



**Marcelo Moraes Resende**

**Equilíbrios de Nash em mercados elétricos com  
funções de oferta quadráticas cotadas**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Carlos Tomei

Coorientador: Dr. Sérgio Granville

Rio de Janeiro  
Abril de 2023



**Marcelo Moraes Resende**

**Equilíbrios de Nash em mercados elétricos com  
funções de oferta quadráticas cotadas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

**Prof. Carlos Tomei**

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Dr. Sérgio Granville**

PSR Soluções e Consultoria em Energia Ltda

**Prof. Alexandre Street de Aguiar**

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

**Prof. Davi Michel Valladão**

Departamento de Engenharia Industrial – PUC-Rio

**Prof. Bernardo Freitas Paulo da Costa**

Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

**Prof. María Soledad Aronna**

Fundação Getúlio Vargas - FGV

Rio de Janeiro, 27 de Abril de 2023

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial do trabalho, é proibida sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Marcelo Moraes Resende**

Graduou-se em Economia pela Fundação Getúlio Vargas e em Engenharia Elétrica pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, com ênfases em Sistemas de Energia Elétrica e Telecomunicações. Durante a graduação na PUC-Rio, trabalhou no Laboratório de Optoeletrônica do CETUC (Centro de Estudos em Telecomunicações) e cursou o domínio adicional em Matemática. Trabalha na área de Sistemas e Mercados de Energia desde 2016, na consultoria PSR.

#### Ficha Catalográfica

Moraes Resende, Marcelo

Equilíbrios de Nash em mercados elétricos com funções de oferta quadráticas cotadas / Marcelo Moraes Resende; orientador: Carlos Tomei; coorientador: Sérgio Granville. – 2023.

88 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2023.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Mercados Elétricos. 3. Simulação de Mercado. 4. Equilíbrios de Nash. 5. Equilíbrio Baseado em Funções de Oferta. 6. Estratégias de oferta. 7. Oligopólio. I. Tomei, Carlos. II. Granville, Sérgio. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 620.11

Aos meus avós, pelo exemplo  
que deram em vida.

## **Agradecimentos**

Agradeço primeiramente aos meus pais e meu irmão, pelo amor, apoio e incentivo em todas as etapas da minha vida acadêmica. Sem a presença e suporte de vocês, eu não estaria aqui hoje.

À minha namorada, pelo amor, compreensão e (muita) paciência durante todo o processo desta dissertação. Seu apoio foi fundamental para que eu pudesse me concentrar e superar os desafios que surgiram ao longo do caminho. Não posso deixar de agradecer também à sua família, pelo acolhimento e carinho que me proporcionaram durante todo o período de realização deste trabalho.

Ao meu orientador, Carlos Tomei, pela dedicação, orientação e incentivo; por ter aceitado me orientar com este tema e por toda a empolgação demonstrada com cada nova descoberta que fazíamos. Ao meu co-orientador, Sérgio Granville, pela colaboração e contribuição em momentos cruciais, ajudando a alinhar as ideias e a traçar caminhos para as análises realizadas. A experiência e sabedoria de vocês foram essenciais para o desenvolvimento do trabalho e meu crescimento pessoal.

A Gabriel Cunha, pelo apoio desde a fase de discussão do tema e pela demonstração bastante elegante da existência de solução do sistema de equações desta dissertação. E por ter sido compreensivo em relação aos meus esforços de conciliar o trabalho com a pesquisa.

A todos os professores que tive ao longo do Mestrado, Nicolau Saldanha, Marcos Craizer, Simon Griffiths, Boyan Sirakov e Sinésio Pesco, que contribuíram para a minha formação acadêmica e pessoal.

Aos funcionários do Departamento de Matemática, em especial a Creuza Nascimento, pelo suporte administrativo e por estarem sempre à disposição para resolver todos os problemas.

À PSR e todos seus colaboradores, por me introduzir a problemas tão interessantes e relevantes, pela companhia no dia a dia e pela importância na minha formação e crescimento profissional.

À CAPES. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Muito obrigado a todos pela colaboração, incentivo e amizade. Sem vocês, esta dissertação não seria possível.

## Resumo

Moraes Resende, Marcelo; Tomei, Carlos; Granville, Sérgio. **Equilíbrios de Nash em mercados elétricos com funções de oferta quadráticas cotadas**. Rio de Janeiro, 2023. 88p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho analisa um mercado de eletricidade em que os geradores declaram funções de custo quadráticas para o operador da rede e também suas disponibilidades máximas de produção. O operador, então, determina as quantidades a serem produzidas por cada gerador de modo a atender a uma demanda inelástica, ao menor custo possível. Estabelecem-se alguns resultados que permitem computar os equilíbrios de Nash deste modelo e descrevem-se algumas de suas propriedades, tais como condições de existência.

## Palavras-chave

Mercados Elétricos; Simulação de Mercado; Equilíbrios de Nash; Equilíbrio Baseado em Funções de Oferta; Estratégias de oferta; Oligopólio.

## Abstract

Moraes Resende, Marcelo; Tomei, Carlos (Advisor); Granville, Sérgio (Co-Advisor). **Nash equilibria in pool-based electricity markets with bounded quadratic supply functions**. Rio de Janeiro, 2023. 88p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work analyzes an electricity market in which generators declare quadratic cost functions for the grid operator and also the maximum capacity available. The operator then determines the quantities that each generator must produce to meet an inelastic demand at the lowest possible cost. Some results are established that allow computing the Nash equilibria of this model and some of their properties are described, such as existence conditions.

## Keywords

Electricity Markets; Market Simulation; Nash Equilibria; Supply Function Equilibrium; Strategic Bidding; Oligopoly.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
1.1	Apresentação do problema	12
1.2	Um exemplo	14
1.3	Um pouco de contexto	16
1.4	Organização do texto	18
<b>2</b>	<b>O problema do operador</b>	<b>20</b>
2.1	Existência e unicidade da solução	20
2.2	Um problema equivalente	21
2.3	Interpretações geométricas	25
2.3.1	Uma interpretação para o problema equivalente	25
2.3.2	Geometrização do problema original	27
2.4	Propriedades da solução ótima	31
<b>3</b>	<b>Equilíbrios de Nash em <math>\mathcal{S}^b</math> com capacidades ilimitadas</b>	<b>34</b>
3.1	Lucro de cada agente	34
3.2	Existência e unicidade do equilíbrio de Nash	36
3.3	Quando o número de agentes cresce	41
3.4	Propriedades adicionais do equilíbrio	42
<b>4</b>	<b>Equilíbrios de Nash em <math>\mathcal{S}^b</math> com capacidades limitadas</b>	<b>44</b>
4.1	Caso de déficit	44
4.2	Homogeneidade: dividindo $\mathcal{S}^b$ em cones	45
4.3	Equilíbrios de Nash locais no interior de subcones	49
4.4	Algumas ferramentas	52
4.4.1	O lucro como área	52
4.4.2	Maximização da área	55
4.5	Equilíbrios de Nash locais nas fronteiras de subcones	58
4.6	Globalidade	61
<b>5</b>	<b>Equilíbrios de Nash em <math>\mathcal{S}^{b,g}</math></b>	<b>65</b>
5.1	Dividindo $\mathcal{S}^{b,g}$ em regiões	65
5.2	Equilíbrios de Nash locais	68
5.3	Globalidade	71
<b>6</b>	<b>Simulação Computacional</b>	<b>74</b>
6.1	Caso $\mathcal{S}^b$ com capacidades limitadas	74
6.1.1	Algoritmo	74
6.1.2	Implementação computacional	76
6.1.3	Exemplo	76
6.2	Caso $\mathcal{S}^{b,g}$	78
6.2.1	Algoritmo	78
6.2.2	Exemplo	79
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>81</b>

