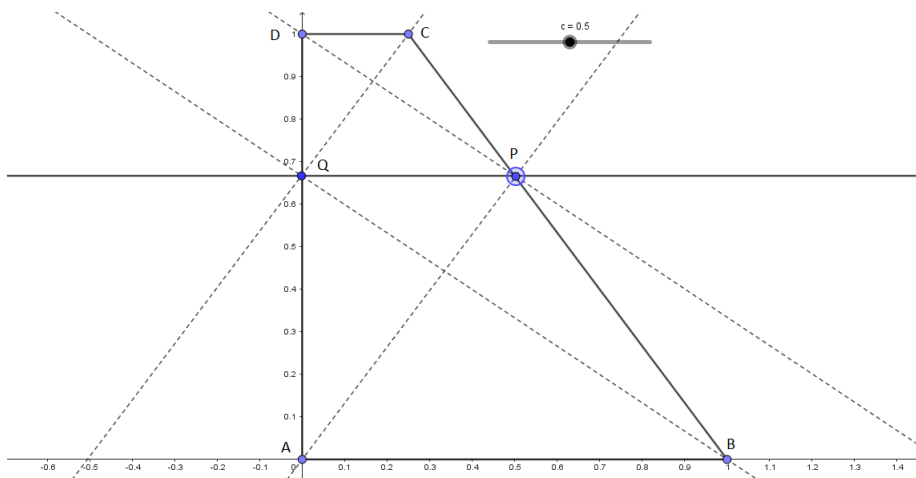


Figura 5.14: Segmento  $\overline{PQ}$ , sobre a reta  $y = \frac{1}{1 + c}$ , paralelo ao segmento  $\overline{AB}$ ,

Agora, com o Lema 5.21 demonstrado, podemos construir os exemplos de polígonos  $\gamma$  com  $n - 1$  cúspides. A ideia é tomar um polígono  $\gamma$  com simetria ímpar com  $2(n - 1)$  vértices e acrescentar mais dois vértice  $P$  e  $Q$  para obter um novo polígono de meia área com  $2n$  vértices e com  $n - 1$  cúspides.

**Exemplo 5.22** *Seja  $\gamma$  um polígono com  $2(n - 1)$  vértices. Para fixar melhor a ideia, vamos considerar  $n = 4$  (um hexágono, neste caso). Consideremos o trapézio  $\gamma(1)\gamma(n - 1)\gamma(n)\gamma(2(n - 1))$ , isto é,  $\gamma(1)\gamma(3)\gamma(4)\gamma(6)$  inscrito em  $\gamma$ . O Lema 5.21 garante a existência de um único ponto  $P$  no segmento de reta  $\overline{\gamma(1)\gamma(6)}$  e do ponto  $Q$  no segmento de reta  $\overline{\gamma(3)\gamma(4)}$  de forma que o segmento  $\overline{PQ}$  seja paralelo a  $\overline{\gamma(1)\gamma(3)}$ . Note que, devido ao paralelismo das diagonais centrais, o novo polígono obtido acrescentando-se os vértices  $P$  e  $Q$ , denotado por  $\gamma \cup \{P, Q\}$  também é meia área. Observe a figura abaixo:*

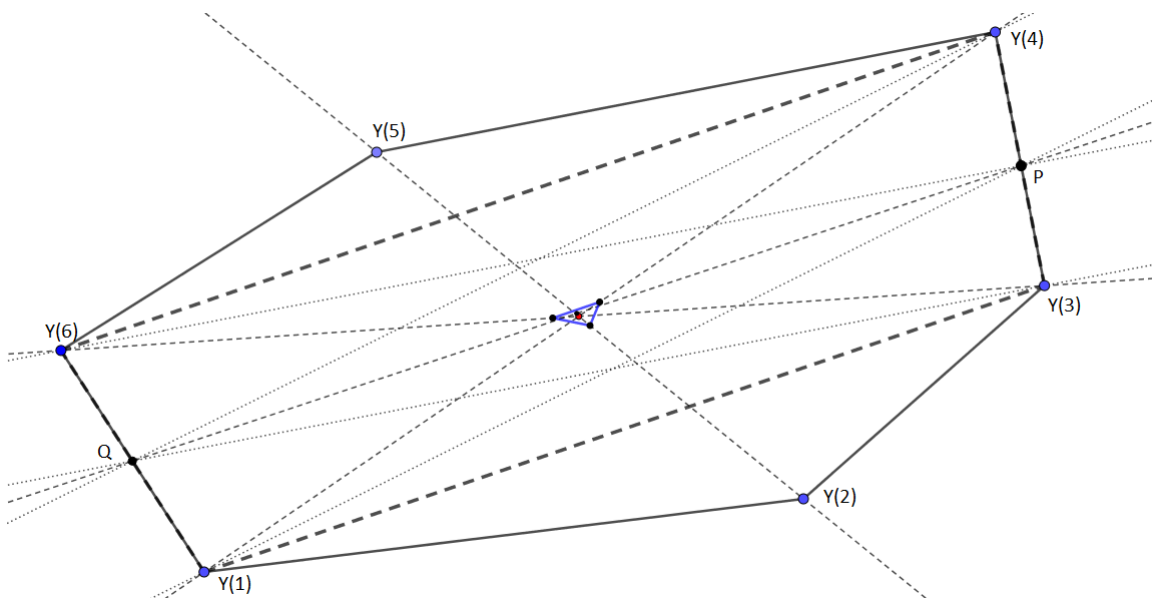


Figura 5.15: Octógono com número máximo de cúspides.

