PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Gabriel Gomes Figueiredo

Unicidade de soluções L^p-fortes

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemáticado Departamento de Matemáticado Centro Técnico Científicoda PUC-Rio.

Orientador : Prof. Boyan Slavchev Sirakov
Co-orientador: Profª. Pammella Queiroz de Souza

Rio de Janeiro
Agosto de 2023

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Gabriel Gomes Figueiredo

Unicidade de soluções L^p-fortes

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemáticado Departamento de Matemáticado Centro Técnico Científicoda PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Boyan Slavchev Sirakov
Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Profª. Pammella Queiroz de Souza
Co-orientador
Universidade Federal de Campina Grande – UFCG

Prof. Edgard Almeida Pimentel
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Héctor Andrés Chang-Lara
Centro de Investigações Matemáticas – CIMAT-A.C

Prof. Diego Ribeiro Moreira
Departamento de Matemática – UFC

Profª. Pêdra Daricléa Santos Andrade
Departamento de Matemática IST – IST

Prof. Gustavo da Silva Araújo
Departamenteo de Matemática – UEPB

Rio de Janeiro, 22 de Agosto de 2023

Gabriel Gomes Figueiredo

Bacharel em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (UFF).

Ficha Catalográfica

Figueiredo, Gabriel Gomes

Unicidade de soluções L^p-fortes / Gabriel Gomes Figueiredo; orientador: Boyan Slavchev Sirakov; co-orientador: Pammella Queiroz de Souza. – Rio de janeiro: PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2023.

v., 57 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Viscosidade;. 3. Unicidade;. 4. Solução C-viscosidade;. 5. Solução L^p-viscosidade;. 6. Solução L^p-forte.. I. Sirakov, Boyan. II. Queiroz-Souza, P.. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

“Todas as coisas cujos valores podem ser disputados no cuspe à distância
servem para a poesia.
As coisas que não levam a nada têm grande importância.”
(Manoel de Barros)

Agradecimentos

Gostaria de dedicar um breve momento para expressar minha gratidão a Deus por Sua presença e orientação ao longo desta jornada acadêmica. Sou grato pela sabedoria e força que recebi para enfrentar os desafios que surgiram durante minha pesquisa. Reconheço a Sua graça e agradeço por todas as bênçãos que me foram concedidas. A minha fé em Deus tem sido uma fonte constante de inspiração e motivação durante todo o processo de elaboração desta dissertação.

Gostaria de dedicar um momento especial para expressar minha profunda gratidão à minha amada mãe. Seu amor incondicional, apoio incansável e incentivo constante foram fundamentais para o meu sucesso nesta jornada de mestrado. Desde o início, você acreditou em mim e me encorajou a perseguir meus sonhos acadêmicos. Suas palavras de encorajamento nos momentos de dúvida e seus abraços reconfortantes nos momentos de estresse foram verdadeiros presentes que me fortaleceram ao longo do caminho. Sua dedicação em me proporcionar uma educação de qualidade e em me motivar a dar o meu melhor em cada desafio foram essenciais para minha realização. Sou grato por sua paciência incansável, por me ouvir com carinho quando eu precisava desabafar e por sempre acreditar em mim, mesmo quando eu duvidava de mim mesmo. Seu exemplo de resiliência, força e sacrifício é uma inspiração constante em minha vida. Este trabalho de dissertação é um testemunho do seu amor e apoio, e eu dedico esse sucesso a você, minha mãe amada. Espero que este estudo possa ser uma forma de honrar tudo o que você fez por mim e que possa trazer orgulho ao seu coração, assim como você traz ao meu. Obrigado, do fundo do meu coração.

Gostaria de expressar minha sincera gratidão ao meu estimado orientador Professor Edgard A. Pimentel. Sua orientação experiente, conhecimento profundo e dedicação incansável foram fundamentais para o sucesso desta dissertação. Desde o início, você demonstrou confiança em minhas habilidades e me incentivou a explorar novas ideias e abordagens. Sua orientação cuidadosa, prontidão em fornecer feedback valioso e capacidade de direcionar minha pesquisa de maneira eficaz foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Além disso, sou grato pela sua disponibilidade constante em responder minhas dúvidas e orientar-me nos momentos mais desafiadores. Sua orientação não se limitou apenas ao âmbito acadêmico, mas você também demonstrou interesse genuíno em meu crescimento pessoal e profissional. Agradeço também por suas palavras de encorajamento e pelo estímulo contínuo que recebi ao longo dessa jornada. Sou verdadeiramente privilegiado por ter tido a oportunidade de trabalhar ao seu lado e sou grato por todo o conhecimento e as habilidades que adquiri com sua orientação. Este trabalho de dissertação é um reflexo direto de sua orientação, e eu reconheço seu papel fundamental em minha formação acadêmica. Mais uma vez, agradeço sinceramente por todo o seu apoio e dedicação, e por ter acreditado em meu potencial.

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a minha estimada coorientadora Professora Pammella Queiroz de Souza. Sua orientação e apoio ao longo desta jornada de mestrado foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Desde o início, você demonstrou um profundo comprometimento com a minha formação acadêmica e forneceu orientações valiosas em todas as etapas do processo de pesquisa. Agradeço por compartilhar seu conhecimento especializado, por oferecer insights perspicazes e por desafiar meus pensamentos de maneira construtiva.

Aos meus amigos Ortenilton, Raul, Antônio, Átila, Claudemir, Anthony, Christopher, Fabrício, Paulo e Gheisa. Suas palavras de incentivo, encorajamento e ombro amigo foram fundamentais para enfrentar os desafios que surgiram ao longo do caminho. Compartilhamos momentos de estudo, debates animados e até mesmo momentos de descontração que me ajudaram a manter o equilíbrio durante o processo de pesquisa. Suas contribuições foram além do apoio emocional, pois alguns de vocês também ofereceram insights valiosos e compartilharam recursos úteis que enriqueceram meu trabalho. Sou grato pela paciência em ouvir minhas ideias e por estarem presentes mesmo quando a pressão era intensa. Cada um de vocês trouxe um brilho único para minha vida acadêmica e sou grato por nossa amizade duradoura. Este trabalho não teria sido o mesmo sem o apoio e a colaboração de vocês.

Aos professores que participaram da Comissão examinadora.

A todos os professores e funcionários do Departamento pelos ensinamentos e pela ajuda. Em especial à Creuza pois sua dedicação e assistência ao longo deste processo foram inestimáveis para o sucesso desta dissertação. Desde o primeiro dia, você foi incansável em ajudar-me com todas as questões administrativas, fornecer informações importantes e oferecer suporte contínuo. Obrigado, Creuza, por sua dedicação e profissionalismo exemplares.

A todos os amigos e familiares que de uma forma ou de outra me estimularam ou me ajudaram.

Aos meus colegas da UFES, UFF e PUC-Rio.

À PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Figueiredo, Gabriel Gomes; Sirakov, Boyan; Queiroz-Souza, P.. **Unicidade de soluções L^p-fortes**. Rio de Janeiro, 2023. 57p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Esta dissertação de mestrado aborda um estudo aprofundado do artigo [2]. No Capítulo 2, são introduzidas as definições e conceitos fundamentais necessários para a análise teórica subsequente. Uma proposição é demonstrada, estabelecendo a existência de uma expansão de Taylor para funções em um determinado espaço, enfatizando o papel do expoente de Escauriaza.

O capítulo continua apresentando dois lemas que relacionam subsoluções e supersoluções em termos de viscosidade e propriedades de normas. A primeira versão do lema considera a relação entre a dimensão do espaço e a norma, enquanto a segunda versão utiliza o expoente de Escauriaza para obter resultados mais refinados. Também são apresentados dois resultados que explicam a relação entre diferentes noções de soluções viscosas e sua conexão com os espaços de Sobolev.

As propriedades dos operadores de Pucci são discutidas como conclusão deste capítulo. No Capítulo 3, a dissertação estabelece a definição da geometria da fronteira do domínio em questão. Em seguida, um importante lema é demonstrado, estabelecendo a existência de soluções fortes em um determinado espaço, explorando a regularidade das funções envolvidas com base nesse lema.

Os conceitos de super-diferenciabilidade e sub-diferenciabilidade são introduzidos, desempenhando um papel crucial na compreensão do comportamento das soluções viscosas e suas relações com derivadas de ordem superior. Um resultado geral que amplia essas definições é apresentado. Duas versões em que a função u é duas vezes super-diferenciável são discutidas, considerando o espaço L^d e posteriormente o espaço L^p, de modo que $p < d$.

A dissertação prossegue demonstrando a relação entre sub-solução L^p-viscosidade e sub-solução L^p-forte quando u pertence a um espaço específico. Em seguida, é mostrado que os limites uniformes de soluções também são soluções. Por fim, é apresentado o resultado principal da dissertação, demonstrando a unicidade das soluções fortes.

Palavras-chave

Viscosidade; Unicidade; Solução C-viscosidade; Solução L^p-viscosidade; Solução L^p-forte.

Abstract

Figueiredo, Gabriel Gomes; Sirakov, Boyan (Advisor); Queiroz-Souza, P. (Co-Advisor). **Uniqueness of L^p- strong solutions**. Rio de Janeiro, 2023. 57p. Dissertação de mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This master's thesis delves into an in-depth study of the article [2]. Chapter 2 begins by introducing fundamental definitions and concepts essential for the subsequent theoretical analysis. A proposition is then demonstrated, establishing the existence of a Taylor expansion for functions in a given space, emphasizing the role of the Escauriaza exponent.

The chapter proceeds to present two lemmas that relate subsolutions and supersolutions in terms of viscosity and properties of norms. The first version of the lemma considers the relationship between the dimension of space and the norm, while the second version uses the Escauriaza exponent to obtain more refined results. Two results are shown to explain that explain the relationship between different notions of viscous solutions and their connection with Sobolev spaces.

The properties of the Pucci operators are discussed at the conclusion of this chapter. Chapter 3 begins by establishing the definition of the boundary geometry of the domain in question. An important lemma is demonstrated, which establishes the existence of strong solutions in a given space and explores the regularity of the functions involved based on this lemma.

The concepts of superdifferentiability and subdifferentiability are introduced, playing a crucial role in understanding the behavior of viscous solutions and their relationships with higher order derivatives. A general result that extends these definitions is presented. The dissertation discusses two versions wherein the function u is twice super-differentiable, considering the space L^d and later the space L^p, so that $p < d$.

The dissertation goes on to demonstrate the relationship between L^p-viscosity sub-solution and L^p-strong sub-solution when u belongs to a specific space. Next, it is shown that the uniform limits of solutions are also solutions. Finally, the main result of the dissertation is presented, demonstrating the uniqueness of strong solutions.

Keywords

Viscosity; Uniqueness; C-viscosity solution; L^p-viscosity solution; L^p-strong solution.

Sumário

1
Introdução

Nesta dissertação estudamos a existência e unicidade de soluções L^p-fortes, detalhando o estudo realizado por [2].

No Capítulo 2, inicialmente, apresentamos as definições e conceitos que serão necessários ao longo desta dissertação. A compreensão clara desses termos é essencial para a análise teórica subsequente. Em seguida, demonstramos uma proposição que estabelece a existência de uma expansão de Taylor para funções em $W^{2,p}$. Além disso, fazemos um breve comentário sobre o expoente de Escauriaza, que desempenha um papel crucial na obtenção de resultados mais refinados em nossa investigação.

Em um passo subsequente, apresentamos dois lemas que estabelecem a relação entre subsoluções (e supersoluções) L^p-forte e subsoluções (respectivamente, supersoluções) L^p-viscosidade. Na primeira versão do lema, consideramos como hipótese a relação entre a dimensão do espaço d e a norma L^p, assumindo apenas que $d \leq p$. Posteriormente, na segunda versão do lema, utilizamos o expoente de Escauriaza para obter resultados mais refinados.

Em continuidade, apresentamos mais dois resultados que explicam a relação entre soluções C-viscosidade e soluções L^p-viscosidade. Esses resultados são essenciais para compreendermos as diferentes noções de soluções viscosas e sua conexão com os espaços de Sobolev.

Concluímos este capítulo, por fim apresentando as propriedades dos operadores de Pucci.

No Capítulo 3, inicialmente, estabelecemos a definição da geometria da fronteira do domínio em questão.

Em seguida, demonstramos um importante lema que estabelece a existência de soluções fortes no espaço L^p. A partir deste lema, derivamos uma propriedade específica para f pertencente ao espaço L^d, em que $d < p$. Essa propriedade nos permite explorar a relação entre soluções fortes e a regularidade das funções envolvidas.

Definimos, então, os conceitos de super-diferenciabilidade e sub-diferenciabilidade. Essas noções são cruciais para entendermos o comportamento das soluções viscosas e suas relações com as derivadas de ordem superior. Além disso, apresentamos um resultado que generaliza essas definições, fornecendo um arcabouço teórico mais amplo para nossa análise.

Em seguida, apresentamos duas versões em que a função u é duas vezes super-diferenciável, considerando os casos em que u pertence aos espaços L^d e L^p.

Avançando na dissertação, demonstramos a relação entre sub-solução L^p-viscosidade e sub-solução L^p-forte quando u pertence ao espaço $W^{2,p}_{loc}(\Omega)$. Em seguida, mostramos que os limites uniformes de soluções são, eles próprios, soluções.

Por fim, apresentamos o resultado principal desta dissertação, que demonstra a unicidade das soluções fortes.

2
Definições e fatos importantes

Neste capítulo estamos interessados em estudar um operador geral de segunda ordem do tipo elíptico, cuja formulação é

$$G(x, u(x), Du, D^2u) = 0 \text{ em } \Omega,$$

no qual Ω é um conjunto aberto e limitado em $\mathbb{R}^d$ e

$$G : (\Omega \setminus \mathcal{N}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}(d) \to \mathbb{R},$$

em que $\mathcal{N} \subset \Omega$ é um conjunto com medida de Lebesgue nula e $\mathcal{S}(d)$ é o conjunto das matrizes simétricas $d \times d$ com entradas reais e dimensão $\dfrac{d(d+1)}{2}$. Denotamos um ponto no domínio do operador G por (x, r, p, X), em que $x \in \Omega \setminus \mathcal{N}, r \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^d$ e $X \in \mathcal{S}(d)$.

Neste momento, procederemos à definição de algumas condições que se mostram essenciais ao longo deste trabalho.