Referências bibliográficas	82
A Demonstrações adicionais	85

## Lista de figuras

Figura 1.1	Lucro do agente 1 fixadas as outras ofertas, duas perspectivas.	14
Figura 2.1	Função de oferta de energia do sistema elétrico.	26
Figura 2.2	Cruzamento de oferta e demanda.	27
Figura 2.3	Grandes capacidades: ótimo no interior da face em $H$ .	29
Figura 2.4	Caso geral: ótimo na fronteira da face em $H$ .	30
Figura 3.1	$L_j$ em função de $b_j$ .	36
Figura 3.2	Ponto fixo de $\Phi(s)$ nos casos $m > 2$ e $\nu > 0$ .	38
Figura 3.3	Os níveis $v_j = 0$ e sua interseção $\mathbf{x}^*$ , no caso tridimensional ( $N = 3$ ).	39
Figura 4.1	Funções de oferta e de demanda residual do agente $i$ .	53
Figura 4.2	Como o lucro do agente $i$ muda com mudanças de $b_i$ .	54
Figura 4.3	Agente em $J_{full}$ .	54
Figura 4.4	Caso com preço menor que o custo marginal do agente.	55
Figura 4.5	Parâmetros $\alpha$ e $\beta$ das funções de demanda residual.	56
Figura 4.6	Derivada da área.	58
Figura 4.7	Estratégia ótima de um agente.	58
Figura 4.8	Alteração do lance de $p \in J_{part}$ em pontos de fronteiras internas.	60
Figura 5.1	Alteração da oferta do agente $q$ no sentido de reduzir o preço.	72
Figura 5.2	Alteração da oferta do agente $q$ no sentido de aumentar o preço.	72

## Lista de tabelas

Tabela 6.1	Exemplo com 4 agentes e espaço de estratégias $\mathcal{S}^b$ .	77
Tabela 6.2	Exemplo com 4 agentes e espaço de estratégias $\mathcal{S}^{b,g}$ .	80

# 1 Introdução

## 1.1

### Apresentação do problema

Considere um sistema elétrico com  $N$  agentes, isto é, proprietários de geradores termelétricos. Cada agente  $j$  possui uma *capacidade real* de geração  $\bar{G}_j \in \mathbb{R}_{>0}$  e um *custo real*, dado por uma função quadrática  $\sigma_j(g) = \frac{c_j}{2}g^2$  da *quantidade*  $g$  de energia gerada, em um domínio  $[0, \bar{G}_j]$ , com  $c_j > 0$ .

O *operador* decide a geração de cada térmica (o *despacho* do sistema) através de um leilão. Cada agente  $j$  dá um lance (sua *estratégia*), dado por um par  $(b_j, \bar{g}_j)$ , que é uma declaração de custo e quantidade máxima. Ou seja,  $b_j > 0$  é o coeficiente quadrático da curva de custos que o agente  $j$  declara para o operador<sup>1</sup> (talvez diferente de  $c_j$ ), e  $\bar{g}_j > 0$  é a capacidade que o agente  $j$  declara disponível para o operador (talvez diferente de  $\bar{G}_j$ ).

Uma vez definidas as estratégias dos agentes, o operador do sistema resolverá o *problema de minimização de custos*,

$$\begin{aligned} \min_{g_1, \dots, g_N, \text{def}} \quad & \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{2} g_j^2 + M \times \text{def} \\ \text{s.a} \quad & \\ & \sum_{j=1}^N g_j + \text{def} = d \quad (\text{equação de balanço}) \\ & \forall j, 0 \leq g_j \leq \bar{g}_j \quad (\text{geração máxima}) \\ & \text{def} \geq 0 \end{aligned}$$

A função objetivo é o custo da operação. O problema tem variáveis de decisão  $g_j$ , a geração exigida ao agente  $j$ , e  $\text{def}$ , a demanda não atendida ou *déficit*. São tomados como parâmetros  $b_j$  e  $\bar{g}_j$  (as estratégias dos agentes),  $d$  (a demanda dos consumidores) e  $M$ , o custo unitário da demanda não atendida<sup>2</sup> (a *penalidade*).

<sup>1</sup>A função  $\frac{b_j}{2}g^2$ , com domínio em  $[0, \bar{g}_j]$  é uma função de oferta quadrática cotada, justificando o título da dissertação. Trata-se de um abuso de linguagem, pois o termo “função de oferta” geralmente é usado para a derivada dessa função, o custo marginal. Para evitar confusão, daremos preferência ao termo “função de custo declarada” ao longo da dissertação.

<sup>2</sup>Em mercados elétricos reais, o custo de déficit usado pelo operador para otimizar o despacho é geralmente calculado por instituições reguladoras e são públicos.

O preço unitário da energia  $\pi$  (o *preço spot*) é o valor do multiplicador de Lagrange associado à equação de balanço, e é o custo marginal de operação.

As estratégias (individuais) do agente  $j$  pertencem ao conjunto

$$\mathcal{S}_j^{b,g} = \{(b_j, \bar{g}_j) \mid \bar{g}_j \in (0, \bar{G}_j], 0 < b_j \bar{g}_j \leq M\} .$$

A restrição  $b_j \bar{g}_j \leq M$  se deve ao fato de que o operador não teria interesse em receber ofertas mais caras (i.e., com maior custo marginal) do que o custo de não atender à demanda. O *espaço de estratégias* (conjuntas) do sistema (o conjunto dos agentes) é  $\mathcal{S}^{b,g} = \prod_{j=1}^N \mathcal{S}_j^{b,g}$ .

No Capítulo 2, demonstra-se existência e unicidade da solução do problema do operador. Se  $\sum_{j=1}^N \bar{g}_j \neq d$ , o valor de  $\pi$  também é único. Assim, existem funções  $\hat{\pi} : \mathcal{S}^{b,g} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\hat{g}_j : \mathcal{S}^{b,g} \rightarrow [0, \bar{G}_j]$ , que mapeiam cada vetor de estratégias  $\mathbf{s} \in \mathcal{S}^{b,g}$  à solução do problema do operador. Se  $\sum_{j=1}^N \bar{g}_j = d$ , definimos  $\hat{\pi}(\mathbf{s}) = M$ .

Cada agente recebe  $\hat{\pi} \hat{g}_j$  pela energia gerada  $\hat{g}_j$ . Essa regra de remuneração, em que toda unidade de energia recebe o mesmo preço  $\hat{\pi}$  independentemente do agente que a gera, é denominada *pay-as-clear* ou *uniform pricing*, em oposição à regra de *pay-as-bid*<sup>3</sup>.