*Veja que, embora os vértices  $P$  e  $Q$  sejam colineares com os vértices  $\gamma(3)$  e  $\gamma(4)$ ;  $\gamma(1)$  e  $\gamma(6)$  respectivamente, o polígono  $\gamma$  é um octógono com  $n - 1$ , ou seja, 3 cúspides. De fato, o ponto médio de todas as diagonais principais são cúspides, exceto da diagonal  $\overline{PQ}$ .*

**Exemplo 5.23** *Este exemplo é análogo ao anterior, entretanto, a ideia aqui é mostrar que também é possível obtermos o octógono com os novos vértices não sendo colineares com nenhum outro vértice. Iremos partir do exemplo anterior. De fato, podemos escolher um ponto  $P^*$  fora do polígono  $\gamma$ , próximo do ponto  $P$  escolhido no exemplo anterior. Pelo Lema 5.21, existirá um ponto correspondente  $Q^*$  fora de  $\gamma$  e próximo de  $Q$ . Note que uma vez que escolhemos o ponto  $P^*$  próximo de  $P$ , então o novo polígono  $\gamma \cup \{P^*, Q^*\}$  também*

será convexo e não possuirá vértices colineares. E analogamente ao exemplo anterior, pelo paralelismo das diagonais centrais, temos que  $\gamma \cup \{P^*, Q^*\}$  também é meia-área. Veja a figura abaixo:

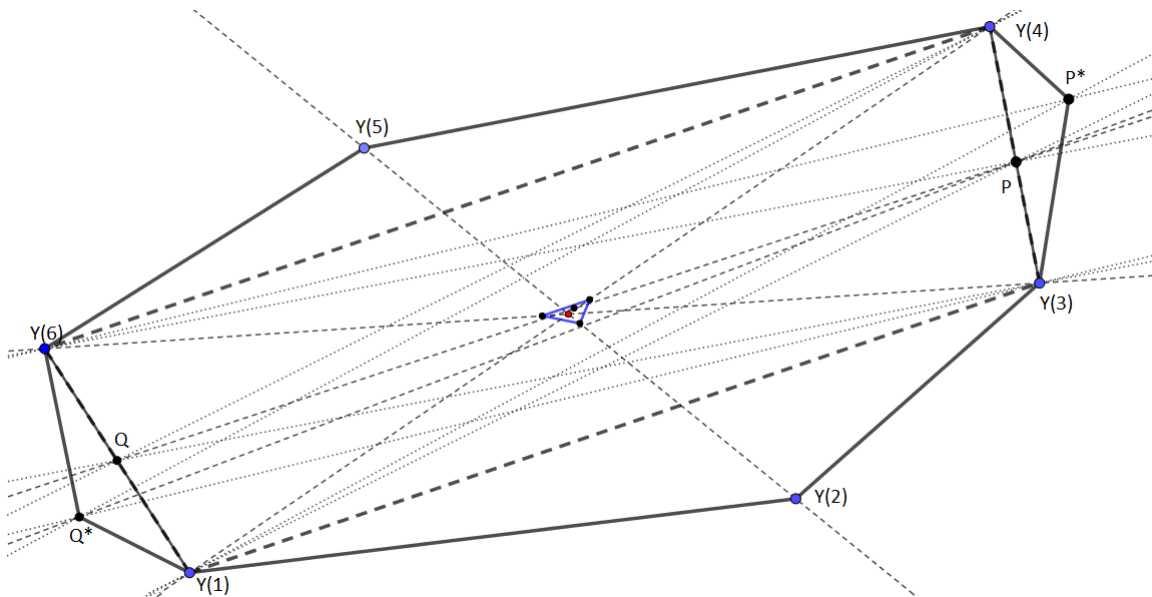


Figura 5.16: Octógono com número máximo de cúspides não colineares.

Agora, vamos abordar alguns conceitos técnicos preliminares para demonstrarmos o Teorema dos Três Vértices (caso discreto). Primeiro, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , temos que:

$$\begin{aligned}
 \delta(i + n + 1/2) &= [\gamma'(i + 2n + 1/2), \gamma'(i + n + 1/2)] \\
 &= [\gamma'(i + 1/2), \gamma'(i + n + 1/2)] \\
 &= -[\gamma'(i + n + 1/2), \gamma'(i + 1/2)] \\
 &= -\delta(i + 1/2)
 \end{aligned}
 \tag{5-15}$$