Definição 2.1 (Elipticidade Degenerada) *Dizemos que $G : (\Omega \setminus \mathcal{N}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}(d) \to \mathbb{R}$ é degenerada elíptica se para (x, r, p) arbitrários e $X, Y \in \mathcal{S}(d)$ com $X - Y \geq 0$, isto é, $(X - Y)\xi \cdot \xi \geq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$, tem-se*

$$G(x, r, p, X) \leq G(x, r, p, Y). \tag{ED}$$

Definição 2.2 (Soluções C-viscosidade) *Seja $G \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times S(d))$. Uma função $u \in C(\Omega)$ é uma sub-solução C-viscosidade de*

$$G(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{2.1}$$

se para toda $\varphi \in C^2(\Omega)$ e $x_0 \in \Omega$ tal que $(u - \varphi)(x_0) \geq (u - \varphi)(x)$ localmente, ou seja, x_0 é ponto de máximo local, temos

$$G(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0.$$

Do mesmo modo, $u \in C(\Omega)$ é uma super-solução C-viscosidade de (2.1) se, para toda $\varphi \in C^2(\Omega)$ e $x_0 \in \Omega$ tal que $(u - \varphi)(x_0) \leq (u - \varphi)(x)$ localmente, ou *seja, x_0 é ponto de mínimo local, temos*

$$G(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0.$$

Sendo assim, se $u \in C(\Omega)$ é uma sub e super-solução C-viscosidade de (2.1) *então dizemos que u é uma solução C-viscosidade de* (2.1).

Agora, vamos explorar os operadores extremais de Pucci, os quais possuem uma importância significativa na análise de equações elípticas não-lineares.

Definição 2.3 (Operadores de Pucci) *Sejam $0 < \lambda \leq \Lambda$ constantes fixadas. Os operadores extremais de Pucci $\mathcal{P}^{\pm}_{\lambda,\Lambda} : \mathcal{S}(d) \to \mathbb{R}$ são definidos da seguinte maneira*

(a) $\mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}(X) = -\Lambda \mathrm{tr}(X^+) + \lambda \mathrm{tr}(X^-)$

(b) $\mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}(X) = -\lambda \mathrm{tr}(X^+) + \Lambda \mathrm{tr}(X^-)$

no qual $\mathrm{tr}(X^-)$ é a soma dos autovalores negativos de X e $\mathrm{tr}(X^+)$ é a soma dos autovalores positivos de X.

Um operador importante que vem dessa definição é

$$G(x, r, p, X) = \mathcal{P}^-(X) - \gamma|p| - f(x), \tag{2.2}$$

em que $\gamma \geq 0$ e $f \in L^p(\Omega)$.

Os operadores em questão possuem propriedades fundamentais que serão utilizadas ao longo deste trabalho. Tais propriedades serão enumeradas e demonstradas após a apresentação de algumas definições adicionais, que também serão necessárias para a demonstração dessas propriedades.

Definição 2.4 (Elipticidade Uniforme) *Seja $G : (\Omega \backslash \mathcal{N}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}(d) \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Para constantes $0 < \lambda \leq \Lambda$, o operador $G = G(x, r, p, X)$ é uniformemente elíptico se para $0 \leq P \in \mathcal{S}(d)$, então*

$$G(x, r, p, X) - \Lambda \mathrm{tr}(P) \leq G(x, r, p, P + X) \leq G(x, r, p, X) - \lambda \mathrm{tr}(P). \tag{UE}$$

Ou seja, se tomarmos uma matriz simétrica X e a movermos no sentido de P, o operador muda proporcionalmente ao próprio P e tais mudanças vão ser controladas por λ e Λ.

Observação 2.5 *É importante notar que a* (UE) *implica que G é* (ED). *Para isto note que para duas matrizes simétricas X e P, em que P é uma matriz* *positiva, temos* $(X+P)^+ = X^+ + P^+$ *e* $(X+P)^- = X^-$. *Assim segue que*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X+P) &= -\lambda \mathrm{tr}[(X+P)^+] + \Lambda \mathrm{tr}[(X+P)^-]\\ &= -\lambda \mathrm{tr}(X^+ + P^+) + \Lambda \mathrm{tr}(X^-)\\ &= -\lambda \mathrm{tr}(X^+) + \Lambda \mathrm{tr}(X^-) - \lambda \mathrm{tr}(P^+)\\ &= \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X) - \lambda \mathrm{tr}(P^+).\end{aligned}$$

E se $X - Y \geq 0$, *então*

$$\begin{aligned}G(x,r,p,X) &= G(x,r,p,Y+X-Y)\\ &\leq G(x,r,p,Y) - \lambda \mathrm{tr}(X-Y)\\ &\leq G(x,r,p,Y).\end{aligned}$$

Mostrando assim, que (UE) *implica* (ED), *como queríamos.*

Agora, estabelecemos uma condição que envolve a dependência do operador G com respeito ao termo de ordem zero.

Definição 2.6 (Própria) *Seja* $G : (\Omega \setminus \mathcal{N}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}(d) \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável. Dizemos que* $G = G(x,r,p,X)$ *é própria se* G *é* (ED) *e para quaisquer* $(x,p,X) \in (\Omega \setminus \mathcal{N}) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}(d)$ *temos*

$$G(x,r,p,X) \leq G(x,s,p,X)$$

sempre que $r \leq s$.

É importante destacar que na definição de soluções C-viscosidade, é assumida a continuidade do operador G. No entanto, ao removermos essa hipótese de continuidade, pode haver um conjunto de medida nula em que o operador não está definido. Essa situação apresenta um desafio para a noção de soluções C-viscosidade. Para contornar essa questão, recorremos à introdução da noção de solução L^p-viscosidade por [2]. A definição dessa noção é apresentada a seguir.

Definição 2.7 (Soluções L^p-viscosidade) *Seja* $F : (\Omega \setminus \mathcal{N}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}(d) \to \mathbb{R}$ *um operador mensurável. Suponha que* F *é própria,* $d < 2p$ *e* $f \in L^p_{loc}(\Omega)$. *Uma função* $u \in C(\Omega)$ *é uma subsolução* L^p*-viscosidade (ou supersolução) de* $F = f$ *em* Ω *se, para toda* $\varphi \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$, *para todo* $\varepsilon > 0$ *e todo* $\mathcal{O} \subset \Omega$ *aberto se*

$$F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)) - f(x) \geq \varepsilon \text{ q.t.p. em } \mathcal{O}$$

$$(F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)) - f(x) \le \varepsilon \ q.t.p. \ em \ \mathcal{O}),$$

então $u-\varphi$ não pode ter um ponto de máximo local (respectivamente, um ponto de mínimo local) em $\mathcal{O}$.

Equivalentemente, u é uma sub-solução L^p-viscosidade (ou super-solução) se para toda $\varphi \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ e um ponto $\hat{x} \in \Omega$ tal que $u-\varphi$ tem um máximo local (respectivamente, mínimo), então

$$\operatorname{ess}\liminf_{x\to\hat{x}}(F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)) - f(x)) \le 0$$

$$(\operatorname{ess}\limsup_{x\to\hat{x}}(F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)) - f(x)) \ge 0).$$

Assim, u é uma solução L^p-viscosidade de $F = f$ em Ω se é uma sub-solução L^p- viscosidade e uma super-solução L^p-viscosidade.

Observação 2.8 (Expoente de Escauriaza $d/2 \le p_0 = p_0(\Lambda/\lambda, d)$) *No contexto da definição acima, é igualmente relevante discutir os valores adequados para p.*

Quando $p \ge \dfrac{d}{2}$, considerando a dependência de p em relação aos parâmetros de elipticidade do operador e à dimensão, e observando que este expoente surgiu em [5], desvela-se um panorama de significativa relevância.

Nesse contexto, caso a integrabilidade exceda esse valor, as estimativas $W^{2,p}$ revelam-se prontamente disponíveis, assim como a seguinte desigualdade de Harnack

$$\sup_{x\in B_{r/2}} u(x) \le C\left(\inf_{x\in B_{r/2}} u(x) + r^{2-d/p}\,\|f\|_{L^p(\Omega)}\right).$$

Veja [7] e [3].

Assim, sempre que nos referimos ao expoente de Escauriaza, estaremos nos referindo ao expoente.

$$p_0 \ge \frac{d}{2}. \tag{P}$$

O trabalho desenvolvido nestea dissertação está neste contexto.

Em particular se vale (P) e $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma solução L^p-forte de

$$\mathcal{P}^-(D^2u) - \gamma|u| \le f \text{ em } \Omega, \tag{2.3}$$

então

$$\sup_{\Omega} u \le \sup_{\partial\Omega} u + C\left\|f^+\right\|_{L^p(\Omega)}, \tag{2.4}$$

em que $C = C(\Lambda,\lambda,d,\Omega) > 0$. Também podemos reescrever (2.4) como

$$\sup_{B_r(x)} u \le \sup_{\partial B_r(x)} u + Cr^{2-\frac{d}{p}}\left\|f^+\right\|_{L^p(B_r(x))}, \tag{2.5}$$

em que $C = C(\Lambda, \lambda, \gamma, n) > 0$ é independente de r para $r \leq 1$. Vamos nos referir a essas estimativas (2.4) e (2.5) como o Princípio do Máximo Generalizado (PMG) para soluções L^p-fortes. E vale observar que a restrição $d < 2p$ garante que a função de teste $\varphi \in C(\Omega)$, fato que pode ser encontrado em [1] (Lema 5.15, página 107).

A seguir, apresentaremos um fato importante relacionado à existência de uma expansão de Taylor para funções em $W^{2,p}(\Omega)$. Para facilitar a compreensão do leitor, também forneceremos algumas definições relevantes que serão utilizadas nesta demonstração.

Definição 2.9 (Ponto de Lebesgue) *Um ponto $x \in \Omega$ é chamado ponto de Lebesgue para o operador G quando*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |G(y,r,p,X) - G(x,r,p,X)|^p dy = 0.$$

Definição 2.10 (Conjugado de Sobolev) *Para $1 \leq p < d$, definimos $p^* := \dfrac{dp}{d-p}$, em que p^* é chamado conjugado de Sobolev de p. Observe que $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{d}$.*

Vamos utilizar duas variações da desigualdade de Poincaré. A saber, a primeira conhecida como desigualdade de Poincaré na bola, que é dada a seguir

$$\fint_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy \leq C r^{d+p-1} \int_{B_r(x)} |Df(y)||y-z|^{1-d} dy, \tag{2.6}$$

que vale para todo ponto de Lebesgue z de $f \in W^{1,p}(B_r(x))$. A demonstração deste resultado pode ser encontrada no Lema 1, página 140 do livro de referência [6].

A segunda versão da desigualdade de Poincaré deriva da primeira versão porém utilizamos o conjugado de Sobolev, a prova dessa desigualdade se encontra em [6] (Teorema 1, página 141).

$$\left(\fint_{B_r(x)} |f(y) - f_{(x,r)}|^{p^*} dy \right)^{\frac{1}{p*}} \leq Cr \left(\fint_{B_r(x)} |Df(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.7}$$

em que $f \in W^{1,p}(B_r(x))$ e $1 \leq p < d, p^* = \dfrac{dp}{d-p}, f_{(x,r)} = \fint_{B_r(x)} f(y)dy.$

Também vamos usar a Desigualdade de Morrey, cuja a prova se encontra em [6] (Teorema 3, página 143). Tem-se

$$|f(y) - f(z)| \leq Cr \left(\fint_{B_r(x)} |Df(w)|^p dw \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.8}$$

para $y, z \in B_r(x), f \in W^{1,p}(B_r(x))$ e $d < p$.

Proposição 2.11 *Seja $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ e $1 < d < 2p$. Seja $\hat{x} \in \Omega$ um ponto de Lebesgue de Du em $L^{\frac{pd}{p-d}}$ e D^2u em L^p. Então,*

$$u(x) = u(\hat{x}) + \langle Du(\hat{x}), x - \hat{x}\rangle + \frac{1}{2}\left\langle D^2u(\hat{x})(x-\hat{x}), x - \hat{x}\right\rangle + o(|x-\hat{x}|)^2.$$

Demonstração. Considere x um ponto de Lebesgue de f e Df, em que Df é localmente integrável. E assim vamos usar a seguinte estratégia.

(a) Estimar $f(x) - f_{(x,r)}$ eu usar (2.6) para concluir que com $p = 1$, temos

$$\begin{aligned} |f(x) - f_{(x,r)}| &\leq Cr^d \fint_{B_r(x)} |Df(y)||y-x|^{1-d}dy \\ &\leq C\int_0^r \frac{1}{s^{d-1}}ds\left(\int_{B_r(x)}|Df(y)|dy\right) \\ &\leq C\left(\int_0^r \frac{1}{s^d}\int_{B_r(s)}|Df(y)|dyds + r\fint_{B_r(x)}|Df(y)|dy\right) \\ &\leq Cr\left(\sup_{0<s\leq r}\fint_{B_r(x)}|Df(y)|dy\right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

(b) Agora precisamos mostrar que se $g \in W^{2,p}(B_r(x))$ com $\dfrac{d}{2} < p$, então

$$h(y) = g(y) - \left(g(x) + \langle Dg(x), y - x\rangle + \frac{1}{2}\left\langle D^2g(x)(y-x), y-x\right\rangle\right),$$

satisfaz $h(y) = o(|y-x|^2)$ q.t.p. x.

Para isso, seja x um ponto de Lebesgue de Dg em $L^{p^*}(B_r(x))$, em que $p^* = \dfrac{dp}{d-p}$ e $D^2g \in L^p(B_r(x))$.

Como $Dh(y) = Dg(y) - Dg(x) - D^2g(x)(y-x) \in L^{p^*}(B_r(x))$ e $p^* > d$, usamos (2.9) para concluir que

$$|h(y) - h(x)| \leq Cr\left(\fint_{B_r(x)}|Dh(y)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}. \tag{2.10}$$

E de (2.10), temos

$$\left(\fint_{B_r(x)}|Dh(y) - Dh_{(x,r)}|^{p^*}dy\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq Cr\left(\fint_{B_r(x)}|D^2g(y) - D^2g(x)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.11}$$

Combinando a equação (2.10) com a equação (2.11), temos

$$|h(y) - h(x)| \leq Cr^2\left(\fint_{B_r(x)}|D^2g(y) - D^2g(x)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} + Cr|Dh_{(x,r)}|.$$

E assim temos que $Dh_{(x,r)} = o(r)$. Portanto, por (2.9), obtemos

$$|Dh_{(x,r)}| = |Dh_{(x,r)} - Dh(x)| \leq Cr \sup_{0<s\leq r} \fint_{B_s(x)} |D^2g(y) - D^2g(x)|dy.$$

∎

No contexto das soluções de viscosidade L^p, é fundamental estabelecer uma condição de estrutura para o operador F. Com o intuito de fornecer uma definição precisa, é necessário aprimorar a abordagem.

Definição 2.12 (Condição de Estrutura) *Para cada $R > 0$ existe uma função contínua não-crescente ω_R tal que $\omega_R(0) = 0$ e*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^-(X-Y) - \gamma|p-q| - \omega_R((s-r)^+) &\leq F(x,r,p,X) - F(x,s,q,Y) \\ &\leq \mathcal{P}^+(X-Y) + \gamma|p-q| + \omega_R((r-s)^+), \end{aligned} \tag{CE}$$

em que $X, Y \in S(d), p, q \in \mathbb{R}^d$ e $r, s \in \mathbb{R}$ de modo que $|r|, |s| \leq R$.