Sob a regra de *pay-as-clear*, habitual em sistemas elétricos, o lucro de cada agente é dado por

$$L_j(\mathbf{s}) = \hat{\pi}(\mathbf{s}) \hat{g}_j(\mathbf{s}) - \frac{c_j}{2} \hat{g}_j(\mathbf{s})^2 . \quad (1-1)$$

O objetivo desta dissertação é distinguir no espaço de estratégias os equilíbrios de Nash locais e globais. Uma estratégia  $(s_1, s_2, \dots, s_N) \in \mathcal{S}^{b,g}$  é um *equilíbrio de Nash global* se e somente se para todo agente  $j$  e estratégia individual  $s' \in \mathcal{S}_j^{b,g}$ ,

$$L_j(s_1, s_2, \dots, s_N) \geq L_j(s_1, s_2, \dots, s_{j-1}, s', s_{j+1}, \dots, s_N) .$$

Em palavras, cada agente escolhe a melhor estratégia que pode, dadas as ofertas dos outros agentes. Uma estratégia  $(s_1, s_2, \dots, s_N) \in \mathcal{S}^{b,g}$  é um *equilíbrio de Nash local* se e somente se para todo agente  $j$ ,

$$\begin{aligned} \exists \epsilon > 0 \forall s' \in \mathcal{S}_j^{b,g}, \\ \|s' - s_j\| < \epsilon \implies L_j(s_1, s_2, \dots, s_N) \geq L_j(s_1, s_2, \dots, s_{j-1}, s', s_{j+1}, \dots, s_N) . \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Em leilões *pay-as-bid*, a energia é remunerada ao preço declarado no leilão: se um agente declarasse um custo  $b_j$  e gerasse  $\hat{g}_j$ , ele receberia  $\frac{b_j}{2} \hat{g}_j^2$ . Para uma descrição mais detalhada da regra de *pay-as-bid* e de como ela afeta as estratégias dos agentes no leilão, ver [1, 2].

O lucro do agente  $j$  tem um máximo local em  $s_j$ , fixadas as estratégias dos outros agentes. Um equilíbrio de Nash global é local, mas o contrário não vale.

## 1.2

### Um exemplo

Suponha cinco agentes, com capacidades reais

$$\bar{G}_1 = 20, \bar{G}_2 = 16, \bar{G}_3 = 12, \bar{G}_4 = 16 \text{ e } \bar{G}_5 = 9$$

e custos quadráticos com coeficientes

$$c_1 = 2, c_2 = 3, c_3 = 1, c_4 = 5 \text{ e } c_5 = 7 .$$

Estes devem satisfazer uma demanda  $d = 45$ , com custo de déficit  $M = 100$ .

A Figura 1.1 mostra o lucro do agente 1 em função de sua estratégia  $(b_1, \bar{g}_1)$  quando as ofertas dos demais agentes são

$$(b_2, \bar{g}_2) = (5, 12), (b_3, \bar{g}_3) = (3, 9), (b_4, \bar{g}_4) = (7, 12) \text{ e } (b_5, \bar{g}_5) = (10, 5) .$$

Cada ponto do gráfico é obtido resolvendo o problema do operador definido na Seção 1.1 – variando os valores de  $b_1$  e  $\bar{g}_1$  – e substituindo os resultados de preço e gerações na equação (1-1).

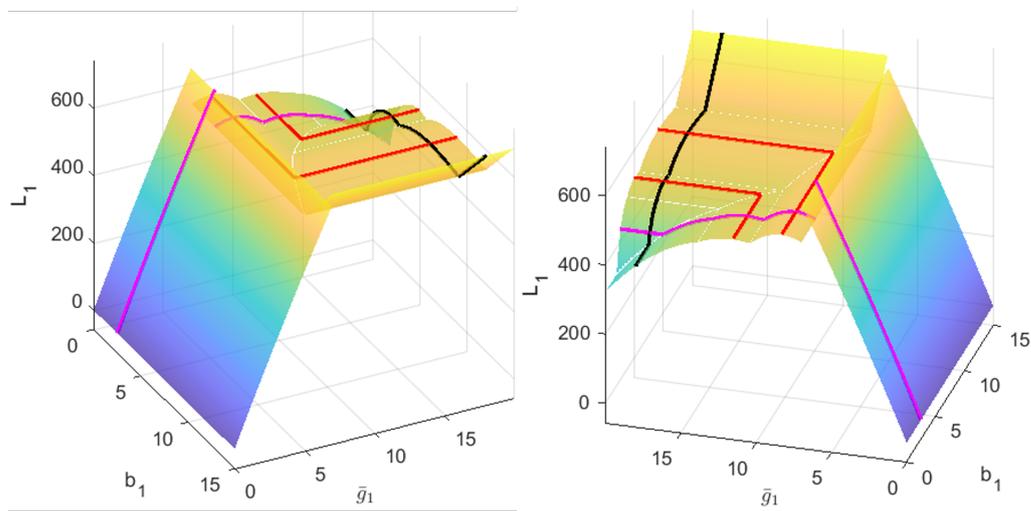


Figura 1.1: Lucro do agente 1 fixadas as outras ofertas, duas perspectivas.

Esta função apresenta uma descontinuidade quando  $\bar{g}_1 = d - \bar{g}_2 - \bar{g}_3 - \bar{g}_4 - \bar{g}_5 = 7$ , associada ao fato de que, se o agente 1 declara uma capacidade abaixo desse valor, o operador não terá a sua disposição capacidade de geração suficiente para atender à totalidade da demanda e haverá déficit.

Fixado  $b_1$ , o lucro em função de  $\bar{g}_1$  para valores acima de 7 é uma sucessão de parábolas, exemplificada pela curva rosa, até certo valor em que o lucro passa a ser uma constante. Para um valor fixo de  $\bar{g}_1$ , o lucro em função de  $b_1$  é uma função (em preto) com o mesmo padrão de alternância entre trechos crescentes e decrescentes, até atingir um trecho crescente linear. Os trechos crescentes são mais íngremes que os decrescentes.

Pela definição da Seção 1.1, somente máximos locais da função na Figura 1.1 podem ser equilíbrios de Nash locais, e isso só se os outros agentes também estiverem maximizando seus lucros localmente. Os máximos locais da Figura, excetuando máximos locais na fronteira do domínio e na descontinuidade, formam “L”s, tal como desenhado em vermelho.

Encontrar equilíbrios de Nash para este problema envolve não somente maximizar as funções lucro de cada agente, que não são contínuas, diferenciáveis ou côncavas em todo domínio, mas também compatibilizar os máximos dos vários agentes. Isto é, o gráfico do lucro do agente 1 muda se alterarmos as ofertas dos agentes 2 a 5. Máximos locais podem surgir ou desaparecer, máximos globais podem passar a ser somente locais e vice-versa. E o ponto de máximo  $(b_1, \bar{g}_1)$  efetivamente declarado pelo agente 1 para o operador também influenciará na função lucro a ser otimizada pelos demais agentes. Por exemplo, embora o agente 1 seja indiferente a quaisquer dois pontos de um mesmo “L”, eles podem levar a otimizações distintas para os demais agentes.

Esta dissertação mostra que os equilíbrios de Nash do problema (sejam locais ou globais) possuem bastante estrutura. Mostraremos que os equilíbrios locais formam um número finito de caixas  $N$ -dimensionais no espaço  $\mathcal{S}^{b,g}$  e que todos os equilíbrios em uma mesma caixa são equivalentes, no sentido de levarem ao mesmo despacho do sistema, mesmo preço spot e mesmos lucros dos agentes. Além disso, cada caixa tem um certo ponto tal que a inexistência de equilíbrios de Nash globais em sua vizinhança implica que não existe nenhum equilíbrio de Nash global na caixa.