Agora, consideremos a função definida abaixo:

$$\begin{aligned}
 g: \{1, \dots, 2n\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 i &\longmapsto g(i + 1/2)
 \end{aligned}$$

onde  $g(i + 1/2) = \frac{\delta(i + 1/2)}{\mathcal{A}(i + 1/2)}$ . Observe que pela Equação (5-15), temos:

$$\begin{aligned}
 g(i + n + 1/2) &= \frac{\delta(i + n + 1/2)}{\mathcal{A}(i + n + 1/2)} \\
 &= \frac{-\delta(i + 1/2)}{\mathcal{A}^+(i + n + 1/2) + \mathcal{A}^-(i + n + 1/2)} \\
 &= -\frac{\delta(i + 1/2)}{\mathcal{A}^-(i + 1/2) + \mathcal{A}^+(i + 1/2)} \\
 &= -\frac{\delta(i + 1/2)}{\mathcal{A}(i + 1/2)} \\
 &= -g(i + 1/2)
 \end{aligned} \tag{5-16}$$

Além disso, vimos no Lema 5.16 que  $i$  é um *pt - vértice se*, e somente se  $\delta(i - 1/2) \cdot \delta(i + 1/2) < 0$ . Então, decorre imediatamente disto que  $i$  é um *pt - vértice se*, e somente se,

$$g(i - 1/2) \cdot g(i + 1/2) = \frac{\delta(i - 1/2)}{\mathcal{A}(i - 1/2)} \cdot \frac{\delta(i + 1/2)}{\mathcal{A}(i + 1/2)} < 0$$

isto é, se e somente se

$$g(i - 1/2) \cdot g(i + 1/2) < 0 \tag{5-17}$$

**Lema 5.24** *Com as notações definidas acima, vale que:*

$$\sum_{i=1}^{2n} g(i + 1/2) = 0$$

*Prova.* De fato, usando a Equação (5-16), temos que:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{2n} g(i + 1/2) &= g(1 + 1/2) + \cdots + g(n + 1/2) + g(1 + n + 1/2) \cdots + g(2n + 1/2) \\
 &= g(1 + 1/2) + \cdots + g(n + 1/2) - g(1 + 1/2) - \cdots - g(n + 1/2) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

como queríamos. ■

**Lema 5.25** *Sejam  $\bar{\gamma}(i + 1/2) = \frac{1}{2}(\gamma(i) + \gamma(i + 1))$  e  $\bar{v}(i + 1/2) = \frac{1}{2}(v(i) + v(i + 1))$ . Então,*

$$\sum_{i=1}^{2n} g(i + 1/2) \bar{\gamma}(i + 1/2) = 0$$

*Prova.* Primeiro, note que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{2n} g(i+1/2)\bar{\gamma}(i+1/2) &= \frac{1}{2}g(i+1/2)(\gamma(1) + \gamma(2)) + \cdots + \frac{1}{2}g(2n+1/2)(\gamma(2n) + \gamma(1)) \\
 &= -\frac{1}{2}g(i+1/2)(\gamma(n+2) - \gamma(2) + \gamma(n+1) - \gamma(i)) - \cdots - \\
 &\quad \frac{1}{2}g(n+1/2)(\gamma(2n) - \gamma(n) - \gamma(n+1) + \gamma(1)) \\
 &= -\sum_{i=1}^n g(i+1/2)\bar{v}(i+1/2)
 \end{aligned} \tag{5-18}$$

Agora, usando as equações do Lema 4.10, podemos obter:

$$\begin{aligned}
 v'(i+1/2)\frac{\mathcal{A}^+(i+1/2)}{\mathcal{A}(i+1/2)} &= \left( \frac{\delta(i+1/2)}{\mathcal{A}^+(i+1/2)}v(i) - \frac{\mathcal{A}(i+1/2)}{\mathcal{A}^+(i+1/2)}\gamma'(i+1/2) \right) \\
 &= \frac{\delta(i+1/2)}{\mathcal{A}(i+1/2)}v(i) - \gamma'(i+1/2) \\
 &= g(i+1/2)v(i) - \gamma'(i+1/2)
 \end{aligned} \tag{5-19}$$

Assim como podemos obter também:

$$\begin{aligned}
 v'(i+1/2)\frac{\mathcal{A}^-(i+1/2)}{\mathcal{A}(i+1/2)} &= \left( \frac{\delta(i+1/2)}{\mathcal{A}^-(i+1/2)}v(i+1) - \frac{\mathcal{A}(i+1/2)}{\mathcal{A}^-(i+1/2)}\gamma'(i+1/2) \right) \\
 &= \frac{\delta(i+1/2)}{\mathcal{A}(i+1/2)}v(i+1) - \gamma'(i+1/2) \\
 &= g(i+1/2)v(i+1) - \gamma'(i+1/2)
 \end{aligned} \tag{5-20}$$

Podemos agora multiplicar por  $\frac{1}{2}$  as Equações (5-19) e (5-20) e somá-las para obter:

$$g(i+1/2)\bar{v}(i+1/2) - \gamma'(i+1/2) = \frac{1}{2}v'(i+1/2)$$

Logo,

$$g(i+1/2)\bar{v}(i+1/2) = \frac{1}{2}(\gamma'(i+1/2) + \gamma'(i+n+1/2))$$

E conseqüentemente,

$$\sum_{i=1}^n g(i+1/2)\bar{v}(i+1/2) = \frac{1}{2}(\gamma(n+1) - \gamma(1) + \gamma(1) - \gamma(n+1)) = 0$$

Portanto, da Equação (5-18), segue-se o resultado. ■

Finalmente, podemos enunciar e demonstrar o Teorema dos Três Vértices para o caso discreto.