Observação 2.13 *Note que se tomarmos $p = q$ e $r = s$ em* (CE)*, temos*

$$\mathcal{P}^-(X-Y) \leq F(x,r,p,X) - F(x,r,p,Y) \leq \mathcal{P}^+(X-Y),$$

equivalentemente,

$$\mathcal{P}^-(X-Y) + F(x,r,p,Y) \leq F(x,r,p,X) \leq \mathcal{P}^+(X-Y) + F(x,r,p,Y).$$

Tomando $X = M + P$ e $Y = M$, temos

$$\mathcal{P}^-(P) + F(x,r,p,M) \leq F(x,r,p,M+P) \leq \mathcal{P}^+(P) + F(x,r,p,M),$$

equivalentemente,

$$\Lambda \mathrm{tr}(P) + F(x,r,p,M) \leq F(x,r,p,M+P) \leq \lambda \mathrm{tr}(P) + F(x,r,p,M).$$

Isso significa que a partir da condição de estrutura conseguimos obter a elipticidade uniforme.

Além disso, é necessário estabelecer a noção de soluções L^p-fortes, pois essa definição desempenha um papel fundamental nas demonstrações de alguns resultados que serão abordados posteriormente.

Definição 2.14 (Soluções L^p-Fortes) *Seja* $F : (\Omega \backslash \mathcal{N}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}(d) \to \mathbb{R}$ *e* $p > \frac{d}{2}$. *Dizemos que* $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ *é uma solução* L^p*-forte para*

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega,$$

se $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0$ *em quase todo ponto* $x \in \Omega$.

A relação desejada (entre as soluções L^p-viscosidade e as soluções L^p-fortes) é apresentada nos dois lemas a seguir.

Lema 2.15 *Sejam* F *satisfazendo a* (CE), $d \leq p$ *e* $f \in L^p(\Omega)$. *Se* u *é uma sub-solução* L^p*-forte (ou super-solução) de* $F = f$ *em* Ω, *então* u *é uma sub-solução* L^p*-viscosidade (ou super-solução) de* $F = f$ *em* Ω.

Demonstração. Observe que com a condição $d \leq p$ podemos garantir que $u \in C(\Omega)$. Além disso, a condição de u ser sub-solução L^p-forte de $F = f$ em Ω significa que

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) - f(x) \leq 0.$$

E então, nosso objetivo será mostrar que u é sub-solução L^p-viscosidade, ou seja

$$\operatorname{ess} \liminf_{x \to \hat{x}} F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x) - f(x)) \leq 0,$$

em que $\hat{x}$ é um ponto de máximo local de $u - \varphi$.

Note que podemos definir $v(x) := u(x) - \varphi(x)$ em uma vizinhança de $\hat{x}$, em que $\hat{x}$ é ponto de máximo de v. Sendo assim, o que temos substituindo $v(x)$ no operador F (ou melhor, na hipótese da u ser sub-solução L^p-forte) é

$$F(x, u(x), Du(x) - D\varphi(x), D^2u(x) - D^2\varphi(x)) \quad \text{q.t.p. } \Omega \text{ perto de } \hat{x}.$$

Em que $u(x) = v(x)$ e $Du(x) = Dv(x)$ q.t.p. x em uma vizinhança de $\hat{x}$, no qual vamos usar [9] (especificamente, o Princípio do Máximo de Bony) para poder afirmar que $D^2u(x) - D^2\varphi(x) \leq 0$ (em uma vizinhança de $\hat{x}$) e usando o fato de F ser degenerada elíptica (isto é, se $A \geq B$, então $F(x, r, p, A) \leq F(x, r, p, B)$), temos

$$F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) \leq F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)).$$

Assim,

$$F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) - f(x) \leq F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) - f(x).$$

E portanto, tomando o $\operatorname{ess}\liminf_{x\to\hat{x}}$ tem-se

$$\operatorname{ess}\liminf_{x\to\hat{x}} F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)-f(x)) \leq 0,$$

conforme desejávamos. ■

Lema 2.16 *Sejam F satisfazendo* (CE)*, u satisfazendo o* (PMG) *e $f \in L^p(\Omega)$. Se u é uma sub-solução L^p-forte (ou super-solução) de $F = f$ em Ω, então u é uma sub-solução L^p-viscosidade.*

Demonstração. Vamos assumir que u é uma sub-solução L^p-forte, $\varphi \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ de forma que $u-\varphi$ tem um máximo $\hat{x} \in \Omega$ e

$$F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x)) \geq f(x)+\varepsilon \ \text{ q.t.p. } \ \Omega \ \text{ perto de } \hat{x}.$$

Usando a continuidade uniforme de F em (p,X), podemos assumir que o máximo é estrito. Agora, observemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^-(D^2(u-\varphi))-\gamma|D(u-\varphi)| &\leq F(x,u(x),Du(x),D^2u(x))\\ &\quad - F(x,u(x),D\varphi(x),D^2\varphi(x))\\ &\leq -\varepsilon,\end{aligned}$$

perto de $\hat{x}$ no sentido L^p-forte.
Como vale o (PMG), temos

$$\sup_{B_r(\hat{x})}(u-\varphi) \leq \sup_{\partial B_r(\hat{x})}(u-\varphi) + Cr^{2-\frac{d}{p}}\left\|f^+\right\|_{L^p(B_r(\hat{x}))}.$$

Assim

$$u(\hat{x})-\varphi(\hat{x}) \leq \sup_{\partial B_r(\hat{x})}(u-\varphi),$$

para algum r pequeno.

Mas isso é uma contradição com o fato de $\hat{x}$ ser um máximo local estrito de $u-\varphi$. ■

É importante ressaltar que a volta do lema acima também vale, isto é, se $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ é uma sub-solução L^p-viscosidade (respectivamente, uma super-solução de L^p-viscosidade) em Ω, então u é uma sub-solução L^p-forte (respectivamente, uma super-solução L^p-forte) de $F=0$. Porém, esse fato será demonstrado mais a frente.

A seguir, apresentaremos um lema semelhante ao Lema 2.15, porém aplicado a funções semi-convexas e semi-côncavas.

Lema 2.17 *Sejam* $F : (\Omega \setminus \mathcal{N}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}(d) \to \mathbb{R}$ *satisfazendo* (CE), $f \in L^p(\Omega)$ *e* $u \in C(\Omega)$ *uma função semi-convexa tais que*

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \leq f(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Suponhamos que u *é uma função semi-convexa. Então* u *é uma sub-solução* L^p*-viscosidade de* $F = f$ *em* Ω.

Demonstração. Com efeito, seja $\varphi \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ e suponhamos que $u - \varphi$ tem um ponto de máximo local $x_0 \in \Omega$ e que

$$F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) \geq f(x) + \varepsilon \quad \text{q.t.p.} \quad \text{em } B_r(x_0),$$

para algum $\varepsilon > 0$ e $r > 0$. Assim,

$$f(x) - F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) \leq -\varepsilon \quad \text{q.t.p.} \quad \text{em } B_r(x_0).$$

Como F satisfaz (CE) e u satisfaz a hipótese do Lema 2.16, segue que

$$\mathcal{P}^-(D^2(u - \varphi)) - \gamma|D(u - \varphi)| \leq -\varepsilon \quad \text{q.t.p. em } B_r(x_0). \tag{2.12}$$

Seja u_δ a suavização padrão de u. Como u é contínua, temos que $u_\delta \to u$ uniformemente quando $\delta \to 0$. Além disso, como u é localmente Lipschitz contínua em Ω, temos que $u \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$ e, consequentemente $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$. Pelo item iii) do Lema da propriedade dos mollifiers, encontrado em (B), podemos concluir que

$$\|Du_\delta - Du\|_{L^p(B_r(x_0))} \to 0 \quad \text{quando} \quad \delta \to 0. \tag{2.13}$$

Assim, como u é semiconvexa, o Teorema de Aleksandrov nos garante que u possui expansão em série de Taylor de segunda ordem q.t.p. em Ω.

Deste modo, pelo Teorema de Egorov, para todo $\xi > 0$, existe um conjunto mensurável $E \subset B_r(x_0)$ tal que

(a) $|B_r(x_0) \setminus E| < \sigma$, em que $\sigma = \left(\dfrac{\xi}{\gamma}\right)^p$; e

(b) $D^2u_\delta \to D^2u$ uniformemente em E quando $\delta \to 0$.

Consequentemente, obtemos que

$$\left(\fint_{B_r(x_0)\setminus E} |\mathcal{P}^-(D^2(-\varphi))|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \xi. \tag{2.14}$$

Com efeito, inicialmente, note que

$$\mathcal{P}^-(D^2(-\varphi)) \leq \mathcal{P}^-(D^2(u-\varphi)).$$

Assim, usando as propriedades dos operadores de Pucci, considerando $X = \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(A+B)$ e $Y = \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(-B)$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^-(A+B) + \mathcal{P}^-(-B) &\leq \mathcal{P}^-(A+B-B) \\ &= \mathcal{P}^-(A). \end{aligned}$$

Por outro lado, segue que $\mathcal{P}^-(-B) = -\mathcal{P}^+(B)$. Deste modo,

$$\mathcal{P}^-(A+B) - \mathcal{P}^+(B) \leq \mathcal{P}^-(A).$$

Somando $\mathcal{P}^+(B)$ em ambos os lados desta última desigualdade, concluímos que

$$\mathcal{P}^-(A+B) \leq \mathcal{P}^-(A) + \mathcal{P}^+(B). \tag{2.15}$$

Considerando $A = D^2(u-\varphi)$ e $B = -D^2u$ nas propriedades dos operadores de Pucci, decorre que

$$\mathcal{P}^-(D^2(u-\varphi) - D^2u) \leq \mathcal{P}^-(D^2(u-\varphi)) + \mathcal{P}^+(-D^2u),$$

ou seja,

$$\mathcal{P}^-(D^2(-\varphi)) \leq \mathcal{P}^-(D^2(u-\varphi)) + \mathcal{P}^+(-D^2u).$$

Como u é convexa, temos que $D^2u \geq 0$, o que implica que $-D^2u \leq 0$. À vista disso, decorre que

$$\mathcal{P}^+(-D^2u) = -\lambda \mathrm{tr}((-D^2u)^+) + \Lambda \mathrm{tr}((-D^2u)^-) = \Lambda \mathrm{tr}((-D^2u)^-).$$

Como $-D^2u$ é simétrica, seu traço é igual a soma dos seus autovalores, que são não-negativos. Desta maneira, obtemos que

$$\mathcal{P}^+(-D^2u) = \Lambda \mathrm{tr}((-D^2u)^-) \leq 0,$$

o que implica que

$$\mathcal{P}^-(D^2(u-\varphi)) + \mathcal{P}^+(-D^2u) \leq \mathcal{P}^-(D^2(u-\varphi)).$$

Portanto, concluímos que

$$\mathcal{P}^-(D^2(-\varphi)) \leq \mathcal{P}^-(D^2(u-\varphi)).$$

■

Lema 2.18 *Se u é uma solução C-viscosidade de $F \leq f$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$, então $w = u - \varphi$ é uma sub-solução C-viscosidade de*

$$\mathcal{P}^-(D^2 w) - \gamma|Dw| \leq f(x) - F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) \text{ em } \Omega.$$

Demonstração. Já que u é solução (em particular sub-solução) C-viscosidade de $F \leq f$, então para toda $\varphi \in C^2(\Omega)$ se

$$(u-\varphi)(x_0) \geq (u-\varphi)(x) \text{ , para todo } x \in \Omega, \tag{2.16}$$

tem-se que

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0.$$

Agora, nosso objetivo é mostrar que para toda $\psi \in C^2(\Omega)$ se $(w-\psi)(x_0) \geq (w-\psi)(x)$, para todo $x \in \Omega$, então

$$\mathcal{P}^-(D^2\psi(x_0)) - \gamma|D\psi(x_0)| \leq f(x_0) - F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \text{ , em } \Omega.$$

Mas observe que de (2.16) temos

$$w - \psi = u - \varphi - \psi = u - (\varphi - \psi).$$

Consequentemente, $F(x_0, u(x_0), D(\varphi-\psi)(x_0), D^2(\varphi-\psi)(x_0)) - f(x_0) \leq 0$. E portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^-(D^2\psi(x_0)) - \gamma|D\psi(x_0)| &\leq F(x_0, u(x_0), D(\varphi-\psi)(x_0), D^2(\varphi-\psi)(x_0)) \\ &\quad - F(x_0, u(x_0), D(\varphi)(x_0), D^2(\varphi)(x_0)) \\ &\leq f(x_0) - F(x_0, u(x_0), D(\varphi)(x_0), D^2(\varphi)(x_0)),\end{aligned}$$

em Ω, conforme desejávamos. ■

Proposição 2.19 *Sejam F satisfazendo* (CE), *f contínua e u satisfazendo o* (PMG). *Então soluções (sub-,super-) C-viscosidade de $F = f$ em Ω são soluções (sub-,super-) L^p-viscosidade de $F = f$ em Ω.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que uma sub-solução C-viscosidade de $F = f$ em Ω não é uma sub-solução L^p-viscosidade de $F = f$ em Ω. Sendo assim, consideramos

(i) $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$;

(ii) $\psi \in W^{2,p}(B_{2r}(x_0))$;

(iii) $u - \psi$ tem máximo local em x_0;

(iv) $F(x, u(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) \geq f(x) + \varepsilon,$ q.t.p. $B_r(x_0)$.

Vamos escolher ψ de modo que $(u - \psi)(x_0) = 3\delta \geq 0$ em $B_r(x_0)$, $(u - \psi)(x) \leq -3\delta$ sobre $\partial B_r(x_0)$ e $F(x, u(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) \geq f(x),$ q.t.p. $B_r(x_0)$.

Usando a densidade de $C^2(\Omega)$ em $W^{2,p}(\Omega)$ também podemos escolher uma sequência $\varphi_n \in C^2(\Omega)$ em que $\varphi_n \to \psi$ uniformemente e que satisfaz $\|\varphi_n - \psi\|_{W^{2,p}(B_{2r}(x_0))} \to 0$. Também definimos

$$w_n \coloneqq u - \varphi_n.$$

Sendo assim, para algum n suficientemente grande em $B_r(x_0)$ tem-se que $\max\limits_{B_r(x_0)} w_n \geq 2\delta$ e $w_n \leq -2\delta$ sobre $\partial B_r(x_0)$, pois caso contrário, isto é, se $\max\limits_{B_r(x_0)} w_n < 2\delta$, então

$$|(w - w_n)(x_0)| = |3\delta - w_n(x_0)| > |3\delta - 2\delta| = |\delta|,$$

ou seja,

$$\delta < |(w - w_n)(x_0)| \to 0.$$

O que é uma contradição.