Para o exemplo acima, existem quatro caixas de equilíbrios de Nash locais, mas somente uma possui equilíbrios de Nash globais<sup>4</sup>. Nela, a geração de cada agente é

$$g_1 = 12.5, g_2 = 10.3, g_3 = 10.0, g_4 = 6.7 \text{ e } g_5 = 5.5 ,$$

<sup>4</sup> Esta caixa (de equilíbrios de Nash locais) é

$$b_1 \in (0, 4.6), b_2 \in (0, 5.6), \bar{g}_3 \in (10, 12), \bar{g}_4 \in (6.7, 11.5), \bar{g}_5 \in (5.5, 9)$$

$$\bar{g}_1 = 12.5, \bar{g}_2 = 10.3, b_3 = 5.8, b_4 = 8.7, b_5 = 10.5$$

Mas nem todo ponto dessa caixa é equilíbrio de Nash global.

sem déficit. O preço será 57.7 e os lucros serão

$$L_1 = 566, L_2 = 435, L_3 = 528, L_4 = 273 \text{ e } L_5 = 212$$

### 1.3

#### Um pouco de contexto

A dissertação relaciona três temas amplamente discutidos na literatura: teoria dos jogos, leilões e oligopólios.

A teoria de oligopólios é uma área da teoria econômica que estuda as interações estratégicas entre empresas competindo entre si por um determinado mercado. Habitualmente, quanto menor o número de empresas, maior é o poder destas de definir os preços dos bens que produzem. Entre as abordagens teóricas, duas das mais conhecidas são a de Bertrand e a de Cournot [3]. No oligopólio de Bertrand, as empresas escolhem os preços de seus produtos e as quantidades são definidas pelo interesse do consumidor. No oligopólio de Cournot, as empresas competem em quantidades e o preço é definido pela demanda. As soluções nos dois modelos correspondem a equilíbrios de Nash de um jogo: os preços ou quantidades escolhidos maximizam os lucros de cada agente, fixadas as estratégias (preços ou quantidades) dos outros agentes.

Embora os modelos de oligopólio de Bertrand e Cournot sejam os mais estudados na literatura econômica, os comportamentos estratégicos das empresas costumam ser mais complexos. Por exemplo, a literatura estuda modelos em que os agentes fazem uma sequência de escolhas ao longo do tempo, reagindo às mudanças de estratégias de seus rivais [4, 5, 6], ou modelos que diferenciam produtos de cada agente [7, 8]. A abordagem mais adequada depende de muitos fatores, como a estrutura do mercado, a natureza do produto, as estratégias das empresas e as condições regulatórias [9].

Em mercados elétricos, as empresas de geração não podem definir por conta própria o quanto produzir de eletricidade nem quanto cobrar, tal como em outros mercados. A capacidade limitada de transmissão de energia, a necessidade de equilibrar a oferta e a demanda de energia em tempo real, a homogeneidade do bem comercializado, e a forte regulamentação são características peculiares do setor [10], que indicam a necessidade de modelos de oligopólio adaptados. Em suma, a regulação e as leis físicas que governam a operação condicionam o comportamento estratégico dos geradores.

As regras dos mercados elétricos de cada país são muito diferentes [11], mas podemos distinguir três grandes classes de modelos [12]:

- a.  *Mercados elétricos monopolísticos*  em que uma única empresa, geralmente estatal ou fortemente regulada pelo Estado, controla a geração,

transmissão e distribuição de energia e não há competição<sup>5</sup>. Esse modelo era predominante na maioria dos países até a década de 1990 [12].

- b.  *Mercados elétricos por custos auditados* em que os produtores de energia elétrica apresentam seus custos de produção à entidade reguladora. Esse modelo de mercado visa garantir que os produtores sejam remunerados pelos custos efetivamente incorridos na produção de energia. Este é o modelo atualmente em voga no Brasil, mas existe ampla discussão acerca da migração para um modelo por ofertas [14, 15, 16], descrito a seguir.
- c.  *Mercados elétricos por ofertas* em que os geradores apresentam em cada estágio (geralmente uma semana, um dia, ou um intervalo de horas dentro de um dia) suas ofertas de preço para a venda de eletricidade no estágio seguinte, e a entidade reguladora seleciona as mais competitivas para atender à demanda. Esse modelo de mercado é baseado na competição entre os produtores e é amplamente adotado na Europa e Estados Unidos.

O modelo apresentado na Seção 1.1 se refere a um mercado por ofertas. Nestes, a competição entre geradores se dá mediada pelas regras de um leilão<sup>6</sup>. Cada agente escolhe não preços ou quantidades simplesmente, mas uma função de custos – tal qual a função quadrática da Seção 1.1. Para diferentes quantidades de energia geradas, ele cobrará um preço diferente e cabe ao operador decidir o ponto dessa função de custos em que ele quer despachar. Este modelo de oligopólio, chamado de *equilíbrios baseados em funções de oferta*, foi inicialmente tratado por Klemperer e Meyer [18]. Os autores consideram um espaço de estratégias formado por funções duas vezes diferenciáveis, mas sem considerar limites de produção dos agentes, e mostram a existência de múltiplos equilíbrios de Nash globais.

Embora o artigo não tenha abordado mercados elétricos especificamente, não demorou para que fosse aplicado ao setor. O modelo de Klemperer foi usado no mercado elétrico britânico [19, 20], que havia recentemente passado por uma reestruturação, de um mercado monopolístico para um mercado por ofertas. A possibilidade de conluio entre agentes geradores foi considerada em [21]. O caso de capacidades de geração limitadas e existência de preços teto para a eletricidade foi analisado em [22].

<sup>5</sup>Uma exceção é o modelo de comprador único, em que a empresa estatal estabelece contratos de compra de energia com outros geradores privados e revende a energia para os consumidores [13]. Neste caso, há competição entre geradores, mas os preços da energia são negociados em contrato e podem diferir para cada gerador – não há um preço spot.

<sup>6</sup>Na teoria econômica, um leilão é qualquer mecanismo em que um leiloeiro (no nosso caso, o operador) recebe informação dos ofertantes (os custos e capacidades dos agentes geradores) e a utiliza para definir as quantidades compradas ou vendidas a cada um e os valores que estes devem pagar ou receber (preço e quantidades da energia) [17].

Em mercados reais de energia, o espaço de estratégias dos geradores não são funções duas vezes diferenciáveis, mas funções definidas pelas regras do leilão. Usualmente, são funções de custo lineares por partes<sup>7</sup>, não decrescentes, com um número máximo de segmentos pré-estabelecido [23, 24]. A falta de diferenciabilidade e convexidade estrita deste tipo de função dificulta seu tratamento, motivo pelo qual é comum a literatura recorrer a outros tipos de função. Em [24], por exemplo, considera-se como espaço de estratégias funções de custo para um agente  $j$  do tipo  $\theta_j \ln \left( \frac{\bar{G}_j}{\bar{G}_j - g} \right)$ , em que os agentes escolhem o valor de  $\theta_j$  em suas declarações ao operador. A escolha da função se deve ao fato de que, conforme  $g$  tende a  $\bar{G}_j$ , a função de custo se aproxima assintoticamente a um segmento vertical, representando o fato de que a capacidade é finita.