**Teorema 5.26 (Teorema dos Três Vértices - Caso Discreto)** *Seja  $\gamma$  um polígono. O número de  $pt$  – vertices de  $\gamma$  em  $\{1, \dots, n\}$  é sempre ímpar e maior ou igual a três.*

*Prova.* Primeiro, mostremos que o número de  $pt$  – vertices em  $\{1, \dots, n\}$  é sempre ímpar. Para verificar isso, lembremos da Definição 5.14, que nos diz que  $\gamma(i)$  é  $pt$  – vertice de  $\gamma$  quando os coeficientes  $\alpha_1 = \frac{\delta(i + 1/2)}{\mathcal{A}^+(i + 1/2)}$  ou  $\alpha_2 = \frac{\delta(i + 1/2)}{\mathcal{A}^-(i + 1/2)}$  mudam de sinal em  $i$ . Assim, pela Equação (5-15), para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , temos que  $\delta(i + n + 1/2) = -\delta(i + 1/2)$ . Isto é, em  $\{1, \dots, n\}$ , os coeficientes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  mudam de sinal uma quantidade ímpar de vezes, e conseqüentemente,  $\gamma$  possui uma quantidade ímpar de  $pt$  – vertices em  $\{1, \dots, n\}$ . Agora, mostraremos que esta quantidade de  $pt$  – vertices é sempre maior ou igual a três. Para isso, suponhamos por redução ao absurdo que exista um único  $pt$  – vertice de  $\gamma$  em  $\{1, \dots, n\}$ . De maneira análoga a que foi feita na demonstração do Teorema 3.14, vamos denotar  $\gamma(i_0) = (x_0, y_0)$ . Consideremos  $A, B \in \mathbb{R}$  constantes donde podemos escrever a equação da reta bissetora que intercepta  $\gamma$  em  $\gamma(i_0)$  como:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que na região do plano cujos pontos  $(x, y)$  satisfazem

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) > 0$$

a função  $\delta$  assume apenas valores positivos. Assim, obtemos que:

$$\sum_{i_0}^{i_0+n} \delta \cdot (Ag_1 + Bg_2) = \delta \cdot \left[ A \sum_{i_0}^{i_0+n} \frac{\delta_1(i + 1/2)}{\mathcal{A}_1(i + 1/2)} + B \sum_{i_0}^{i_0+n} \frac{\delta_2(i + 1/2)}{\mathcal{A}_2(i + 1/2)} \right] > 0$$

E

$$\sum_{i_0+n}^{i_0+2n} \delta \cdot (Ag_1 + Bg_2) = \delta \cdot \left[ A \sum_{i_0+n}^{i_0+2n} \frac{\delta_1(i + 1/2)}{\mathcal{A}_1(i + 1/2)} + B \sum_{i_0+n}^{i_0+2n} \frac{\delta_2(i + 1/2)}{\mathcal{A}_2(i + 1/2)} \right] > 0$$

Mas as igualdades acima contradizem o Lema 5.25. Portanto, segue o resultado.

■

## 6

### A construção inversa

Neste capítulo, nosso objetivo é responder a seguinte pergunta: através das envoltórias que estudamos anteriormente, é possível determinar a qual polígono  $\gamma$  elas pertencem? Dito isto, dada as envoltórias  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{H}$  iremos fazer uma análise nestes objetos para determinar se é possível obter alguma informação sobre  $\gamma$ .

#### 6.1

##### O polígono auxiliar

Dado um polígono  $\gamma$ , defina o seguinte polígono auxiliar:

$$\bar{\gamma}(i) = (1 - c(i))\gamma(i) + c(i)\gamma(i + n) \quad (6-1)$$

A priori,  $c$  é uma função real qualquer que associa cada  $i \in \{1, \dots, 2n\}$  a um número real  $c(i)$ .

De forma análoga ao que fizemos anteriormente para um polígono  $\gamma$ , vamos definir o campo de vetores:

$$\bar{v}(i) = \bar{\gamma}(i + n) - \bar{\gamma}(i) \quad (6-2)$$

É intuitivo então utilizarmos a notação  $\bar{\gamma}'(i + 1/2)$  para representar o lado de  $\bar{\gamma}$  entre os vértices  $\bar{\gamma}(i)$  e  $\bar{\gamma}(i + 1)$ . E de forma análoga, consideremos também as funções  $\bar{\mathcal{A}}^+(i + 1/2)$  e  $\bar{\mathcal{A}}^-(i - 1/2)$ .

Para a análise que iremos fazer, é importante expressar os itens citados acima em função de  $\gamma$ ,  $c(i)$ . Assim como as demais funções associadas a  $\gamma$ . É isto que o lema abaixo faz:

**Lema 6.1** *Dados  $\gamma$  e o polígono auxiliar associado conforme (6-1), então:*

1.  $\bar{v}(i) = (1 - 2c(i))v(i)$ .