Além disso, w_n é sub-solução C-viscosidade de

$$\mathcal{P}^-(D^2 w_n) - \gamma |Dw_n| \leq g_n(x), \text{ em } B_{2r}(x_0),$$

conforme vimos no Lema 2.13, em que

$$g_n(x) = f(x) - F(x, u(x), D\varphi_n(x), D^2\varphi_n(x)).$$

Ademais temos que

$$\begin{aligned} g_n(x) &= f(x) - F(x, u(x), D\varphi_n(x), D^2\varphi_n(x)) \\ &\leq F(x, u(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) - F(x, u(x), D\varphi_n(x), D^2\varphi_n(x)) \\ &\leq \mathcal{P}^+(D^2(\psi - \varphi_n)) + \gamma |D(\psi - \varphi_n)|. \end{aligned}$$

Em particular, $g_n^+(x) \leq (\mathcal{P}^+(D^2(\psi - \varphi_n)) + \gamma|D(\psi - \varphi_n)|)^+$. Assim,

$$\int_{B_r(x_0)} (|g_n^+(x)|)^p dx \leq \int_{B_r(x_0)} [(\mathcal{P}^+ D^2(\psi - \varphi_n) + \gamma|D(\psi - \varphi_n)|)^+]^p dx.$$

E note que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{P}^+(D^2(\psi - \varphi_n)) + \gamma|D(\psi - \varphi_n)|| &\leq |\mathcal{P}^+(D^2(\psi - \varphi_n))| + |\gamma|D(\psi - \varphi_n)| \\
&= |\Lambda \mathrm{tr}(D^2(\psi - \varphi_n))^- \\
&\quad - \lambda \mathrm{tr}(D^2(\psi - \varphi_n))^+| + \gamma|D(\psi - \varphi_n)| \\
&\leq |\Lambda \mathrm{tr}(D^2(\psi - \varphi_n))^-| \\
&\quad + |\lambda \mathrm{tr}(D^2(\psi - \varphi_n))^+| + \gamma|D(\psi - \varphi_n)|.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{B_r(x_0)} |\mathcal{P}^+ D^2(\psi - \varphi_n) + \gamma|D(\psi - \varphi_n)||^p\right)^{1/p} \\
&\quad \leq \Lambda\left(\int_{B_r(x_0)} |\mathrm{tr}(D^2(\psi - \varphi_n))^-|^p dx\right)^{1/p} \\
&\quad + \lambda\left(\int_{B_r(x_0)} |\mathrm{tr}(D^2(\psi - \varphi_n))^+|^p dx\right)^{1/p} \\
&\quad + \gamma\left(\int_{B_r(x_0)} |D(\psi - \varphi_n)|^p dx\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{P}^+ D^2(\psi - \varphi) + \gamma|D(\psi - \varphi)|\right\|_p &\leq \Lambda \left\|(D^2(\psi - \varphi))^-\right\|_p \\
&\quad + \lambda \left\|(D^2(\psi - \varphi))^+\right\|_p + \gamma \left\|D(\psi - \varphi_n)\right\|_p \\
&\leq 2\Lambda \left\|D^2(\psi - \varphi_n)\right\|_p + \gamma \left\|D(\psi - \varphi_n)\right\|_p \\
&\leq k\left(\|\psi - \varphi_n\|_{W^{2,p}(B_{2r}(x_0))}\right) \\
&\leq k\frac{\varepsilon}{k} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

em que $k = \max\{2\Lambda, \gamma, 1\}$. Assim, $\|\mathcal{P}^+ D^2(\psi - \varphi) + \gamma|D(\psi - \varphi)|\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ quando $n \to \infty$. E como

$$\left\|\mathcal{P}^+ D^2(\psi - \varphi) + \gamma|D(\psi - \varphi)|\right\| \geq \left\|(\mathcal{P}^+ D^2(\psi - \varphi) + \gamma|D(\psi - \varphi)|)^+\right\|_{L^p(\Omega)},$$

segue que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| g_n^+ \right\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Agora tomamos $\eta > 0$ de modo que w_n^η seja sub-convolução das w_n, ou seja

$$w_n^\eta(x) = \sup_{z\in B_{2r}(\Omega)} \left(w_n(z) - \frac{1}{2\eta}|z-x|^2 \right).$$

Então definimos $w \coloneqq w_n^\eta$ que é semi-convexo e satisfaz

$$\mathcal{P}^-(D^2w) - \gamma|Dw| \leq \tilde{g}_n(x) \text{ q.t.p. em } B_r(x_0),$$

em que $\tilde{g}_n(x) = \max\{g_n(z) : |z-x| \leq c\sqrt{\eta}\}$ e $c\sqrt{\eta} = 2(\eta \left\|w\right\|_\infty)^{\frac{1}{2}}$ pois, da forma em que foi definido w_n^η, podemos tirar as seguinte conclusões

(1) $w_n^\eta(x) \geq w_n(z) - \dfrac{|z-x|^2}{2\varepsilon}$;

E tomando $z = x$ tem-se $w_n^\eta \geq w_n(x)$

(2) Definimos $A^\eta(w_n) \coloneqq \arg\max \left(w_n(z) - \dfrac{|z-x|^2}{2\varepsilon} \right)$.

$A^\eta(w_n)$ é não vazio porque w_n é uniformemente contínuo até $\overline{B_r(x_0)}$.

Tomando $x^\eta \in A^\eta(w_n)$, temos

$$w_n(x^\eta) - \frac{|x^\eta - x|^2}{2\varepsilon} \geq w_n(z) - \frac{|z-x|^2}{2\varepsilon}.$$

Para todo $z \in B_r(x_0)$. Tomando $z = x$, temos

$$w_n(x^\eta) - \frac{|x^\eta - x|^2}{2\varepsilon} \geq w_n(z),$$

ou seja,

$$\frac{|x^\eta - x|^2}{2\varepsilon} \leq w_n(x^\eta) - w_n(z).$$

Assim,

$$\frac{|x^\eta - x|^2}{2\varepsilon} \leq w_n(x^\eta) - w_n(z) \leq 2\left\|w_n\right\|_{L^\infty(B_r(x_0))}.$$

Portanto,

$$|x^\eta - x| \leq 2(\varepsilon \left\|w_n\right\|_{L^\infty(B_r(x_0))})^{\frac{1}{2}}.$$

Como $w_n^\eta \to w_n$ uniformemente em $B_r(x_0)$ quando $\eta \downarrow 0$, para algum η pequeno, temos $\max\limits_{B_r(x_0)} w_n^\eta \geq \delta$ e $w_n^\eta \leq -\delta$ sobre $\partial B_r(x_0)$, pois caso contrário, isto é, se $\max\limits_{B_r(x_0)} w_n^\eta < \delta$, então

$$|(w_n - w_n^\eta)(x_0)| \geq |2\delta - w_n^\eta(x_0)| > |2\delta - \delta| = \delta,$$

ou seja,

$$\delta < |w(x_0) - w_n^\eta(x_0)| \to 0.$$

O que é uma contradição.

Assim, $\delta \leq \|\tilde{g}_n^+\|_{L^p(B_r(x_0))}$. Mas $\tilde{g}_n \to g_n$ uniformemente quando $\eta \downarrow 0$ e assim encontramos uma contradição. ■

Teorema 2.20 (Princípio de Comparação) *Sejam F satisfazendo* (CE)*, $f \in L^p(\Omega)$ e suponha que u satisfaça (PMG). Sejam $u, \psi \in C(\overline{\Omega})$, suponha que u é uma subsolução (supersolução) L^p-viscosidade e que ψ é uma supersolução (subsolução) L^p-forte de $F = f$ em Ω. Se $u \leq \psi$ ($u \geq \psi$) em $\partial\Omega$, então $u \leq \psi$ ($u \geq \psi$) em Ω. Em particular, se u, ψ são, respectivamente, uma solução L^p-viscosidade e uma solução L^p-forte de $F = f$ em Ω, e $u = \psi$ em $\partial\Omega$, então $u = \psi$ em Ω.*

Demonstração. Trataremos apenas o caso em que u é uma subsolução L^p-viscosidade e ψ é uma supersolução L^p-forte. Definamos $w = u - \psi$. Então $w \leq 0$ em $\partial\Omega$, uma vez que, por hipótese, $u \leq \psi$ em $\partial\Omega$. Como u é uma subsolução L^p-viscosidade de $F = f$, então para toda $\varphi \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$, sempre que $\varepsilon > 0$, $\mathcal{O} \subset \Omega$ é aberto e

$$F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) - f(x) \geq \varepsilon \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{2.17}$$

$u - \varphi$ não pode ter um máximo local em $\mathcal{O}$. Definamos agora

$$G(x, r, p, X) \coloneqq F(x, r + \psi(x), p + D\psi(x), X + D^2\psi(x)) - f(x).$$

Como $\psi \in W^p(\Omega)$, então $w \in C(\Omega)$ e é solução L^p-viscosidade de $G \leq 0$. De fato, sejam $\phi \in W^p(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ e $U \subset \Omega$ tais que

$$G(x, w(x), D\phi(x), D^2\phi(x)) \geq \varepsilon \text{ q.t.p. em } U.$$

Verifiquemos que, sob essas condições, $w - \phi$ não pode ter um máximo em U. Pois bem, como

$$\begin{aligned} G(x, w(x), D\phi(x), D^2\phi(x)) &= F(x, (w+\psi)(x), D(\phi+\psi)(x), D^2(\phi+\psi)(x)) \\ &\quad - f(x) \\ &= F(x, u(x), D(\phi+\psi)(x), D^2(\phi+\psi)(x)) - f(x), \end{aligned}$$

tomando $\varphi = \phi + \psi$ em (2.17) e $\mathcal{O} = U$, temos que

$$F(x, (w+\psi)(x), D(\phi+\psi)(x), D^2(\phi+\psi)(x)) \geq \varepsilon \quad \text{q.t.p. em } U$$

e $u - \varphi = u - (\phi + \psi)$ não pode ter um máximo em U. Mas

$$w - \phi = u - \psi - \phi = u - (\phi + \psi).$$

Ou seja, $u - \varphi = u - (\phi + \psi)$ não poder ter um máximo implica que $w - \phi$ não pode ter um máximo em U. Logo, w é solução L^p-viscosidade de $G \leq 0$.

Agora, como ψ é supersolução L^p-forte de $F = f$ e F satisfaz (CE) e o (PMG), pelo Lema , segue que ψ é supersolução L^p-viscosidade de $F = f$. Com isso, temos que w é solução de viscosidade de $H \leq 0$, em que

$$\begin{aligned} H(x,r,p,X) = {} & F(x, r+\psi(x), p + D\psi(x), X + D^2\psi(x)) \\ & - F(x, \psi(x), D\psi(x), D^2\psi(x)). \end{aligned}$$

Note que, como F satisfaz (CE), H também a satisfaz. Com efeito, sejam $X, Y \in \mathcal{S}(d)$, $p, q \in \mathbb{R}^d$ e $r, s \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\begin{aligned} H(x,r,p,X) - H(x,s,q,Y) = {} & F(x, r+\psi(x), p + D\psi(x), X + D^2\psi(x)) \\ & - F(x, s+\psi(x), q + D\psi(x), Y + D^2\psi(x)). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Como F satisfaz a condição de estrutura, segue-se que

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}^-(X + D^2\psi(x) - (Y + D^2\psi(x))) - \gamma|p + D\psi(x) - (q + D\psi(x))| \\ & \quad -\omega_R((s+\psi(x) - (r+\psi(x)))^+) \leq F(x, r+\psi(x), p+D\psi(x), X + D^2\psi(x)) \\ & \quad -F(x, s+\psi(x), q + D\psi(x), Y + D^2\psi(x)) \\ & \leq \mathcal{P}^+(X + D^2\psi(x) - (Y + D^2\psi(x))) + \gamma|p + D\psi(x) - (q + D\psi(x))| \\ & \quad +\omega_R((r+\psi(x) - (s+\psi(x)))^+). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}^-(X - Y) - \gamma|p-q| - \omega_R((s-r)^+) \\ & \leq F(x, r+\psi(x), p+D\psi(x), X + D^2\psi(x)) \\ & \quad - F(x, s+\psi(x), q + D\psi(x), Y + D^2\psi(x)) \\ & \leq \mathcal{P}^+(X - Y) + \gamma|p-q| + \omega_R((r-s)^+). \end{aligned}$$

Usando (2.18), estas últimas desigualdades acima reescrevem-se da seguinte forma

$$\mathcal{P}^-(X-Y) - \gamma|p-q| - \omega_R((s-r)^+) \leq H(x,r,p,X) - H(x,s,q,Y) \\ \leq \mathcal{P}^+(X-Y) + \gamma|p-q| + \omega_R((r-s)^+).$$

Isto que mostra que H satisfaz a (CE). Então, pelo Lema 2.21, temos que w é solução L^p-viscosidade de

$$\mathcal{P}^-(D^2w) - \gamma|Dw| + g(x, w(x)) \leq 0,$$

em que

$$g(x,r) := F(x, r+\psi(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) - F(x, \psi(x), D\psi(x), D^2\psi(x)).$$

Note que, como F é própria, $g(x,w(x)) \geq 0$ em $\{0 < w\}$. De fato, $0 < w(x)$ implica que $\psi(x) < w(x) + \psi(x)$ e, portanto, pelo fato de F ser própria, temos que

$$F(x, w(x)+\psi(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) \geq F(x, \psi(x), D\psi(x), D^2\psi(x)),$$

isto é,

$$F(x, w(x)+\psi(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) - F(x, \psi(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) \geq 0.$$

Logo, w é solução de

$$\mathcal{P}^-(D^2w) - \gamma|Dw| \leq 0$$

e, pelo Teorema de Aleksandrov-Bakelman-Pucci ([10], Proposição 1.20), temos que

$$\sup_{\Omega} w \leq \sup_{\partial\Omega} w^+.$$

Como $w \leq 0$ em $\partial\Omega$, temos que $w^+ = 0$ em $\partial\Omega$, o que implica que $\sup_{\partial\Omega} w^+ = 0$. Ou seja, $\sup_{\Omega} w \leq 0$. Mas, para todo $x \in \Omega$, $w(x) \leq \sup_{\Omega} w$. Assim, $w(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega$. Portanto, $u \leq \psi$ em Ω. ■

Lema 2.21 *Sejam F satisfazendo* (CE) *e $f \in L^p(\Omega)$. Se u é uma sub-solução L^p-viscosidade (super-solução) de $F = f$, então u também é uma sub-solução L^p-viscosidade de*

$$\mathcal{P}^-(D^2u) - \gamma|Du| + F(x, u(x), 0, 0) = f(x)$$

(respectivamente, uma super-solução L^p-viscosidade de

$$\mathcal{P}^+(D^2u) + \gamma|Du| + F(x, u(x), 0, 0) = f(x)).$$

Demonstração. Queremos mostrar que para toda $\psi \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ tem-se

$$\mathcal{P}^-(D^2\psi(x) - \gamma|D\psi(x)| + F(x, u(x), 0, 0) - f(x) \leq 0, \text{ em que } x \in B_r(\hat{x}).$$

Mas segue da (CE) que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}^-(D^2\psi(x)) - \gamma|D\psi(x)| \leq F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) - F(x, u(x), 0, 0)\\
&\mathcal{P}^-(D^2\psi(x)) - \gamma|D\psi(x)| + F(x, u(x), 0, 0) \leq F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x))\\
&\mathcal{P}^-(D^2\psi(x)) - \gamma|D\psi(x)| + F(x, u(x), 0, 0) - f(x) \leq F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x))\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - f(x)\\
&\mathcal{P}^-(D^2\psi(x)) - \gamma|D\psi(x)| + F(x, u(x), 0, 0) - f(x) \leq 0,
\end{aligned}$$

conforme desejávamos. ■

A seguir, apresentaremos e demonstraremos as propriedades dos operadores de Pucci, que têm sido amplamente empregados até o momento.