Em relação a estes trabalhos, esta dissertação apresenta duas principais diferenças. Primeiro, o espaço de estratégias consiste de funções quadráticas cotadas e parametrizadas por um coeficiente  $b_j$ . Este espaço é mais restrito que funções duas vezes diferenciáveis e considera explicitamente limites de capacidade, sem recorrer a suavizações contínuas, como em [24]. Acreditamos que muitos dos resultados obtidos ao longo da dissertação podem ser generalizados para funções estritamente convexas mais gerais. Segundo, em todos os artigos citados, não é possível ao agente declarar para o operador um valor de capacidade, tal como consideraremos aqui. Mesmo nos trabalhos que consideram limites de capacidade, estas são tratadas como valores fixos sobre os quais os geradores não têm ingerência. Entretanto, em sistemas elétricos reais, é possível que geradores exerçam poder de mercado limitando as capacidades oferecidas ao operador. Por exemplo, alguns autores argumentam que a crise elétrica da Califórnia em 2000-2001 foi exacerbada pela possibilidade de os geradores removerem capacidade de geração do mercado em dias de pico (alegando a necessidade de manutenção das usinas) [25].

## 1.4

### Organização do texto

O Capítulo 2 apresenta a solução do problema do operador e suas propriedades. Demonstraremos que o problema equivale a encontrar um preço tal que a oferta dos agentes encontra a demanda. A minimização de custos quadráticos tratada nesta dissertação é um problema de programação convexa [26, 27], que equivale a projetar um vetor sobre um hiperplano cotado [28, 29].

A programação linear pode ser entendida como encontrar um hiperplano que intercepta o conjunto admissível e minimiza (ou maximiza) a função

<sup>7</sup>As funções de oferta neste caso (a derivada das funções de custo declarado) são constantes por partes.

objetivo. Veremos que, no problema convexo que tratamos, existem certas superfícies que fazem o mesmo papel desses hiperplanos. Cada superfície está associada a um valor para a variável preço – o multiplicador de Lagrange. Resolver o problema convexo equivale a encontrar a superfície de menor preço que intercepta um subconjunto do conjunto admissível.

Os capítulos seguintes tratam da existência e caracterização dos equilíbrios de Nash quando os agentes declaram funções de custo quadráticas ao operador. Serão considerados três níveis de complexidade crescente. O Capítulo 3 traz o caso em que os agentes possuem capacidades  $\bar{G}_j$  infinitas e escolhem somente custos  $b_j$ , num espaço de estratégias  $\mathcal{S}^b$ , em oposição à  $\mathcal{S}^{b,g}$  em que o agente escolhe tanto custos como capacidades. Isto simplifica as funções de lucro  $\hat{L}_j$  e permite encontrar os equilíbrios a partir de um resultado de ponto fixo. Neste caso, o equilíbrio de Nash existe e é a solução única de um dado sistema de equações, resolvido a partir de métodos numéricos habituais.

No Capítulo 4, a capacidade dos agentes  $\bar{G}_j$  é finita, mas o espaço de estratégias segue sendo  $\mathcal{S}^b$  – o operador considera o próprio  $\bar{G}_j$  para a capacidade do agente ao resolver a minimização de custos. A função lucro  $\hat{L}_j$  passa a ser não diferenciável em alguns pontos. Podemos descrever todos os equilíbrios de Nash locais para o problema, que, se existirem, formam um número finito de caixas  $N$ -dimensionais em  $\mathcal{S}^b$ . Em cada caixa, os equilíbrios são equivalentes, no sentido de produzirem o mesmo despacho, preço e lucro para os agentes. Também estabelecemos um resultado que permite encontrar equilíbrios de Nash globais se eles existirem.

O Capítulo 5 por fim resolve o problema tal como apresentado na Seção 1.1: os agentes declaram ao operador tanto custos  $b_j$  como capacidades  $\bar{G}_j$  – o espaço de estratégias é  $\mathcal{S}^{b,g}$ . Novamente, encontraremos um número finito de caixas de equilíbrios de Nash locais equivalentes e estabeleceremos resultados que permitem encontrar equilíbrios globais, se existirem.

Baseado nos resultados obtidos nos capítulos anteriores, o Capítulo 6 apresenta um algoritmo computacional que encontra equilíbrios de Nash locais e globais para o problema, além de exemplos de aplicação.

## 2

### O problema do operador

Associamos ao problema do operador as variáveis duais  $\pi$ ,  $\underline{\eta}_j$ ,  $\bar{\eta}_j$  e  $\underline{\eta}_{Def}$ ,

$$\min_{g_1, \dots, g_N, \text{def}} \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{2} g_j^2 + M \times \text{def} \quad (2-1)$$

*s.a*

$$\sum_{j=1}^N g_j + \text{def} = d \quad : \pi \quad (2-2)$$

$$\forall j, 0 \leq g_j \leq \bar{g}_j \quad : (\underline{\eta}_j, \bar{\eta}_j) \quad (2-3)$$

$$\text{def} \geq 0 \quad : \underline{\eta}_{Def} \quad (2-4)$$

Em particular,  $\pi$  é o preço da energia. Variações e extensões desse problema são frequentemente denominadas “problema do operador”, “problema de minimização de custos”, “problema da operação termelétrica” ou “problema quadrático do mochileiro”.

Após resolvê-lo, o operador comunicará aos agentes os valores de  $g_j$ , o quanto de energia devem gerar, e o preço  $\pi$ .

#### 2.1

##### Existência e unicidade da solução

O conjunto admissível do problema de otimização (2-1) é um conjunto não vazio no  $\mathbb{R}^{N+1}$  (dado que  $\text{def} = d$  e  $\forall j, g_j = 0$  sempre resolve as restrições do problema, já que  $d \geq 0$ ) e compacto. Pela continuidade da função objetivo, segue que existe ao menos uma solução.

Uma condição suficiente para garantir a unicidade da solução ótima<sup>1</sup> é  $\forall j, b_j > 0$ . De fato, combinações convexas de soluções distintas  $(g_1, g_2, \dots, g_N, \text{def}_1)$  e  $(h_1, h_2, \dots, h_N, \text{def}_2)$  seriam pontos factíveis (pois o conjunto admissível é convexo) e, para  $t \in (0, 1)$ ,

<sup>1</sup>De forma mais geral, a existência e a unicidade de um mínimo para o problema do operador continuariam garantidas se substituíssemos as parábolas  $\frac{b_j}{2} g_j^2$  por qualquer outra função contínua e estritamente convexa em  $g_j$ , ou se adicionássemos restrições no conjunto admissível, mas mantendo-o compacto, convexo e não vazio.

$$\sum_i \frac{b_i}{2} (tg_i + (1-t)h_i)^2 + M[t \text{ def}_1 + (1-t) \text{ def}_2] < \quad (2-5)$$

$$t \left( \sum_i \frac{b_i}{2} g_i^2 + M \text{ def}_1 \right) + (1-t) \left( \sum_i \frac{b_i}{2} h_i^2 + M \text{ def}_2 \right) = \quad (2-6)$$

$$\left( \sum_i \frac{b_i}{2} g_i^2 + M \text{ def}_1 \right) = \left( \sum_i \frac{b_i}{2} h_i^2 + M \text{ def}_2 \right),$$

o que é absurdo. A passagem de (2-5) para (2-6) usa dois fatos: (i) a função  $\frac{b}{2}g^2$ ,  $b > 0$ , é estritamente convexa; e (ii) para algum  $j$ ,  $g_j \neq h_j$  (caso contrário, a restrição (2-2) implicaria  $\text{def}_1 = \text{def}_2$  e, logo, as duas soluções seriam idênticas).