2. *Temos que:*

$$\bar{\gamma}'(i + 1/2) = (1 - c(i))\gamma'(i + 1/2) + c(i)\gamma'(i + n + 1/2) + c'(i + 1/2)v(i + 1)$$

*Ou de forma equivalente:*

$$\bar{\gamma}'(i + 1/2) = (1 - c(i + 1))\gamma'(i + 1/2) + c(i + 1)\gamma'(i + n + 1/2) + c'(i + 1/2)v(i)$$

3. Além disso, temos:

$$\bar{\mathcal{A}}^-(i + 1/2) = (1 - 2c(i + 1))(\mathcal{A}^-(i + 1/2) - c(i)\mathcal{A}(i + 1/2))$$

E também:

$$\bar{\mathcal{A}}^+(i + 1/2) = (1 - 2c(i))(\mathcal{A}^+(i + 1/2) - c(i + 1)\mathcal{A}(i + 1/2))$$

*Prova.* Primeiro, afirmamos que:

$$c(i) = c(i + n), \forall i$$

De fato, note que:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\gamma}(i) + \bar{\gamma}(i + n)}{2} &= \frac{(1 - c(i))\gamma(i) + c(i)\gamma(i + n)}{2} + \frac{((1 - c(i + n))\gamma(i + n) + c(i + n)\gamma(i))}{2} \\ &= \frac{(1 - c(i) + c(i + n))}{2}\gamma(i) + \frac{(c(i) + 1 - c(i + n))}{2}\gamma(i + n) \end{aligned}$$

Daí, para que a igualdade acima seja verdadeira, é necessário e suficiente que,  $c(i) = c(i + n)$ , o que prova a afirmação.

Agora, vamos mostrar cada item separadamente.

1. Usando a afirmação acima, basta observar que:

$$\begin{aligned} \bar{v}(i) &= \bar{\gamma}(i + n) - \bar{\gamma}(i) \\ &= (1 - c(i))\gamma(i + n) + c(i)\gamma(i) - (1 - c(i))\gamma(i) - c(i)\gamma(i + n) \\ &= \gamma(i + n)(1 - 2c(i)) - \gamma(i)(1 - 2c(i)) \\ &= (1 - 2c(i))v(i) \end{aligned}$$

2. Temos que:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}'(i + 1/2) &= \bar{\gamma}(i + 1) - \bar{\gamma}(i) \\ &= (1 - c(i + 1))\gamma(i + 1) + c(i + 1)\gamma(i + n + 1) - (1 - c(i))\gamma(i) - c(i)\gamma(i + n) \\ &= \gamma(i + 1) - c(i + 1)\gamma(i + 1) + c(i + 1)\gamma(i + n + 1) - \gamma(i) + c(i)\gamma(i) \\ &\quad - c(i)\gamma(i + n) \\ &= \gamma(i + 1) - \gamma(i) - c(i + 1)\gamma(i + 1) + c(i + 1)\gamma(i + n + 1) + c(i)\gamma(i) \\ &\quad - c(i)\gamma(i + n) + c(i)\gamma(i + 1) - c(i)\gamma(i + 1) + c(i)\gamma(i + n + 1) - c(i)\gamma(i + n + 1) \\ &= \gamma'(i + 1/2) - c(i)\gamma'(i + 1/2) + c(i)\gamma'(i + n + 1/2) + c(i + 1)v(i + 1) \\ &\quad - c(i)v(i + 1) \\ &= (1 - c(i))\gamma'(i + 1/2) + c(i)\gamma'(i + n + 1/2) + c'(i + 1/2)v(i + 1) \end{aligned}$$

Ou, de forma equivalente:

$$\begin{aligned}
 \bar{\gamma}'(i + 1/2) &= \bar{\gamma}(i + 1) - \bar{\gamma}(i) \\
 &= (1 - c(i + 1))\gamma(i + 1) + c(i + 1)\gamma(i + n + 1) - (1 - c(i))\gamma(i) - c(i)\gamma(i + n) \\
 &= \gamma(i + 1) - c(i + 1)\gamma(i + 1) + c(i + 1)\gamma(i + n + 1) - \gamma(i) + c(i)\gamma(i) \\
 &\quad - c(i)\gamma(i + n) \\
 &= \gamma(i + 1) - \gamma(i) - c(i + 1)\gamma(i + 1) + c(i + 1)\gamma(i + n + 1) + c(i)\gamma(i) \\
 &\quad - c(i)\gamma(i + n) + c(i + 1)\gamma(i) - c(i + 1)\gamma(i) + c(i + 1)\gamma(i + n) - c(i + 1)\gamma(i + n) \\
 &= \gamma'(i + 1/2) - c(i + 1)\gamma'(i + 1/2) + c(i + 1)\gamma'(i + n + 1/2) + c(i + 1)v(i) \\
 &\quad - c(i)v(i) \\
 &= (1 - c(i + 1))\gamma'(i + 1/2) + c(i + 1)\gamma'(i + n + 1/2) + c'(i + 1)v(i)
 \end{aligned}$$