Lema 2.22 (Propriedades dos operadores de Pucci) *Sejam* $X, Y \in \mathcal{S}(d)$ *e* $r \geq 0$. *Então*

(a) $\mathcal{P}^+(rX) = r\mathcal{P}^+(X)$

(b) $\mathcal{P}^-(rX) = r\mathcal{P}^-(X)$

(c) $\mathcal{P}^+(X + Y) \leq \mathcal{P}^+(X) + \mathcal{P}^+(Y)$

(d) $\mathcal{P}^-(X + Y) \geq \mathcal{P}^-(X) + \mathcal{P}^-(Y)$

(e) $\mathcal{P}^+(-X) = -\mathcal{P}^-(X)$

(f) $\mathcal{P}^-(-X) = \mathcal{P}^+(X)$

(g) $\mathcal{P}^-(X) - \mathcal{P}^(Y) \leq \mathcal{P}^-(X - Y) \leq \mathcal{P}^+(X - Y) \leq \mathcal{P}^+(X) - \mathcal{P}^-(Y)$

Em particular, $\mathcal{P}^+$ *é convexo e* $\mathcal{P}^-$ *é côncavo.*

Demonstração. Vamos demonstrar a propriedade em (a). Para tanto note que $(rX)^+ = rX^+$ (analogamente $(rX)^- = rX^-$), pois

$$\begin{aligned}
(rX)^+ &= \begin{cases} rX, & \text{se } rX > 0 \\ 0, & \text{se } rX \leq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} rX, & \text{se } X > 0 \\ 0, & \text{se } X \leq 0 \end{cases} \\
&= rX^+.
\end{aligned}$$

Agora procedemos a demonstração do item (a).

(a) Utilizando a propriedade acima, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^+(rX) &= -\lambda \mathrm{tr}(rX^+) + \Lambda \mathrm{tr}(rX^-) \\
&= -r\lambda \mathrm{tr}(X^+) + r\Lambda \mathrm{tr}(X^-) \\
&= r\mathcal{P}^+(X).
\end{aligned}$$

(b) Este item é feito de forma inteiramente análoga ao item (a), apenas notando que $(rX)^- = rX^-$.

Passamos agora demonstração do item (c).

(c) Note que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^+(X) &= -\lambda \mathrm{tr}(rX^+) + \Lambda \mathrm{tr}(rX^-) \\
&= -\Lambda \mathrm{tr}(X^+) + \Lambda \mathrm{tr}(X^-) + \Lambda \mathrm{tr}(X^+) - \lambda \mathrm{tr}(X^+) \\
&= -(\Lambda \mathrm{tr}(X^+) - \Lambda \mathrm{tr}(X^-)) + \Lambda \mathrm{tr}(X^+) - \lambda \mathrm{tr}(X^+) \\
&= -\Lambda \mathrm{tr}(X) + \Lambda \mathrm{tr}(X^+) - \lambda \mathrm{tr}(X^+) \\
&= -\Lambda \mathrm{tr}(X) + (\Lambda - \lambda) \mathrm{tr}(X^+).
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^+(X+Y) &\coloneqq \Lambda \mathrm{tr}(X+Y) + (\Lambda - \lambda) \mathrm{tr}[(X+Y)^+] \\
&= -\Lambda \mathrm{tr}(X) - \Lambda \mathrm{tr}(Y) + \Lambda \mathrm{tr}[(X+Y)^+] - \lambda \mathrm{tr}[(X+Y)^-] \\
&\leq -\Lambda \mathrm{tr}(X) - \Lambda \mathrm{tr}(Y) + \Lambda \mathrm{tr}(X^+) + \Lambda \mathrm{tr}(Y^+) \\
&\quad - \lambda \mathrm{tr}(X^+) - \lambda \mathrm{tr}(Y^+) \\
&= -\Lambda \mathrm{tr}(X^+) + \Lambda \mathrm{tr}(X^-) - \Lambda \mathrm{tr}(Y^+) + \Lambda \mathrm{tr}(Y^-) + \Lambda \mathrm{tr}(X^+) \\
&\quad + \Lambda \mathrm{tr}(Y^+) - \lambda \mathrm{tr}(X^+) - \lambda \mathrm{tr}(Y^+) \\
&= \mathcal{P}^+(X) + \mathcal{P}^+(Y).
\end{aligned}$$

E vale observar que na primeira desigualdade usamos a subaditividade do $\operatorname{tr}((X+Y)^+)$.

(d) Note que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^-(X+Y) &= -\Lambda \operatorname{tr}(X^+) + \lambda \operatorname{tr}(X^-)\\
&= -\Lambda \operatorname{tr}(X^+) + \Lambda \operatorname{tr}(X^-) + \lambda \operatorname{tr}(X^-) - \Lambda \operatorname{tr}(X^-)\\
&= -\Lambda \operatorname{tr}(X) + (\lambda+\Lambda)\operatorname{tr}(X^-).
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^-(X+Y) &= -\Lambda \operatorname{tr}(X+Y) + (\lambda+\Lambda)\operatorname{tr}[(X+Y)^-]\\
&= -\Lambda \operatorname{tr}(X) - \Lambda \operatorname{tr}(Y) + \lambda \operatorname{tr}[(X+Y)^-] + \Lambda \operatorname{tr}[(X+Y)^-]\\
&\geq -\Lambda \operatorname{tr}(X^+) - \Lambda \operatorname{tr}(X^-) - \Lambda \operatorname{tr}(Y^+) - \Lambda \operatorname{tr}(Y^-) + \lambda \operatorname{tr}(X^-)\\
&\quad + \lambda \operatorname{tr}(Y^-) + \Lambda \operatorname{tr}(X^-) + \Lambda \operatorname{tr}(Y^-)\\
&= -\Lambda \operatorname{tr}(X^+) + \lambda \operatorname{tr}(X^-) - \Lambda \operatorname{tr}(Y^+) + \lambda \operatorname{tr}(Y^-)\\
&= \mathcal{P}^-(X) + \mathcal{P}^-(Y).
\end{aligned}$$

Para demonstramos o item (e) e o item (f) é importante observar que $(-X)^+ = X^-$ e $(-X)^- = X^+$, pois

$$\begin{aligned}
(-X)^+ &= \begin{cases} -X, & \text{se } -X > 0\\ 0, & \text{se } -X \leq 0 \end{cases}\\
&= \begin{cases} -X, & \text{se } X < 0\\ 0, & \text{se } X \geq 0 \end{cases}\\
&= X^-.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned}
(-X)^- &= \begin{cases} -(-X), & \text{se } -X < 0\\ 0, & \text{se } -X \geq 0 \end{cases}\\
&= \begin{cases} X, & \text{se } X > 0\\ 0, & \text{se } X \leq 0 \end{cases}\\
&= X^+.
\end{aligned}$$

Agora podemos proceder as demonstrações.

(e) Note que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^+(-X) &= -\lambda \operatorname{tr}[(-X)^+] + \Lambda \operatorname{tr}[(-X)^-]\\ &= -\lambda \operatorname{tr}(X^-) + \Lambda \operatorname{tr}(X^+)\\ &= -\mathcal{P}^-(X).\end{aligned}$$

(f) $\mathcal{P}^-(-X) = \mathcal{P}^+(X)$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^-(-X) &= \lambda \operatorname{tr}[(-X)^-] - \Lambda \operatorname{tr}[(-X)^+]\\ &= \lambda \operatorname{tr}(X^+) + \Lambda \operatorname{tr}(X^+)\\ &= -\mathcal{P}^+(X).\end{aligned}$$

(g) Vamos demonstrar cada desigualdade separadamente, começando da esquerda para a direita.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^-(X) - \mathcal{P}^+(Y) &= \mathcal{P}^-(X) + \mathcal{P}^+(Y)\\ &= \mathcal{P}^-(X) - \mathcal{P}^-(Y)\\ &= \mathcal{P}^-(X) + \mathcal{P}^-(-Y)\\ &\leq \mathcal{P}^-(X - Y).\end{aligned}$$

A segunda desigualdade segue direto da (CE), pois tomando $p = q$ e $r = s$ na (CE), temos

$$\mathcal{P}^-(X - Y) \leq \mathcal{P}^+(X - Y).$$

A terceira desigualdade segue da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^+(X) - \mathcal{P}^-(Y) &= \mathcal{P}^+(X) + \mathcal{P}^+(-Y)\\ &= \mathcal{P}^+(X) - \mathcal{P}^+(Y)\\ &= \mathcal{P}^+(X) + \mathcal{P}^+(-Y)\\ &\leq \mathcal{P}^+(X - Y).\end{aligned}$$

Em particular, podemos verificar a convexidade dos operadores de Pucci. Pois

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^+(tX + (1-t)Y) &\leq \mathcal{P}^+(tX) + \mathcal{P}^+((1-t)Y).\\ &= t\mathcal{P}^+(X) + (1-t)\mathcal{P}^+(Y)\end{aligned}$$

E, de forma análoga, mostramos a concavidade dos operadores de Pucci. ■

Para concluir o capítulo, demonstramos que é possível expressar os operadores de Pucci da seguinte forma

$$\mathcal{P}^-(X) \coloneqq \inf_{\lambda I \leq A \leq \Lambda I} \{\mathrm{tr}(AX)\}$$

e

$$\mathcal{P}^+(X) \coloneqq \sup_{\lambda I \leq A \leq \Lambda I} \{\mathrm{tr}(AX)\}$$

em que A é uma matriz simétrica de modo que seus autovalores pertençam a $[\lambda, \Lambda]$, isto é, $\lambda|\xi|^2 \leq A_{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2$ para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^d$. Assim

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AX) &= \mathrm{tr}(AX^+) - \mathrm{tr}(AX^-)\\ &\leq \Lambda\mathrm{tr}(X^+) - \lambda\mathrm{tr}(X^-)\\ &= \mathcal{P}^+(X).\end{aligned}$$

E da mesma forma

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AX) &= \mathrm{tr}(AX^+) - \mathrm{tr}(AX^-)\\ &\geq \lambda\mathrm{tr}(X^+) - \Lambda\mathrm{tr}(X^-)\\ &= \mathcal{P}^-(X).\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\mathcal{P}^-(X) \leq \inf_{\lambda I \leq A \leq \Lambda I} \{\mathrm{tr}(AX)\} \leq \sup_{\lambda I \leq A \leq \Lambda I} \{\mathrm{tr}(AX)\} \leq \mathcal{P}^+(X).$$

Por outro lado, para uma matriz fixada X, construímos $\tilde{A} \in \mathcal{S}(d)$ tal que $\tilde{A} = \Lambda I$, respectivamente $\tilde{A} = \lambda I$, sobre o subespaço linear V_+, respectivamente V_-, gerados pelos autovetores de X correspondentes aos autovalores não-negativos, respectivamente não-positivos, logo

$$\mathcal{P}^+(X) = \mathrm{tr}(\tilde{A}X) \leq \sup_{\lambda I \leq A \leq \Lambda I} \{\mathrm{tr}(AX)\}.$$

E trocando o papel de λ e Λ,

$$\mathcal{P}^-(X) = \mathrm{tr}(\tilde{A}X) \geq \inf_{\lambda I \leq A \leq \Lambda I} \{\mathrm{tr}(AX)\}.$$

Portanto, segue que

$$\mathcal{P}^-(X) = \inf_{\lambda I \leq A \leq \Lambda I} \{\mathrm{tr}(AX)\} \leq \sup_{\lambda I \leq A \leq \Lambda I} \{\mathrm{tr}(AX)\} = \mathcal{P}^+(X),$$

conforme desejávamos.

3
Unicidade de soluções L^p-fortes

Neste capítulo provamos que soluções fortes são únicas, isto é, se existe uma solução L^p-viscosidade que está em $W^{2,p}$ a solução é única.

A seguir apresentaremos uma condição acerca da geometria da fronteira do domínio.

Definição 3.1 (Condição do Cone Exterior) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aberto e limitado. Dizemos que Ω satisfaz a condição do cone exterior se existem $r, \theta > 0$ tais que para todo $x \in \partial\Omega$ é possível encontrar um cone C de abertura θ e vértice na origem satisfazendo*

$$(x + C) \cup B_r(x) \subset \mathbb{R}^d \setminus \Omega. \tag{Cone Exterior}$$

Em seguida, definimos o envelope côncavo e convexo de uma função, bem como o conjunto de contato.

Definição 3.2 (Envelopes côncavo e convexo) *Seja $u \in C(\Omega)$. O envelope côncavo de u no domínio Ω é a função $\Gamma_u^+ : \Omega \to \mathbb{R}$ definida como*

$$\Gamma_u^+(x) := \inf\{h(x) := a + b \cdot x : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^d \text{ e } u(x) \leq a + b \cdot x\}.$$

Por outro lado, o envelope convexo de u é a função $\Gamma_u^- : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\Gamma_u^-(x) := \sup\{h(x) := a + b \cdot x : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^d \text{ e } u(x) \geq a + b \cdot x\}.$$

Dessa forma, definimos o conjunto de contato de u por

$$K^\pm(u, \Omega) := \{x \in \Omega : u(x) = \Gamma_u^\pm(x)\}.$$

Considerando $U \subset \Omega$ um conjunto aberto arbitrário, podemos caracterizar $K^\pm(u, U)$ da seguinte maneira

$$K^+(u, U) := \{x \in \Omega : \exists p \in \mathbb{R}^d \text{ tal que } u(y) \leq u(x) + p \cdot (y - x) \ \forall y \in \Omega\}.$$

e

$$K^-(u,U) := \{x \in \Omega : \exists p \in \mathbb{R}^d \text{ tal que } u(y) \geq u(x) + p \cdot (y-x)\ \forall y \in \Omega\}.$$

Antes de apresentar o primeiro lema desta seção, é relevante ressaltar um teorema que será utilizado como uma ferramenta fundamental. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [8] (Teorema 17.17).

Teorema 3.3 *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^d$ de modo que Ω satisfaça a condição da esfera exterior em cada ponto do bordo. Suponha também que $F \in C^2((\Omega \backslash \mathcal{N}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}(d))$ é côncavo (ou convexo) com respeito a z, p, r, não-crescente com respeito a z e satifaz a* (CE). *Então o problema clássico de Dirichlet*

$$\begin{cases} F(x,u(x),Du,D^2u) = 0 & \text{,em } \Omega \\ u = \psi & \text{,sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tem solução única em $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ para qualquer $\psi \in C^0(\partial\Omega)$.