## 2.2

### Um problema equivalente

O objetivo nesta seção é encontrar uma única equação que, ao ser resolvida, nos conduz à solução do problema do operador (2-1). Essa equação será bastante útil em demonstrações acerca das propriedades dos equilíbrios de Nash, tratadas nos próximos capítulos.

Seguiremos essencialmente [28]. Inicialmente, enumeramos as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para o problema, observando que tais condições são necessárias e suficientes quando se otimiza uma função convexa em um poliedro convexo (ver Teorema A.1 no Apêndice A):

$$\forall j, \pi = b_j \times g_j + \bar{\eta}_j - \underline{\eta}_j \quad (2-7)$$

$$\forall j, \bar{\eta}_j \times [g_j - \bar{g}_j] = 0 \quad (2-8)$$

$$\forall j, \underline{\eta}_j \times g_j = 0 \quad (2-9)$$

$$\pi = M - \underline{\eta}_{Def} \quad (2-10)$$

$$\underline{\eta}_{Def} \times \text{def} = 0 \quad (2-11)$$

$$d - \text{def} - \sum_j g_j = 0 \quad (2-12)$$

$$\forall j, 0 \leq g_j \leq \bar{g}_j \quad (2-13)$$

$$\text{def} \geq 0 \quad (2-14)$$

$$\underline{\eta}_{Def} \geq 0 \quad (2-15)$$

$$\forall j, \bar{\eta}_j \geq 0, \underline{\eta}_j \geq 0 \quad (2-16)$$

As equações (2-7), (2-8), (2-9), (2-13) e (2-16) podem ser escritas separadamente para cada agente  $j$ . Essa observação nos motiva a tentar resolver

estas 5 equações em separado, o que leva ao seguinte lema:

**Lema 2.1** *Suponha  $\bar{g}_j > 0$  e  $b_j > 0$ , para todo  $j$ . Então, para um valor fixo de  $\pi$ , o sistema formado por (2-7), (2-8), (2-9), (2-13) e (2-16) tem solução única*

$$\forall j, g_j = \max \left\{ \min \left\{ \frac{\pi}{b_j}, \bar{g}_j \right\}, 0 \right\}$$

$$\forall j, \bar{\eta}_j = \max \{ \pi - b_j \bar{g}_j, 0 \}$$

$$\forall j, \underline{\eta}_j = \max \{ 0, -\pi \}$$

*Prova.* Por simplicidade de notação, suprimimos o subíndice  $j$ . Primeiro, provemos que  $g = \max \left\{ \min \left\{ \frac{\pi}{b}, \bar{g} \right\}, 0 \right\}$ ,  $\bar{\eta} = \max \{ \pi - b\bar{g}, 0 \}$  e  $\underline{\eta} = \max \{ 0, -\pi \}$  são solução para as equações (2-7), (2-8), (2-9), (2-13) e (2-16). Para isso, divida em 3 casos:

1.  $\pi < 0$ ; então  $g = 0$ ,  $\bar{\eta} = 0$  e  $\underline{\eta} = -\pi$
2.  $0 \leq \pi \leq b\bar{g}$ ; então  $g = \frac{\pi}{b}$ ,  $\bar{\eta} = 0$  e  $\underline{\eta} = 0$
3.  $\pi > b\bar{g}$ ; então  $g = \bar{g}$ ,  $\bar{\eta} = \pi - b\bar{g}$  e  $\underline{\eta} = 0$

Em qualquer um dos 3 casos, basta substituir os valores acima nas equações e (2-7), (2-8), (2-9), (2-13) e (2-16) para verificar que elas são satisfeitas.

Provaremos a unicidade por contradição. Suponha haver duas soluções para o sistema formado por (2-7), (2-8), (2-9), (2-13) e (2-16), dadas por  $S^{(1)} = (g^{(1)}, \bar{\eta}^{(1)}, \underline{\eta}^{(1)})$  e  $S^{(2)} = (g^{(2)}, \bar{\eta}^{(2)}, \underline{\eta}^{(2)})$ . Por (2-7) vale que:

$$bg^{(1)} + \bar{\eta}^{(1)} - \underline{\eta}^{(1)} = bg^{(2)} + \bar{\eta}^{(2)} - \underline{\eta}^{(2)} = \pi \rightarrow$$

$$b(g^{(1)} - g^{(2)}) + (\bar{\eta}^{(1)} - \bar{\eta}^{(2)}) - (\underline{\eta}^{(1)} - \underline{\eta}^{(2)}) = 0 \quad (2-17)$$

Suponha que  $g^{(1)} < g^{(2)}$ . Por (2-13),  $g^{(2)} \leq \bar{g}$  e, logo,  $g^{(1)} < \bar{g}$ . Consequentemente, por (2-8),  $\bar{\eta}^{(1)} = 0$ . De forma semelhante, podemos usar (2-13) e (2-9) para concluir que  $g^{(2)} > 0$  e  $\underline{\eta}^{(2)} = 0$ . Substituindo estes valores de  $\bar{\eta}^{(1)}$  e  $\underline{\eta}^{(2)}$  em (2-17):

$$b(g^{(1)} - g^{(2)}) = \bar{\eta}^{(2)} + \underline{\eta}^{(1)}$$

O lado direito da expressão acima é maior ou igual a zero, por (2-16). Mas isso é absurdo, pois (uma vez que  $b > 0$ ) implicaria  $g^{(1)} \geq g^{(2)}$ . Raciocínio simétrico pode ser usado para provar que  $g^{(1)}$  não pode ser maior que  $g^{(2)}$ .

Concluimos que  $g^{(1)} = g^{(2)}$ .

Agora, suponha  $\bar{\eta}^{(1)} < \bar{\eta}^{(2)}$ . Por (2-16),  $\bar{\eta}^{(2)} > \bar{\eta}^{(1)} \geq 0$  e, assim, por (2-8),  $g^{(2)} = \bar{g}$ . Por (2-9) (e aqui é importante a hipótese de que  $\bar{g} > 0$  do enunciado),  $\underline{\eta}^{(2)} = 0$ . Substituindo em (2-17) (e dado que já sabemos que  $g^{(1)} = g^{(2)}$ ):

$$\bar{\eta}^{(1)} - \bar{\eta}^{(2)} = \underline{\eta}^{(1)}$$

Mas isso implicaria, por (2-16), que  $\bar{\eta}^{(1)} - \bar{\eta}^{(2)} \geq 0$ , uma contradição. Simetricamente, podemos provar que  $\bar{\eta}^{(1)}$  não pode ser maior que  $\bar{\eta}^{(2)}$ .

Concluimos que  $\bar{\eta}^{(1)} = \bar{\eta}^{(2)}$ .