3. Para provar este item, usaremos os itens (1) e a segunda parte do item (2). Temos que:

$$\bar{\mathcal{A}}^-(i + 1/2) = [\bar{\gamma}'(i + 1/2), \bar{v}(i + 1)]$$

Vamos desenvolver separadamente o determinante:

$$\underbrace{[(1 - c(i + 1))\gamma'(i + 1/2)]}_{(I)} + \underbrace{[c(i + 1)\gamma'(i + n + 1/2)]}_{(II)} + \underbrace{[c'(i + 1/2)v(i)]}_{(III)} + \underbrace{[(1 - 2c(i + 1))v(i + 1)]}_{(IV)}$$

Usando as propriedades básicas da multilinearidade (separando (I), (II) e (III) de (IV)), obtemos que:

- (I) com (IV):  $(1 - c(i + 1))(1 - 2c(i + 1))[\gamma'(i + 1/2), v(i + 1)]$ .
- (II) com (IV):  $c(i + 1)(1 - 2c(i + 1))[\gamma'(i + n + 1/2), v(i + 1)]$ .
- (III) com (IV):  $c'(i + 1/2)[v(i), v(i + 1)]$ .

Fazendo as devidas simplificações e unindo os três itens acima, concluímos portanto que:

$$\bar{\mathcal{A}}^-(i + 1/2) = (1 - 2c(i + 1))(\mathcal{A}^-(i + 1/2) - c(i)\mathcal{A}(i + 1/2)).$$

De forma análoga, usando os itens (1) e a primeira parte do item (2), podemos concluir que:

$$\bar{\mathcal{A}}^+(i + 1/2) = (1 - 2c(i))(\mathcal{A}^+(i + 1/2) - c(i + 1)\mathcal{A}(i + 1/2))$$

Como queríamos. ■

Antes de prosseguirmos, adiante usaremos as notações  $\mathcal{E}(\gamma)$ ,  $\mathcal{M}(\gamma)$  e  $\mathcal{H}(\gamma)$  para representar, respectivamente, as envoltórias discreta, dos pontos médios e hiperbólica de um determinado polígono  $\gamma$ . O teorema abaixo é o resultado principal deste capítulo e estabelece, finalmente, a análise referida anteriormente no início do capítulo.

**Teorema 6.2** *Sejam  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$  dois polígonos de meia-área quaisquer, tais que não haja lados opostos paralelos. Se  $\mathcal{E}(\bar{\gamma}) = \mathcal{E}(\gamma)$  e  $\mathcal{M}(\bar{\gamma}) = \mathcal{M}(\gamma)$ , então  $\bar{\gamma}$  é do tipo (6-1) com  $c$  constante. Reciprocamente, qualquer polígono  $\bar{\gamma}$  do tipo (6-1), com  $c$  constante, possui as mesmas envoltórias  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{M}$  de  $\gamma$ .*

*Prova.* Suponha que  $\mathcal{E}(\bar{\gamma}) = \mathcal{E}(\gamma)$  e  $\mathcal{M}(\bar{\gamma}) = \mathcal{M}(\gamma)$ . Geometricamente, é evidente que a reta bissetora  $r(i)$  e o ponto  $\mathcal{M}(i)$  são os mesmos para  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$ . Isto implica necessariamente que  $\bar{\gamma}$  é do tipo (6-1).

Precisamos mostrar agora que a reta  $r(i)$  também é uma reta bissetora para  $\bar{\gamma}$ , o que por sua vez, é equivalente à:

$$\bar{\mathcal{A}}^+(i + 1/2) = \bar{\mathcal{A}}^-(i + n + 1/2), \forall i \in \{1, \dots, 2n\} \quad (6-3)$$

Mas por outro lado, pelo Lema 6.1, a Equação (6-3) pode ser reescrita como:

$$(1 - 2c(i))(\mathcal{A}^+(i + 1/2) - c(i + 1)\mathcal{A}(i + 1/2)) = (1 - 2c(i + 1))(\mathcal{A}^+(i + 1/2) - c(i)\mathcal{A}(i + 1/2)) \quad (6-4)$$

Efetuada-se as devidas simplificações, a Equação (6-4) pode ser reduzida à:

$$2\mathcal{A}^+(i + 1/2)c'(i + 1/2) = \mathcal{A}(i + 1/2)c'(i + 1/2)$$

O que por sua vez, é equivalente à:

$$c'(i + 1/2)(2\mathcal{A}^+(i + 1/2) - \mathcal{A}(i + 1/2)) = 0$$

Isto é,

$$-c'(i + 1/2)\delta(i + 1/2) = 0$$

Como não há lados paralelos, então  $\delta(i + 1/2) \neq 0$ . O que é equivalente a dizer que  $c'(i + 1/2) = c(i + 1) - c(i) = 0$ , ou seja,

$$c(i + 1) = c(i), \forall i \in \{1, \dots, 2n\}$$

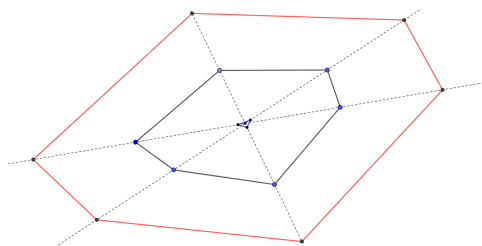
Isto é,  $c$  é constante. Assim, concluímos portanto que  $r(i)$  é uma reta bissetora para  $\bar{\gamma}$ .