Lema 3.4 *Seja* (P)*, Ω cumprindo a condição do cone exterior, $f \in L^p(\Omega)$, $\psi \in C(\partial\Omega)$, $\gamma \geq 0$ e $\Omega' \Subset \Omega$. Então existem constantes*

$$C_0 = C(n,p,\gamma,\lambda,\Lambda,\operatorname{diam}(\Omega),\operatorname{dist}(\Omega',\partial\Omega)) \text{ e } \mathrm{C}_1 = \mathrm{C}(\mathrm{n},\gamma,\lambda,\Lambda,\operatorname{diam}(\Omega)),$$

e soluções L^p-fortes $u, v \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ de

$$\mathcal{P}^+(D^2u) + \gamma|Du| \leq f,$$

e

$$f \leq \mathcal{P}^-(D^2v) - \gamma|Dv|,$$

em Ω tal que $u = v = \psi$ sobre $\partial\Omega$. Além disso, u, v satisfazem

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')}, \|v\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq C_0(\|\psi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}), \tag{3.1}$$

e

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega')}, \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\psi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + (\operatorname{diam}(\Omega))^{2-\frac{d}{p}} \cdot C_1 \cdot \|f\|_{L^p(\Omega)}. \tag{3.2}$$

Por fim, se $0 \leq \psi, f (\psi, f \leq 0)$, então $0 \leq u, v$ (respectivamente, $u, v \leq 0$).

Demonstração. Vamos tratar o caso das sub-soluções pois o outro caso é feito de forma inteiramente análoga e também vamos dividir a prova em quatro passos.

Passo 1: Consideremos uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega)$ de forma que $f_n \to f$ em $L^p(\Omega)$ e $|(f_n - f)(x)| \to 0$ em quase todo ponto $x \in \Omega$. Agora utilizamos o Teorema 3.3 para poder garantir a existência de uma sequência $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$ de modo que

$$\mathcal{P}^+(D^2 u_n) + \gamma |Du_n| = f_n \text{ em } \Omega,$$

em que $\psi \in \partial\Omega$. Além disso, como u_n é uma solução clássica, temos que

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\psi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + C_1 \cdot (\mathrm{diam}(\Omega))^{2-\frac{d}{p}} \cdot \|f\|_{L^p(\Omega)} \, .$$

Passo 2: Começamos com o argumento de cobertura. Para todo $\Omega' \Subset \Omega$ e $0 < r < 1$ existe uma família finita de bolas abertas $B_r(x_1), ..., B_r(x_m)$ com $x_i \in \Omega'$ para todo $i = 1, ..., m$ tal que:

$$\Omega' \subset \left(\bigcup_{i=1}^{m} B_{r/2}(x_1) \right)$$

e

$$\overline{B_r(x_i)} \subset \Omega \quad \text{para} \quad i = 1, ..., m.$$

Assim, é suficiente derivar (3.1) em $B_{1/2}$.

Agora seja $\rho \in (0,1)$. Escolhemos $\eta \in C_0^2(B_r)$ satisfazendo $0 \leq \eta \leq 1$ de modo que

$$\eta \equiv 1 \quad \text{em} \quad B_{\rho r} \quad \text{e} \quad \eta \equiv 0 \quad \text{em} \quad B_r \setminus B_{\overline{\rho} r}$$

para

$$\overline{\rho} := \frac{1+\rho}{2}$$

Refinamos a escolha de η para garantir que

$$|D\eta| \leq \frac{4}{(1-\rho)r} \quad \text{e} \quad \left\| D^2 \eta \right\| \leq \frac{16}{((1-\rho)r)^2}.$$

Observe que $\eta u_n \in C_0^2(B_{\overline{\rho} r})$ e

$$D^2(\eta u_n) = \eta D^2 u_n + 2D\eta \otimes DU_n + u_n D^2 \eta$$

Além disso, estendemos ηu_n como sendo zero fora de $B_{\overline{\rho} r}$ e definimos $\overline{f}(x) := \mathcal{P}^+(D^2(\eta u_n)(x))$. Segue que ηu_n é uma solução de viscosidade de

$$\mathcal{P}^+(D^2 w) = \overline{f} \quad \text{na} \quad B_r$$

com $w = 0$ sobre ∂B_r. Segue de [3] que

$$\left\| D^2(\eta u_n) \right\|_{L^p(B_{\overline{\rho} r})} \leq C \left\| \overline{f} \right\|_{L^p(B_{\overline{\rho} r})},$$

para alguma constante universal $C > 0$; também podemos ver esse fato em [4] (capítulo 7). Como uma consequência, temos

$$\begin{aligned}
\left\|D^2u_n\right\|_{L^p(B_{\rho r})} &\leq \left\|D^2(\eta u_n)\right\|_{L^p(B_{\overline{\rho}r})}\\
&\leq C\left\|\mathcal{P}^+(D^2(\eta u_n))\right\|_{L^p(B_{\overline{\rho}r})}\\
&\leq C\left\|\mathcal{P}^+(\eta D^2(u_n) + 2D\eta \otimes Du_n + u_n D^2\eta)\right\|_{L^p(B_{\overline{\rho}r})}\\
&\leq C(\gamma)\left(\|f_n\|_{L^p(B_{\overline{\rho}r})} + \frac{\|Du_n\|_{L^p(B_{\overline{\rho}r})}}{(1-\rho)r} + \frac{\|u_n\|_{L^p(B_{\overline{\rho}r})}}{((1-\rho)r)^2}\right),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

em que $C(\gamma) = C(C, \gamma)$.

Passo 3: Agora vamos usar uma desigualdade de interpolação para refinar a estimativa de (3.3). Em particular, estamos interessado em remover a dependência da norma L^p de Du_n. Para $k \in \mathbb{N}$ consideramos

$$\Psi_k(w) \coloneqq \sup_{\rho\in(0,1)} (1-\rho)^k r^k \left\|D^k w\right\|_{L^p(B_{\rho r})}$$

Observe que podemos reescrever a última desigualdade de (3.3) em termos de Ψ_k, pois de fato, temos

$$\Psi_2(u_n) \leq C((r^2\|f_n\|_{L^p(B_r)} + \Psi_1(u_n)) + \Psi_0(u_n))$$

A desigualdade de interpolação padrão gera

$$\Psi_1(u_n) \leq \varepsilon\Psi_2(u_n) + \frac{C}{\varepsilon}\Psi_0(u_n)$$

para todo $0 < \varepsilon \ll 1$. Pela escolha do ε pequeno o suficiente, segue que

$$\left\|D^2u_n\right\|_{L^p(B_{\rho r})} \leq C(\|u_n\|_{L^\infty(B_r)} + \|f_n\|_{L^p(B_r)}).$$

Concluímos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $W^{2,p}_{loc}(B_r)$. Como consequência existe um limite fraco u_∞ tal que $u_n \to u_\infty$ em $W^{2,p}_{loc}(B_r)$. Primeiramente, a semi-continuidade inferior da norma gera

$$\begin{aligned}
\left\|D^2u_\infty\right\| &\leq \liminf_{n\to\infty}\left\|D^2u_n\right\|_{L^p(B_{\rho r})}\\
&\leq C\liminf_{n\to\infty}(\|u_n\|_{L^\infty(B_r)} + \|f_n\|_{L^p(B_r)})\\
&\leq C(\|u_\infty\|_{L^\infty(B_r)} + \|f\|_{L^p(B_r)}).
\end{aligned}$$

Ao perceber que $\|u_\infty\|_{L^\infty(B_r)} \leq \|g\|_{L^\infty(\partial B_r)}$, a estimativa em (3.1) segue. Revisitando (3.2) concluímos que u_∞ também satisfaz (3.2). Finalmente, a semi-continuidade fraca inferior dos operadores de Pucci implica que

$$\mathcal{P}^+(D^2u_\infty) + \gamma|Du_\infty| \leq \liminf_{n\to\infty}(\mathcal{P}^+(D^2u_n) + \gamma|Du_n|) \leq f.$$

E então nos resta verificar que $u_\infty \in C(\overline{B_r})$.

Passo 4: Provamos que $u_\infty \in C(\overline{B_r})$ verificando que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy nesse espaço. Como $\mathcal{P}^+$ é subaditivo, temos

$$\begin{aligned} f_n &= \mathcal{P}^+(D^2(u_n - u_m + u_m)) + \gamma|D(u_n - u_m + u_m)| \\ &\leq \mathcal{P}^+(D^2(u_n - u_m)) + \gamma|D(u_n - u_m)| + f_m, \end{aligned}$$

em que

$$f_n - f_m \leq \mathcal{P}^+(D^2(u_n - u_m)) + \gamma|D(u_n - u_m)|.$$

Observando que $u_n = u_m = g$ sobre ∂B_r e revertendo a ordem de u_n e u_m, pelo princípio do máximo temos

$$\sup_{B_r}(u_n - u_m)^-, \sup_{B_r}(u_m - u_n)^- \leq C\left\|f_n - f_m\right\|_{L^p(B_r)} \to 0$$

quando $n, m \to \infty$. Portanto, $\|u_n - u_m\|_{L^\infty(B_r)} \to 0$ quando $n, m \to \infty$ e a sequência é de Cauchy em $C(\overline{B_r})$, o que completa a demonstração. ∎

Proposição 3.5 *Seja $f \in L^d(\Omega)$ e $u \in C(\overline{\Omega})$. Se u é uma solução L^d-viscosidade de*

$$\mathcal{P}^-(D^2u) - \gamma|Du| \leq f \text{ em } \{u > 0\},$$

então

$$\sup_\Omega u^+ \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + \operatorname{diam}(\Omega)C\left\|f^+\right\|_{L^d(\Gamma^+(u^+))}.$$

em que $C = C(\lambda, \gamma, n, \operatorname{diam}(\Omega))$. Da mesma forma, se u é uma solução L^d-viscosidade de

$$\mathcal{P}^-(D^2u) - \gamma|Du| \geq f \text{ em } \{u < 0\},$$

então

$$\sup_\Omega u^- \leq \sup_{\partial\Omega} u^- + \operatorname{diam}(\Omega)C\left\|f^-\right\|_{L^d(\Gamma^+(u^+))}.$$

Demonstração. Seja Ω satisfazendo a condição do cone exterior. Seja $(f_n) \subset C^\infty(\Omega)$ tal que $f_n \to f$ em $L^p(\Omega)$ e $|f_n - f| \to 0$ em quase todo ponto $x \in \Omega$.

Seja $\psi_n \in W^{2,d}_{loc} \cap C(\overline{\Omega})$ solução de

$$\begin{cases} \mathcal{P}^+(D^2\psi_n) + \gamma|D\psi_n| \leq f_n - f & \text{, em } \Omega, \\ \psi_n = 0 & \text{, sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, como ψ_n é uma solução clássica, tem-se que$\|\psi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1(\text{diam}(\Omega))^{2-\frac{d}{p}} \|f_n\|_{L^p(\Omega)}$, isto é, $\|\psi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$. Então pelo item (g) da Proposição 2.18, temos que

$$\mathcal{P}^-(D^2(u+\psi_n)) \leq \mathcal{P}^+(D^2\psi_n) + \mathcal{P}^-(D^2u)$$

e

$$|Du| - D\psi_n \leq |Du - D\psi_n|.$$

Definindo $w \coloneqq u + \psi_n - \|\psi_n\|_{L^\infty}(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^-(D^2w) - \gamma|Dw| &= \mathcal{P}^-(D^2(u+\psi_n - \|\psi_n\|_{L^\infty(\Omega)})) - \gamma|D(u+\psi_n - \|\psi_n\|_{L^\infty(\Omega)})| \\
&\leq \mathcal{P}^-(D^2u) + \mathcal{P}^+(D^2(\psi_n - \|\psi_n\|_{L^\infty}(\Omega))) - \gamma|D(u+\psi_n)| \\
&\quad + \gamma|D\|\psi_n\|_{L^\infty(\Omega)}| \\
&\leq \mathcal{P}^-(D^2u) + \mathcal{P}^+(D^2\psi_n) - \mathcal{P}^-(D^2\|\psi_n\|_L^\infty(\Omega)) - \gamma|Du| \\
&\quad - \gamma|D\psi_n| + \gamma|D\|\psi_n\|_{L^\infty(\Omega)}| \\
&\leq f + \mathcal{P}^+(D^2\psi_n) - \gamma|D\psi_n| - \mathcal{P}^-(D^2\|\psi_n\|_{L^\infty}(\Omega)) \\
&\quad + \gamma|D\|\psi_n\| L^\infty(\Omega)| \\
&\leq f + f_n - f \\
&= f.
\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{P}^-(D^2w) - \gamma|Dw| \leq f_n$ em $\{w > 0\} \subset \{u > 0\}$. E como $\mathcal{P}^-(D^2u) - \gamma|Du| + \mathcal{P}^+(D^2\psi_n) + \gamma|D\psi_n|$ é contínua, pela Proposição , segue que

$$\sup_{\Omega} w \leq \sup_{\partial\Omega} w^+ + \text{diam}(\Omega)C\left\|f_n^+\right\|_{L^d(\Gamma^+(w^+))},$$

em que $C = C(\lambda, \gamma, n, \text{diam}(\Omega))$.

Portanto, tomando $n \to \infty$ temos

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + \text{diam}(\Omega)C\left\|f_n^+\right\|_{L^d(\Gamma^+(u^+))},$$

em que $C = C(\lambda, \gamma, n, \text{diam}(\Omega))$. ■

Definição 3.6 *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Dizemos que u é duas vezes superdiferenciável* *(ou subdiferenciável) em $x \in \Omega$ se existe $(p, X) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}(d)$ tal que*

$$u(y) \leq u(x) + \langle p, y - x \rangle + \frac{1}{2} \langle X(y - x), y - x \rangle + o(|y - x|^2)$$

$$(u(y) \geq u(x) + \langle p, y - x \rangle + \frac{1}{2} \langle X(y - x), y - x \rangle + o(|y - x|^2))$$

quando $y \to x$. Essa relação é abreviada por $(p, X) \in \mathcal{D}^{2,+}u(x)$ ($(p, X) \in \mathcal{D}^{2,-}u(x)$).