Por fim, a equação (2-17) revela que, se  $g^{(1)} = g^{(2)}$  e  $\bar{\eta}^{(1)} = \bar{\eta}^{(2)}$ , então  $\underline{\eta}^{(1)} = \underline{\eta}^{(2)}$ , o que conclui a demonstração. ■

O Lema 2.1 permite escrever o problema original a partir de uma única equação, desde que as capacidades dos geradores do sistema (os  $\bar{g}_j$ ) sejam suficientemente grandes:

**Teorema 2.1** *Suponha que  $\sum_{j=1}^N \bar{g}_j > d > 0$  e, para todo agente  $j$ ,  $\bar{g}_j > 0$ ,  $b_j > 0$  e  $b_j \bar{g}_j \leq M$ . Existe um único valor possível para o multiplicador de Lagrange  $\pi$  associado à solução (única) do problema do operador (2-1). Este valor é a solução (também única) da equação:*

$$\sum_{j=1}^N \min \left\{ \frac{\pi}{b_j}, \bar{g}_j \right\} = d \quad (2-18)$$

*Além disso, a solução do problema do operador satisfaz  $\pi > 0$  e  $\text{def} = 0$ .*

*Prova.* Para provar que a solução da equação acima existe e é única, basta ver que o lado esquerdo da equação é uma função estritamente crescente de  $\pi$ , para  $\pi < \max\{b_j \bar{g}_j\}$ . De fato, essa desigualdade garante que existe  $q$  tal que  $\min\{\pi/b_q, \bar{g}_q\} = \pi/b_q$ . E, assim, ao menos uma parcela do somatório crescerá com o aumento de  $\pi$  (enquanto as outras se manterão constantes ou também crescerão). Portanto, o lado esquerdo da equação é uma função contínua e estritamente crescente de  $\pi$ , que assume o valor 0 para  $\pi = 0$  e  $\sum_{j=1}^N \bar{g}_j > d$  para  $\pi = \max\{b_j \bar{g}_j\}$ . O teorema do valor intermediário garante a existência da solução da equação, enquanto a monotonicidade garante a unicidade. Mais que isso,  $0 \leq \pi \leq \max\{b_j \bar{g}_j\}$ .

Vamos verificar que  $\left( (g_j^{(0)})_{j=1}^N, \text{def}^{(0)} \right)$ , a solução (única, pelo que vimos na Seção 2.1) do problema do operador, de fato resolve a equação (2-18). Se  $\text{def}^{(0)} \neq 0$  teríamos  $\pi = M$ , pelas condições de KKT (2-11) e (2-10). Mas, dado que  $\forall j, \frac{M}{b_j} \geq \bar{g}_j$ , o Lema 2.1 garante que  $\forall j, g_j = \bar{g}_j$ , e então, por (2-12),  $\text{def} = d - \sum_j \bar{g}_j < 0$ , o que contradiz (2-14).

Assim,  $\text{def}^{(0)} = 0$ . Combinando equação (2-12) e o Lema 2.1,  $g_j = \max \left\{ \min \left\{ \frac{\pi}{b_j}, \bar{g}_j \right\}, 0 \right\}$ , podemos escrever

$$\sum_j \max \left\{ \min \left\{ \frac{\pi}{b_j}, \bar{g}_j \right\}, 0 \right\} = d$$

Como  $d > 0$ , o lado esquerdo da equação não é nulo e assim  $\pi > 0$ . Isso significa que  $\min \left\{ \frac{\pi}{b_j}, \bar{g}_j \right\} > 0$  e, portanto, podemos reescrever a fórmula tal qual no enunciado deste teorema. ■

Para  $\sum_{j=1}^N \bar{g}_j > d$ , o Teorema 2.1 permite resolver o problema do operador do seguinte modo: primeiro, encontre o valor de  $\pi$  satisfazendo a equação (2-18)<sup>2</sup>. Em seguida, utilize o Lema 2.1 para encontrar o valor das gerações de cada agente:  $g_j = \min \left\{ \frac{\pi}{b_j}, \bar{g}_j \right\}$  (essa fórmula usa o fato de que  $\pi > 0$ ). O valor do déficit será zero.

O teorema seguinte mostra a solução do problema do operador no caso oposto, isto é, quando  $\sum_{j=1}^N \bar{g}_j \leq d$ .

**Teorema 2.2** *Suponha novamente que, para todo  $j$ , vale  $\bar{g}_j > 0$ ,  $b_j > 0$ ,  $b_j \bar{g}_j \leq M$  e  $\sum_{j=1}^N \bar{g}_j \leq d$ . Então, a solução (única) do problema do operador (2-1) é dada por  $\left( (g_j^{(0)})_{j=1}^N, \text{def}^{(0)} \right)$  com:*

$$g_j^{(0)} = \bar{g}_j, \quad \text{def}^{(0)} = d - \sum_j \bar{g}_j.$$

Além disso, se  $\sum_{j=1}^N \bar{g}_j < d$ , só há um valor de  $\pi$  que satisfaz às condições de KKT (2-7) a (2-16), que é  $\pi^{(0)} = M$ . Caso  $\sum_{j=1}^N \bar{g}_j = d$ , qualquer valor de  $\pi$  no intervalo  $[\max_j \{b_j \bar{g}_j\}, M]$  satisfaz KKT.

*Prova.* Primeiro vamos supor  $\sum \bar{g}_j < d$ . Por (2-13),  $\sum g_j^{(0)} \leq \sum \bar{g}_j < d$ , e (2-12) implica  $\text{def}^{(0)} > 0$ . Por (2-10) e (2-11),  $\pi^{(0)} = M$ . Pelo Lema 2.1,  $\forall j, g_j^{(0)} = \max \{ \min \{ M/b_j, \bar{g}_j \}, 0 \}$  e como  $0 \leq b_j \bar{g}_j \leq M$ , vale  $g_j^{(0)} = \bar{g}_j$ . O valor de  $\text{def}^{(0)}$  é obtido pela equação (2-12).

No caso  $\sum \bar{g}_j = d$ , seguimos a demonstração do Teorema 2.1 para provar que  $\text{def}^{(0)} = 0$ . Isto é, se  $\text{def}^{(0)} > 0$ , teríamos  $\pi = M$ , e então  $\forall j, g_j = \max \{ \min \{ M/b_j, \bar{g}_j \}, 0 \} = \bar{g}_j$ , e aí  $\text{def} = d - \sum g_j = 0$ , o que é absurdo. Como  $\text{def} = 0$ , devemos satisfazer  $\sum_j g_j = d$  (equação (2-12)), o que só ocorre se  $\forall j, g_j = \bar{g}_j$  (do contrário,  $\exists j, g_j < \bar{g}_j \rightarrow \sum_j g_j < \sum_j \bar{g}_j = d$ ). Isso prova as equações do teorema. Para o valor de  $\pi$ , note que as condições (2-7)

<sup>2</sup>Maculan et al [28] propõem um algoritmo de tempo linear para resolver esta equação.

a (2-16), as únicas ainda a verificar, são:

$$\forall j, \bar{\eta}_j = \pi - b_j \bar{g}_j \geq 0$$

$$\underline{\eta}_{Def} = M - \pi \geq 0,$$

o que vale para qualquer  $\pi \in [\max_j \{b_j \bar{g}_j\}, M]$ . ■

**Corolário 2.2.1** *Novamente, suponhamos para todo  $j$ ,  $\bar{g}_j > 0$ ,  $b_j > 0$ ,  $b_j \bar{g}_j \leq M$  e  $d > 0$ . Então, na solução ótima do problema do operador,  $g_j^{(0)} > 0$ .*

*Prova.* No caso de  $\sum_{j=1}^N \bar{g}_j \leq d$ , pelo Teorema 2.2,  $\forall j, g_j = \bar{g}_j > 0$ . Se  $\sum_{j=1}^N \bar{g}_j > d$ , use o Teorema 2.1 para concluir  $\forall j, g_j = \min \{\pi/b_j, \bar{g}_j\} > 0$ , pois  $\pi > 0$ . ■

O corolário ainda vale sem a restrição  $b_j \bar{g}_j \leq M$ , com pequenas alterações na demonstração.