A prova da recíproca deste Teorema é análoga ao que fizemos acima, basta seguir os passos ao contrário. Portanto, concluímos a demonstração. ■

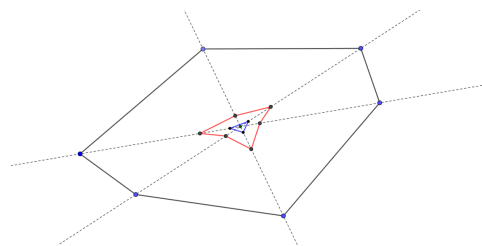
Com o Teorema 6.2, estabelecemos finalmente que, dado  $c \in \mathbb{R}$ , os polígonos com as mesmas envoltórias discreta e dos pontos médios, formam uma família  $\mathcal{F}$  parametrizada por  $c$ . Isto é, dado um polígono  $\gamma$ , podemos definir o conjunto de todos os polígonos com as mesmas envoltórias  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{M}$  de  $\gamma$  conforme abaixo:

$$\mathcal{F}_\gamma = \{\gamma_c; \gamma_c(i) = (1 - c)\gamma(i) + c\gamma(i + n); c \in \mathbb{R}\}$$

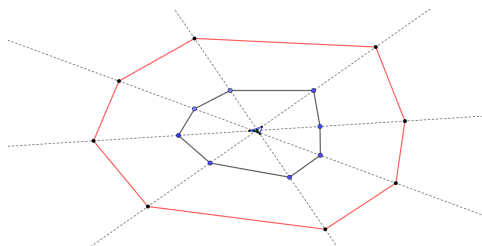
Observe nas figuras abaixo, exemplos de polígonos com seus polígonos auxiliares em vermelho. Veja que para alguns valores de  $c$ , não há convexidade:



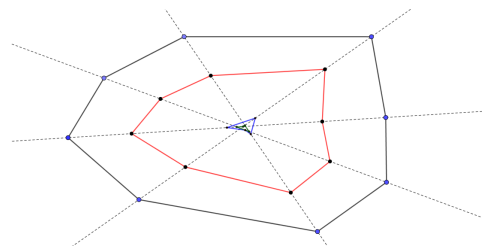
(a) Hexágono com  $c(i) = 1, 5$ .



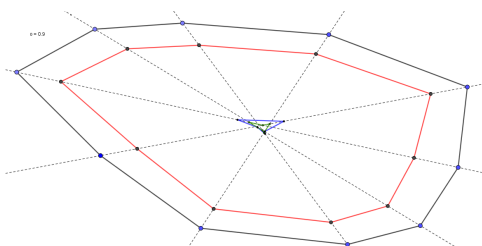
(b) Para  $c(i) = 0, 4$ , não há convexidade.



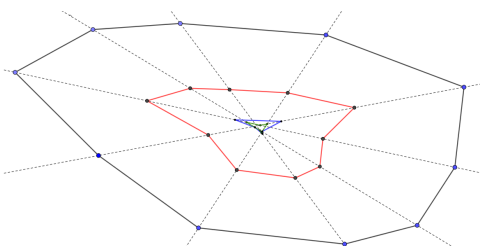
(c) Octógono com  $c(i) = 1, 6$ .



(d) Para  $c(i) = 0, 2$ , não há convexidade



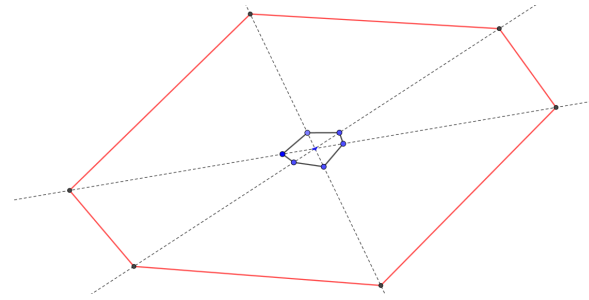
(e) Decágono com  $c(i) = 0, 9$ .



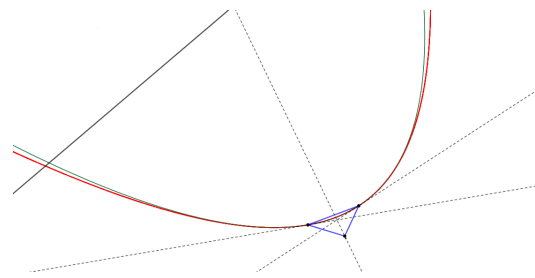
(f) Para  $c(i) = 0, 7$  não há convexidade

Figura 6.1: Hexágono, Octógono e Decágono, e exemplos de polígonos auxiliares.

É importante observar que, em geral,  $\mathcal{H}(\gamma) \neq \mathcal{H}(\bar{\gamma})$ . Na figura abaixo temos o caso do Hexágono com seu polígono auxiliar com  $c(i) = 4, 5$ . Nesta figura temos um arco de hipérbole de cada envoltória (dos dois polígonos) prolongados. Observe que, embora sejam bem próximas, as envoltórias  $\mathcal{H}(\gamma)$  (em vermelho) e  $\mathcal{H}(\bar{\gamma})$  (em verde) se distanciam conforme se afastam dos vértices de  $\mathcal{M}$ .