Proposição 3.7 *Considere F satisfazendo a* (CE), (P) *e $f \in L^p(\Omega)$. Então, existe um conjunto de medida nula $\mathcal{N}' \subset \Omega$ tal que se u é uma solução L^p-viscosidade de $F \leq f$ em Ω e $x \in \Omega \setminus \mathcal{N}'$ e $(p, X) \in \mathcal{D}^{2,+}u(x)$ então*

$$F(x, u(x), p, X) \leq f(x).$$

Demonstração. Definimos $G(x, r, p, X) \coloneqq F(x, r, p, X) - f(x)$. Sejam $\mathcal{C} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}(d)$ um conjunto enumerável denso, $\mathcal{L}(r, p, X)$ conjunto dos pontos de Lebesgue de $G(x, r, p, X)$, isto é, pontos $x \in \Omega$ tais que

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{|B_\rho(x)|} \int_{B_\rho(x)} |G(y, r, p, X) - G(x, r, p, X)|^p dy = 0.$$

Pelo Teorema de Lebesgue, $\mathcal{L}(r, p, X)$ tem medida total para (r, p, X) fixos, e portanto

$$\mathcal{E} = \bigcap_{(r,p,X) \in \mathcal{C}} \mathcal{L}(r, p, X),$$

já que $G(x, r, p, X)$ é contínuo em (r, p, X) uniformemente em x q.t.p. $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}(r, p, X)$, para todos (r, p, X).

Afirmação 3.8 *Se $\hat{x} \in \mathcal{E}$ e $(p, X) \in \mathcal{D}^{2,+}u(\hat{x})$, então $G(\hat{x}, u(\hat{x}), p, X) \leq 0$.*

A prova da afirmação será feita por contradição. Sendo assim, suponha que existe $\delta > 0$ de forma que $0 < \delta < G(\hat{x}, u(\hat{x}), p, X)$. Sem perda de generalidade, podemos assumir, por meio de translações, que $\hat{x} = 0$. Consequentemente, pela hipótese de que $(p, X) \in \mathcal{D}^{2,+}u(x)$ temos que

$$u(y) \leq u(0) + \langle p, y \rangle + \frac{1}{2} \langle Xy, y \rangle + o(|y|^2),$$

e $0 < \delta < G(0, u(0), p, X)$. Também podemos substituir X por $X + 2\eta I$, em que $\eta > 0$ suficientemente pequeno de modo que continua valendo

$0 < \delta < G(0, u(0), p, X)$ enquanto

$$\begin{aligned} u(y) &\leq u(0) + \langle p, y\rangle + \frac{1}{2}\langle (X + 2\eta I)y, y\rangle + o(|y|^2) \\ &= u(0) + \langle p, y\rangle + \frac{1}{2}(\langle Xy + 2\eta Iy, y\rangle) + o(|y|^2) \\ &= u(0) + \langle p, y\rangle + \frac{1}{2}\langle Xy, y\rangle + \frac{1}{2}2\eta\langle Iy, y\rangle + o(|y|^2) \\ &= u(0) + \langle p, y\rangle + \frac{1}{2}\langle Xy, y\rangle + \eta\langle Iy, y\rangle + o(|y|^2). \end{aligned}$$

A partir de agora, definimos $\psi(y) \coloneqq \eta\langle Iy, y\rangle + o(|y|^2) > 0$.

O objetivo é produzir uma solução L^p-forte $\varphi \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ de

$$G(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) > 0$$

em uma vizinhança de 0 de modo que $u - \varphi$ tenha um ponto de máximo local nessa vizinhança. No entanto, a construção dessa solução resulta em u não ser uma subsolução de L^p-viscosidade, pois contradiz a afirmação de que $(u - \varphi)$ não possui um ponto de máximo local em nessa vizinhança.

Assim, nosso objetivo agora é produzir essa solução L^p-forte $\varphi \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ para encontrarmos essa contradição. Para isso, colocamos

$$\varphi(y) = u(0) + \langle p, y\rangle + \frac{1}{2}\langle Xy, y\rangle + \psi(y).$$

Logo, pela (CE) temos

$$\begin{aligned} &G(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) - G(0, u(0), p, X) \\ &= G(x, u(x), p + Xx + D\psi(x), X + D^2\psi(x)) - G(0, u(0), p, X) \\ &\geq \mathcal{P}^-(D^2\psi(x)) - \omega_R(u(0) - u(x)) - \gamma|p + Xx + D\psi(x) - p| \\ &= \mathcal{P}^-(D^2\psi(x)) - \omega_R(u(0) - u(x)) - \gamma|Xx + D\psi(x)|. \end{aligned}$$

Então, se mostrarmos que

$$G(0, u(0), p, X) - G(x, u(0), p, X) > \mathcal{P}^-(D^2\psi(x)) - \gamma|Xx + D\psi(x)| - \omega_R(u(0) - u(x)),$$

vamos encontrar a contradição.

Para isso vamos usar o Lema 3.1 porque daí podemos garantir a existência de uma solução ψ da desigualdade acima em B_r de modo que $\psi = 0$ sobre ∂B_r. Além disso, novamente pelo Lema 3.1, tem-se que

$$\begin{aligned}\|\psi\|_{L^\infty(B_r)} &\leq \|\psi\|_{L^\infty(\partial B_r)} + C_1(\mathrm{diam}(B_r))^{2-\frac{d}{p}} \|f\|_{L^p(B_r)} \\ &= C_1(2r)^{2-\frac{d}{p}}\left(\int_{B_r(x)} |G(0,u(0),p,X) - G(x,u(0),p,X)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Usando a hipótese de que x é um ponto de Lebesgue, tem-se que

$$\|\psi\|_{L^\infty(B_r)} = o(r^2).$$

Como $(u-\varphi) \leq -\eta r^2$ sobre ∂B_r e $(u-\varphi)(0) = -\psi(0) = o(r^2)$, tem-se que $u-\varphi$ tem um máximo dentro de B_r, criando assim a contradição desejada.

Portanto, mostramos que existe um conjunto $\mathcal{N}' \subset \Omega$ de medida de Lebesgue nula que satisfaz as hipóteses da proposição. ■

Proposição 3.9 *Seja $f \in L^d_{loc}(\Omega)$ e u solução L^d-viscosidade de $\mathcal{P}^-(D^2u) - \gamma|Du| \leq f$ em Ω. Então, u é duas vezes superdiferenciável em quase todo ponto Ω. Em particular, se F satisfaz* (CE) *e u é uma solução L^d-viscosidade de $F = 0$, então, u é duas vezes diferenciável em quase todo ponto e as derivadas pontuais satisfazem a equação em quase todo ponto.*

Demonstração. Vamos tratar do caso das subsoluções. Fixe $y \in \Omega$, $0 < R < 1$ tal que $B = B_R(y) \subset \Omega$. Dado $k \geq 1$, definimos

$$u_k \coloneqq u - \frac{k}{2}(|x-y|^2 - R^2).$$

Então

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^-(D^2u_k) - \gamma|Du_k| &= \mathcal{P}^-(D^2u - kI) - \gamma|Du - k(x-y)| \\ &\leq \mathcal{P}^-(D^2u) - \gamma|Du| - \mathcal{P}^-(kI) + kR\gamma \\ &\leq f + k(n\Lambda + R\gamma) \qquad \text{em} \quad B.\end{aligned}$$

Pela Proposição 3.3, temos que

$$\begin{aligned}u_k(x) &\leq \sup_{\partial B} u + RC(\|f\|_{L^d(B)} + k|\Gamma^+(u_k,B)|^{\frac{1}{n}}) \\ &\leq \sup_B u + RC(\|f\|_{L^d(B)} + k|\Gamma^+(u_k,B)|^{\frac{1}{n}}),\end{aligned}$$

em B para alguma constante C independente de k e $R \leq 1$. Como $\inf_B u + (\frac{k}{2})R^2 \leq \sup_B u_k$, concluímos que

$$\inf_B u + \frac{k}{2}R^2 \leq \sup_B u + RC(\|f\|_{L^d(B)} + k|\Gamma^+(u_k,B)|^{\frac{1}{n}}).$$

Agora observamos que se $E^+(v)$ é o conjunto de pontos tais que v é duas vezes superdiferenciável, então $E^+(u_k) = E^+(u)$ e $\Gamma^+(u_k, B) \subset E^+(u_k)$. Tomando $k \to \infty$ obtemos

$$\frac{R^2}{2} \leq RC|E^+(u) \cap B_R(y)|^{\frac{1}{}n}$$

ou

$$\left(\frac{1}{2C}\right)^d \leq \frac{|E^+(u) \cap B_R(y)|}{R^d}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{\omega_n}\left(\frac{1}{2C}\right)^d \leq \frac{|E^+(u) \cap B_R(y)|}{|B_R(y)|},$$

para todo $y \in \Omega$ e $0 < R < 1$ de forma que $\overline{B_R(y)} \subset \Omega$. Isso implica que a densidade de Lebesgue do complementar de $E^+(u)$ é menor do que 1 em todo ponto de Ω, e portanto é nula. Concluímos que $|E^+(u)| = |\Omega|$ e que u é duas vezes superdiferenciável em quase todo ponto. ■

Proposição 3.10 *Seja $f \in L^p_{loc}(\Omega)$,* (P) *e u solução L^p-viscosidade de $\mathcal{P}^-(D^2u) - \gamma|Du| \leq f$ em Ω. Então, u é duas vezes superdiferenciável em quase todo ponto Ω. Em particular, se F satisfaz* (CE) *e u é uma solução L^p-viscosidade de $F = 0$, então, u é duas vezes diferenciável em quase todo ponto e as derivadas pontuais satisfazem a equação em quase todo ponto.*

Demonstração. Tendo em vista que Ω contém toda $B_r(x)$, podemos aplicar o Lema 3.1 para obter uma função ψ pertencente ao espaço $W^{2,p}_{\text{loc}}(B_r(x))$ de modo que essa função satisfaça a desigualdade $\mathcal{P}^-(D^2\psi) - \gamma|D\psi| \geq f$ em todo o domínio $B_r(x)$.

Portanto, podemos afirmar que $(u - \psi)$ é uma subsolução de L^p-viscosidade de

$$\mathcal{P}^-(D^2(u - \psi)) - \gamma|D(u - \psi)| \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Segue, portanto, a partir da Proposição 3.5, que $(u - \psi)$ é duas vezes superdiferenciável em $B_r(x)$. Além disso, pela Proposição 2.9, sabemos que ψ é duas vezes diferenciável em quase todos os pontos. Com base nisso, podemos concluir o resultado desejado. ■

Corolario 3.11 *Considere F satisfazendo a* (CE), (P) *e $f \in L^p(\Omega)$. Se $u \in W^{2,p}(\Omega)$ é uma subsolução L^p-viscosidade de $F = f$ em Ω, então u é subsolução L^p-forte de $F = f$ em Ω.*

Demonstração. Vamos abordar o caso das subsoluções, uma vez que o caso das supersoluções é inteiramente análogo.

Com base na Proposição 3.7, podemos afirmar que existe um conjunto de medida nula $\mathcal{N}' \subset \Omega$ tal que se u é subsolução L^p-viscosidade de $F \leq f$ em Ω, $x \in \Omega \setminus \mathcal{N}'$ e $(Du(x), D^2u(x)) \in \mathcal{D}^{2,+}u(x)$, então

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \leq f(x).$$

Logo, $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ é subsolução L^p-forte de $F = f$ em Ω. De maneira análoga, provamos que

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \geq f(x).$$

Isto é, $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ é supersolução L^p-forte de $F = f$ em Ω. Portanto, $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ é subsolução L^p-forte de $F = f$ em Ω, conforme desejávamos.

■

Teorema 3.12 *Sejam F satisfazendo* (CE), *F_m satisfazendo* (CE) *para $m = 1, 2, ...,$* (P)*,$f \in L^p(\Omega)$, $f_m \in L^p$ para $m = 1, 2, ...$ e $u_m \in C(\Omega)$ subsolução L^p-viscosidade de*

$$F_m(x, u_m(x), Du_m, D^2u_m) = f_m \ \text{em } \Omega$$

para $m = 1, 2, ...$ Assuma que $u_m \to u$ localmente uniforme quando $m \to \infty$, e que para $B_r(x_0) \subset \Omega$ e $\varphi \in W^{2,p}(B_r(x_0))$, se

$$g_m(x) = F_m(x, u_m(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) - f_m(x)$$

$$g(x) = F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) - f(x),$$

então

$$\left\|(g - g_m)^+\right\|_{L^p(B_r(x_0))} \to 0.$$

Assim, u é uma subsolução L^p-viscosidade de $F = f$.

Demonstração. A prova será feita por contradição.

Suponha, por absurdo, que u não é uma subsolução L^p-viscosidade de $F = f$. Logo, existe $x_0 \in \Omega, \varepsilon, \delta, r > 0$ tais que $B_r(x_0) \subset \Omega$ e $\varphi \in W^{2,p}(B_r(x_0))$ de modo que $F(x, u(x), D\varphi, D^2\varphi) > f + \varepsilon$ em $B_r(x_0)$, mas

$$(u - \varphi)(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad u - \varphi < -\delta \ \text{ sobre } \partial\Omega. \tag{3.4}$$

Sendo assim, buscamos $\varphi_m \in W^{2,p}_{loc}(B_r(x_0)) \cap C(\overline{B_r(x_0)})$ tal que

$$\|\varphi_m\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \to 0 \tag{3.5}$$

e

$$F_m(x, u_m(x), D(\varphi + \varphi_m), D^2(\varphi + \varphi_m)) \geq f_m(x) + \varepsilon, \quad \text{em} \quad B_r(x_0). \tag{3.6}$$

Buscamos φ_m da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
&F_m(x, u_m(x), D(\varphi + \varphi_m), D^2(\varphi + \varphi_m)) - f_m(x) \\
&\quad \geq F(x, u(x), D(\varphi), D^2(\varphi)) - f(x) + \mathcal{P}^-(D^2\varphi_m) - \gamma|D\varphi_m| + g_m(x) - g(x) \\
&\quad \geq \varepsilon + g_m(x) - g(x) + \mathcal{P}^-(D^2\varphi_m) - \gamma|D\varphi_m|.
\end{aligned}$$

Então, podemos escolher φ_m como no Lema 3.1, o que resolve

$$\begin{cases}
\mathcal{P}^-(D^2\varphi_m) - \gamma|D\varphi_m| \geq (g - g_m)^+ & \text{, em } B_r(x_0) \\
\varphi_m = 0 & \text{, sobre } \partial B_r(x_0).
\end{cases}$$

Como $(g - g_m)^+ \to 0$ em $L^p(B_r(x_0))$ por hipótese, temos que $\varphi_m \to 0$ uniformemente, conforme desejávamos.

Mas isso gera uma contradição pois $u_m - (\varphi + \varphi_m)$ deveria ser maior do que x_0 sobre $\partial B_r(x_0)$ para m grande, devido a (3.4), (3.5) e da convergência uniforme de $u_m \to u$ em $B_r(x_0)$. Assim, $u_m - (\varphi + \varphi_m)$ tem um máximo dentro de $B_r(x_0)$, o que é impossível por (3.6) e pela hipótese de que u_m é subsolução.

■

Na próxima consequência, apresentamos o principal resultado desta dissertação. Explicaremos como a teoria que desenvolvemos nos permite obter soluções fortes para problemas não- lineares. Embora apresentemos um caso simples aqui, esse procedimento é bem-sucedido de forma muito mais abrangente.

Corolario 3.13 *Seja Ω satisfazendo a condição do cone exterior e seja $F(p, X)$ convexo em (p, X), satisfazendo a* (CE) *e $|F(0, \delta X)| \leq k|F(0, X)|$, para todo $0 \leq \delta \leq 1$. Seja* (P)*, $f \in L^p(\Omega)$ e $\psi \in C(\partial\Omega)$. Então existe uma única solução L^p-forte $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ de*

$$\begin{cases}
F(Du, D^2u) = f_m & \text{, em } \Omega \\
u = \psi & \text{, sobre } \partial\Omega.
\end{cases}$$

Além disso, para todo $\Omega' \Subset \Omega$, existe uma constante $C = C(n, p, \gamma, \lambda, \Lambda, \mathrm{diam}(\Omega))$ tal que

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq C(\|\psi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}).$$

Demonstração. Seja $f_m \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\|f - f_m\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Como F é convexa, existe soluções clássicas $u_m \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ de

$$\begin{cases} F(Du_m, D^2u_m) = f_m & \text{, em } \Omega \\ u_m = \psi & \text{, sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Agora definimos

$$f_j \coloneqq F(Du_k + D(u_j - u_k), D^2u_k + D^2(u_j - u_k)).$$

Mas como $F(p, X)$ satisfaz (CE), temos

$$\begin{aligned} f_j &\coloneqq F(Du_k + D(u_j - u_k), D^2u_k + D^2(u_j - u_k)) \\ &\leq \mathcal{P}^+(D^2u_k + D^2(u_j - u_k)) + \gamma|Du_k + D(u_j - u_k)| \\ &\leq \mathcal{P}^+(D^2u_k) + \mathcal{P}^+(D^2(u_j - u_k)) + \gamma|Du_k| + \gamma|D(u_j - u_k)| \\ &= \mathcal{P}^+(D^2u_k) + \gamma|Du_k| + \mathcal{P}^+(D^2(u_j - u_k)) + \gamma|D(u_j - u_k)|. \end{aligned}$$

Já que $f_k \coloneqq F(Du_k, D^2u_k)$ e consequentemente

$$f_k \coloneqq F(Du_k, D^2u_k) \leq \mathcal{P}^+(D^2u_k) + \gamma|Du_k|.$$

Assim

$$f_j \leq \mathcal{P}^+(D^2(u_j - u_k)) - \gamma|D(u_j - u_k)| + f_k,$$

equivalentemente,

$$f_j - f_k \leq \mathcal{P}^+(D^2(u_j - u_k)) + \gamma|D(u_j - u_k)|.$$

E assim, como na prova do Lema 3.1

$$\|u_j - u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\,\|f_j - f_k\|_{L^p(\Omega)} \to 0 \quad j, k \to \infty.$$

Consequentemente, $u_m \to u$ uniformemente para algum u. Aplicando o Teorema para $F_m(x, r, p, X) = F(p, X)$, temos que u é uma solução L^p-viscosidade de $F(Du, D^2u) = f$ em Ω e $u = \psi$ sobre $\partial\Omega$. Segue que

$$\|u_m\|_{W^{2,p}_{loc}(\Omega')} \leq C(\|\psi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|f_m\|_{L^p(\Omega)}),$$

em que $C = C(\Lambda, \lambda, n, p, K, \operatorname{diam}(\Omega), \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega))$ e portanto encontramos $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$. Segue do último Corolário que u é uma solução L^p-forte. ■

Para concluir esta dissertação, iremos ilustrar uma aplicação do corolário mencionado e apresentar um exemplo prático de como resolver certos tipos de equações.

Exemplo 3.14 *Sejam $f \in L^p(\Omega)$, Ω satisfazendo a condição do cone exterior,* (P) *e*

$$F(x,X) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \{-\mathrm{tr}(A_\alpha(x)X)\}$$

em que $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$, tem módulo de continuidade uniforme e satisfaz $\lambda I \leq A_\alpha \leq \Lambda I$ uniformemente em x, α. Nosso objetivo é mostrar que para qualquer função contínua $\varphi \in C(\Omega)$ o problema

$$\begin{cases} F(x, D^2u) = f & \text{,em } \Omega \\ u = \psi & \text{,sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma única solução L^p-viscosidade (e L^p-forte) $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Para isso vamos definir A^ε_α e f^ε como sendo os molificadores de A_α e f, respectivamente. Também consideramos F^ε como

$$F^\varepsilon(x,X) \coloneqq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \{-\mathrm{tr}(A^\varepsilon_\alpha(x)X)\}.$$

Pelo Teorema 3.3 (ou pelas estimativas $C^{2,\beta}$ apresentadas em [3], Teorema 3) podemos garantir a existência de uma função $u^\varepsilon \in C^{2,\beta}_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que é solução de

$$\begin{cases} F^\varepsilon(x, D^2u^\varepsilon) = f^\varepsilon & \text{,em } \Omega \\ u^\varepsilon = \psi & \text{,sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Segue de [5] (Teorema 1) que a seguinte desigualdade

$$\|u\|_{W^{2,p}_{loc}(\Omega')} \leq C\bigg(\|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)} \bigg),$$

em que $\Omega' \subset \Omega$, é satisfeita com u^ε e f^ε no lugar de u e f, isto é

$$\|u^\varepsilon\|_{W^{2,p}_{loc}(\Omega')} \leq C\bigg(\|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|f^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \bigg).$$

Além disso, usando o Lema 3 em [5] podemos mostrar que

$$\|u^\varepsilon\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq C\, \|f\|_{L^p(B_1)}\,,$$

em que $\Omega \subset B_1, \alpha \in (0,1), C = C\left(\dfrac{\Lambda}{\lambda}, \gamma\right)$ e γ é tal que $\gamma > 0$ e para todo $x \in \partial\Omega$ e $r > 0, |B_r(x) \cap (\mathbb{R}^d \setminus \Omega)| \geq \gamma |B_r(x)|$. Isso significa que u^ε tem módulo de continuidade sobre $\overline{\Omega}$ e independente de ε.

Assim, podemos escolher uma subsequencia convergente quando $\varepsilon \downarrow 0$, ou seja, $u_m^\varepsilon \to u$. Então pelo Teorema 3.12 temos que u é solução L^p-viscosidade de

$$\begin{cases} F(x, D^2u) = f & ,\textit{em } \Omega \\ u = \psi & ,\textit{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

A unicidade é garantida pelo Teorema 2.20.

Referências bibliográficas

[1] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. **Sobolev spaces**. Elsevier, 2003.

[2] CAFFARELLI, L.; CRANDALL, M. G.; KOCAN, M. ; ŚWIĘCH, A. On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients, **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v.49, n.4, p. 365–398, 1996.

[3] CAFFARELLI, L. A. Interior a priori estimates for solutions of fully non-linear equations, **Annals of Mathematics**, v.130, n.1, p. 189–213, 1989.

[4] CAFFARELLI, L. A.; CABRÉ, X. **Fully nonlinear elliptic equations**, volume 43. American Mathematical Soc., 1995.

[5] ESCAURIAZA, L. W2, n a priori estimates for solutions to fully non-linear equations, **Indiana University mathematics journal**, p. 413–423, 1993.

[6] EVANS, L. C.; GARIEPY, R. F. Measure theory and fine properties of functions crc press, **Studies in Advances Mathematics**, 1992.

[7] FABES, E.; STROOCK, D. The lp-intergrability of green's functions andfundamental solutions for elliptic and parabolic equations. 1983.

[8] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order**, volume 224. Springer, 1977.

[9] LIONS, P.-L. A remark on bony maximum principle, **Proceedings of the American Mathematical Society**, v.88, n.3, p. 503–508, 1983.

[10] PIMENTEL, E. A. **Elliptic Regularity Theory by Approximation Methods**, volume 477. Cambridge University Press, 2022.

A
Propriedades da subconvolução

Nesta seção do apêndice, abordaremos a definição da sub-convolução, juntamente com algumas de suas propriedades. É importante destacar que essa ferramenta é amplamente empregada em vários teoremas relacionados ao tema de pesquisa desta dissertação, tornando-se especialmente relevante na Proposição 2.17.

Definição A.1 (Sub e Inf Convoluções) *Seja $u \in C(\overline{\Omega})$. Para $\varepsilon > 0$, definimos o sub-convolução u^ε de u por*

$$u^\varepsilon(x) := \sup_{y\in\Omega}\left(u(y) - \frac{|y-x|^2}{2\varepsilon}\right)$$

Do mesmo modo, o inf-convolução u_ε de u é definido como

$$u_\varepsilon(x) := \inf_{y\in\Omega}\left(u(y) + \frac{|y-x|^2}{2\varepsilon}\right)$$

Lema A.2 (Convergência Uniforme do sub e do inf-convoluções) *Seja $u \in C(\overline{\Omega})$. Para $\varepsilon > 0$ consideramos u^ε e u_ε como na Definição A.1. Então*

$$u_\varepsilon \to u \quad e \quad u^\varepsilon \to u$$

uniformemente em Ω, quando $\varepsilon \to 0$

Demonstração. Vamos provar o lema para o caso do sub-convolução, pois o caso do inf-convolução é inteiramente análogo.

Como u é contínua no conjunto compacto $\overline{\Omega}$, u é uniformemente contínua e tem um módulo de continuidade. Representamos por $\omega(\cdot)$ o módulo de continuidade de u em $\overline{\Omega}$. Segue que

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &= u(x^\varepsilon) - \frac{|x^\varepsilon - x|^2}{2\varepsilon} \\ &\le u(x^\varepsilon) - u(x) + u(x) \\ &\le u(x) + \omega(|x^\varepsilon - x|) \end{aligned}$$

Como $u^\varepsilon \geq u$, temos

$$|u^\varepsilon(x) - u(x)| \leq \omega\left(2\sqrt{\varepsilon \|u\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)$$

Conforme desejávamos. ∎

Note que

$$(-u)^\varepsilon(x) = \sup_{y\in\Omega}\left(-u(y) - \frac{|y-x|^2}{2\varepsilon}\right) = -\inf_{y\in\Omega}\left(u(y) + \frac{|y-x|^2}{2\varepsilon}\right),$$

ou seja, $u_\varepsilon = -(-u)^\varepsilon$

Lema A.3 *Se u é uma sub-solução C-viscosidade de*

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = f(x) \quad em \quad \Omega$$

e F, f são contínuas, então

$$F(x^*, u(x^*), Du^\varepsilon(x), M(x)) \leq f(x^*) \text{ q.t.p.} \quad para \quad x \in \Omega_{2(\varepsilon\|u\|_{L^\infty(\Omega)})^{1/2}},$$

em que $x^* \in \Omega$ é qualquer ponto de modo que

$$u^\varepsilon(x) = u(x^*) - \frac{1}{2\varepsilon}|x^* - x|$$

e para $\delta > 0, \Omega_\delta = \{x \in \Omega : \mathrm{dist(x, \partial\Omega)} > \delta\}$.

Note que

$$\frac{1}{2\varepsilon}|x^* - x|^2 \leq u(x^*) - u(x) \leq 2\|u\|_{L^\infty}$$

assim, $|x^* - x| \leq 2(\varepsilon\|u\|_{L^\infty})^{1/2}$ e $x^* \in \Omega$ se $x \in \Omega_{2(\varepsilon\|u\|_{L^\infty(\Omega)})^{1/2}}$ explicando a aparência desse conjunto acima.

Definição A.4 (Semiconcavidade e semiconvexidade) *Seja $v \in C(\Omega)$. Dizemos que v é semiconcavo se existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$x \mapsto v(x) - \frac{|x|^2}{2\varepsilon}$$

é côncavo. Dizemos que v é seminconvexo se $-v$ é semiconcavo. Se v é semiconcavo (ou semiconvexo), a quantidade ε é a semiconcavidade (ou semiconvexidade) de v.

Lema A.5 (Semiconcavidade e semiconvexidade) *Seja $u \in C(\overline{\Omega})$ e considere a sub e a inf-convolução u^ε e u_ε como dados na definição acima. A sub-convolution u^ε é semiconcava sempre que a inf-convolução u_ε é semiconvexa.*

Demonstração. Segue da definição de u^ε que

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) + \frac{|x|^2}{2\varepsilon} &= \sup_{y\in\Omega}\left(u(y) - \frac{|y-x|^2}{2\varepsilon}\right) + \frac{|x|^2}{2\varepsilon} \\ &= \sup_{y\in\Omega}\left(u(y) - \frac{|y|^2}{2\varepsilon} - \frac{yx}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

E então concluímos que

$$u^\varepsilon(x) + \frac{|x|^2}{2\varepsilon}$$

é o supremo das funções afins $a_y - b_y x$, em que

$$a_y := u(y) - \frac{|y|^2}{2\varepsilon} \qquad \text{e} \qquad b_y := \frac{y}{\varepsilon}$$

Já que o supremo de funções afins é convexo, concluímos que v^ε é semiconvexo. A semiconcavidade de u_ε segue do mesmo modo. ■

B
Suavizador padrão

Nesta seção do apêndice, iremos abordar a definição do suavizador padrão, bem como algumas de suas propriedades. É fundamental ressaltar que essa ferramenta foi empregada em diversos teoremas desta dissertação, como é o caso do Lema 3.2.

Definição B.1 (Suavizador padrão) *i) Definimos* $\eta \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ *por*

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right) & se \quad |x| < 1 \\ 0 & se \quad |x| \geq 1, \end{cases}$$

a constante $C > 0$ *é escolhida de modo que* $\int_{\mathbb{R}^d} \eta dx = 1$.

ii) Para cada $\delta > 0$, *definimos*

$$\eta_\delta(x) := \frac{1}{\delta^d} \eta\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

A função η *definida acima é chamada suavizador padrão. As funções* η_δ *são de classe* C^∞ *e satisfazem*

$$\fint_{\mathbb{R}^d} \eta_\delta dx = 1 \ \ e \ \ \operatorname{supp}(\eta_\delta) \subset B_\delta,$$

em que $\operatorname{supp}(\eta_\delta) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : \eta_\delta(x) \neq 0\}}$ *é o suporte da função* η_δ.

Em seguida, definimos a suavização de uma função e enunciamos algumas de suas propriedades.

Definição B.2 (Suavização padrão) *Seja* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função localmente integrável. Definimos a suavização padrão de u por*

$$u_\delta := \eta_\delta * u \ \ em \ \Omega_\delta.$$

Ou seja,

$$u_\delta(x) = \fint_{\Omega} \eta_\delta(x-y) u(y) dy = \fint_{B_\delta} \eta_\delta(y) u(x-y) dy$$

para $x \in \Omega_\delta$.

Agora, vejamos algumas propriedades das suavizações.

Teorema B.3 (Propriedade da suavização) *i) Para cada* $\delta > 0$, $u_\delta \in C^\infty(\Omega_\delta)$.

ii) Se $u \in C(\Omega)$, *então*

$$u_\delta \longrightarrow u$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω.

iii) Se $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *para algum* $1 \leq p < \infty$, *então*

$$u_\delta \longrightarrow u \quad em \quad W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$