(a) Hexágono (em preto) e o polígono auxiliar (vermelho)



(b) Os arcos de hipérbole das envoltórias

Figura 6.2: Hexágono e seu polígono auxiliar com parâmetro  $c(i) = 4, 5$

De fato, a hipérbole que contém o arco hiperbólico, digamos  $\mathcal{H}(\gamma)(i + 1/2)$  possui um comportamento assintótico às retas suportes que contém os segmentos  $\gamma'(i + 1/2)$  e  $\gamma'(i + n + 1/2)$ . E a hipérbole que contém o arco hiperbólico  $\mathcal{H}(\gamma_c)(i + 1/2)$  possui comportamento assintótico às retas suportes correspondentes de  $\gamma_c$ . Portanto, se  $\mathcal{H}(\bar{\gamma}) = \mathcal{H}(\gamma)$  e  $\gamma$  não possui lados opostos paralelos, então concluímos que  $\gamma = \bar{\gamma}$ .

## 7

### Considerações finais

Nesta dissertação de mestrado, revisamos alguns conceitos importantes de Geometria Diferencial referente a famílias de curvas planas. Além disso, vimos também uma interessante conexão entre tais conceitos com a Geometria Discreta.

Vimos no início deste trabalho, que dada uma curva convexa fechada, calcular a envoltória de sua família de retas bissetoras não é uma tarefa simples, pois normalmente exige cálculos complexos e longos, e em geral convém utilizar métodos numéricos para resolver tal tarefa. Entretanto, considerando-se uma curva convexa fechada, é possível discretizá-la, de modo a obter uma aproximação da mesma por um polígono. Veja na figura abaixo um exemplo de curva aproximada (de maneira não rigorosa) por um polígono:

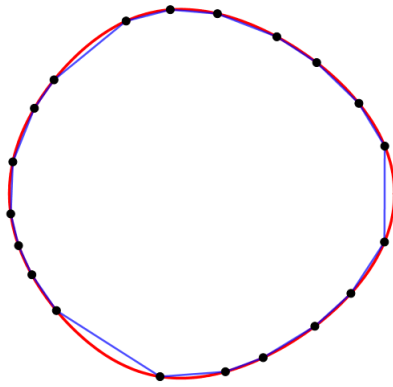


Figura 7.1: Curva convexa aproximada por polígono

É intuitivo e, de fato, correto, afirmar que a envoltória da família de retas bissetoras do polígono será uma boa aproximação da envoltória da curva. Sendo assim, uma interessante aplicação para o estudo teórico feito nesta dissertação é o fato de que: dada uma curva convexa fechada, da qual precisamos calcular a envoltória da família de retas bissetoras, podemos aproximar tal curva por um polígono conveniente e calcular a sua envoltória, que conforme já vimos, os cálculos são mais simples. E posteriormente, utilizar a envoltória obtida como uma boa aproximação para a envoltória das retas bissetoras da curva fechada em questão.

Apesar de termos restringido nosso estudo para polígonos de meia-área, ficou implícito que é possível transformar qualquer polígono convexo em um polígono de meia-área. De fato, este processo pode ser feito de maneira



relativamente simples adicionando-se alguns vértices extras. Sendo assim, o que foi estudado aqui possui aplicação para uma ampla classe de polígonos.

Vimos no capítulo final que um polígono de meia-área é determinado unicamente por sua envoltória  $\mathcal{H}$ , desde que, tal polígono não tenha lados paralelos. Vimos também que dado  $c \in \mathbb{R}$ , e dado polígono  $\gamma$ , os polígonos com as mesmas envoltórias  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{E}$ , dados pela expressão:

$$\bar{\gamma}(i) = (1 - c)\gamma(i) + c\gamma(i + n)$$

formam uma família parametrizada pela constante  $c$ . Entretanto, para determinando valores de  $c$ , o polígono  $\bar{\gamma}$  perde a sua convexidade. Sendo assim, uma proposta de tópico para possíveis trabalhos futuros que dêem continuidade ao que foi estudado aqui, seria determinar a relação entre a constante  $c$  e a perda de convexidade do polígono  $\bar{\gamma}$ , e mais geralmente, quais valores de  $c$  tornam o polígono não convexo.

## 8

### Referências bibliográficas

ALVES, F. R. V. Família de curvas plana e sua envoltória: Visualização com o software geogebra. **Conexões-Ciência e Tecnologia**, v. 8, n. 3, 2014.

BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J. **Curves and Singularities: a geometrical introduction to singularity theory**. [S.l.]: Cambridge university press, 1992.

CARMO, M. P. D. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

CRAIZER, M. Envelopes of bisection lines of polygons. **arXiv preprint arXiv:2203.10559**, 2022.

FECHTOR-PRADINES, N. Bisection envelopes. **Involve, a Journal of Mathematics**, Mathematical Sciences Publishers, v. 8, n. 2, p. 307–328, 2015.

RIUL, P. B. Contorno aparente, envoltórias e equações diferenciais implícitas. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2015.

VILCHES, M. Envoltórias de curvas planas. **Cadernos do IME-Série Matemática**, v. 3, n. 21, 2009.