## 2.3

### Interpretações geométricas

#### 2.3.1

##### Uma interpretação para o problema equivalente

Apesar de as demonstrações dos Teoremas 2.1 e 2.2 serem relativamente trabalhosas, eles são, em verdade, bastante intuitivos e estão relacionados ao conceito de custo marginal dos geradores. Vamos supor que o operador precisa atender a uma demanda  $d$ , discretizada: cada agente oferece unidades de energia a preços crescentes. O operador deveria, começar comprando as unidades mais baratas até satisfazer toda a demanda.

Para funções de custo quadráticas, o custo de cada unidade<sup>3</sup> de  $j$  é dado por  $b_j g_j$ . A primeira unidade de cada agente tem custo quase zero (o que explica porque todos os agentes são acionados, como indicado no Corolário 2.2.1), mas o custo de cada unidade vai crescendo linearmente à medida que o operador exige maiores quantidades do agente. Em particular, depois de adquirir algumas unidades, o *preço spot* é o preço da próxima unidade. Ao longo do processo, alguns agentes podem esgotar as unidades oferecidas.

A versão contínua do argumento é a interpretação da equação (2-18). Fixado um preço  $\pi$ , um agente  $j$  gera quantidades de energia até que seu custo marginal (declarado) iguale esse preço (ou seja,  $b_j g_j = \pi$ ) ou, se isto não for possível (pois  $b_j \bar{g}_j < \pi$ ), ele geraria à plena capacidade ( $g_j = \bar{g}_j$ ).

<sup>3</sup>O custo marginal no contexto discreto.

**Lema 2.2** A função  $v(\pi) = \sum_{j=1}^N \min \left\{ \frac{\pi}{b_j}, \bar{g}_j \right\}$  é não-decrescente, linear por partes e côncava em  $\pi$ . Os segmentos lineares são delimitados por pontos com  $\pi = b_i \bar{g}_i$ , para algum  $i$ .

*Prova.* Sem perda de generalidade, suponha  $b_1 \bar{g}_1 \leq b_2 \bar{g}_2 \leq \dots \leq b_N \bar{g}_N$ . Então

$$v(\pi) = \begin{cases} \pi \sum_{j=1}^N \frac{1}{b_j} & \text{se } \pi \leq b_1 \bar{g}_1 \\ \sum_{j=1}^i \bar{g}_j + \pi \sum_{j=i+1}^N \frac{1}{b_j} & \text{se } b_i \bar{g}_i \leq \pi \leq b_{i+1} \bar{g}_{i+1} \\ \sum_{j=1}^N \bar{g}_j & \text{se } \pi \geq b_N \bar{g}_N \end{cases}$$

é uma função linear por partes e estritamente crescente para  $\pi \leq b_N \bar{g}_N$ , dado que  $b_j > 0$ , e constante para  $\pi \geq b_N \bar{g}_N$ . Como os coeficientes  $\sum_{j=i+1}^N \frac{1}{b_j}$  de cada segmento linear decrescem com o aumento de  $i$ , a função é côncava. ■

A função  $v(\pi)$  é a *função de oferta*, pois diz, para cada valor possível para o preço  $\pi$ , o quanto de energia os agentes do sistema elétrico estariam dispostos a ofertar. Ela é desenhada na Figura 2.1, considerando quatro agentes ( $N = 4$ ) para os quais  $b_1 \bar{g}_1 < b_2 \bar{g}_2 < b_3 \bar{g}_3 < b_4 \bar{g}_4$ . Habitualmente, o preço é apresentado no eixo das ordenadas<sup>4</sup>. As variáveis são dadas por  $\alpha_i = \left( \sum_{j=i}^N \frac{1}{b_j} \right)^{-1}$  e  $\gamma_i = \sum_{j=1}^i \bar{g}_j + b_i \bar{g}_i \sum_{j=i+1}^N \frac{1}{b_j}$ .

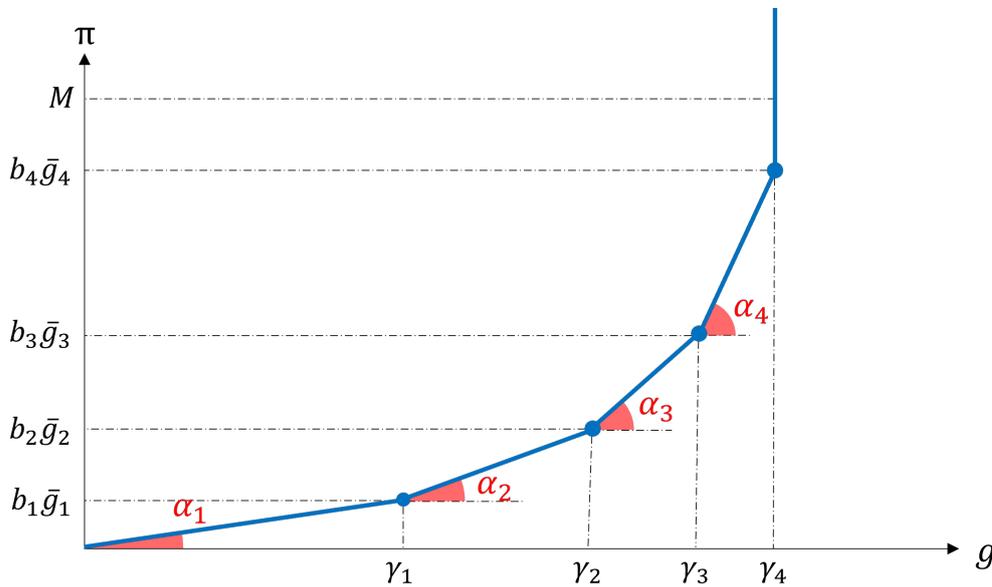


Figura 2.1: Função de oferta de energia do sistema elétrico.

No primeiro segmento do gráfico, em que  $\pi < b_1 \bar{g}_1$ , nenhum agente gera à máxima capacidade. Para um preço  $\pi$ , cada agente  $j$  gera  $\frac{\pi}{b_j}$ . Ao atingir

<sup>4</sup>Esta convenção gráfica foi estabelecida por Alfred Marshall em seu livro *Principles of Economics*, do fim do século XIX, e é seguida na literatura econômica desde então [30].

o preço  $b_1\bar{g}_1$ , o primeiro agente satura sua capacidade. A partir daí, um aumento unitário no valor de  $\pi$  irá aumentar a geração total do sistema de uma quantidade menor que um aumento unitário de  $\pi$  no primeiro segmento, pois a geração do primeiro agente não pode mais crescer. Cada ponto de inflexão  $(\gamma_i, b_i\bar{g}_i)$  representa a saturação de um agente.

A Figura 2.2 exemplifica três possíveis valores para a demanda  $d$ . Resolver a equação (2-18) é encontrar o ponto em que a curva de oferta cruza o valor da demanda  $d$ . Se a demanda é  $d_1$ , o preço está entre  $b_2\bar{g}_2$  e  $b_3\bar{g}_3$ , de modo que os dois primeiros agentes estão saturados, enquanto os outros dois ainda não. Com uma demanda  $d_2$ , é possível cruzar a curva de oferta e a demanda com qualquer valor de  $\pi$  acima de  $b_4\bar{g}_4$  (e abaixo do máximo valor possível  $\pi$ ), o que é coerente com o Teorema 2.2. A demanda  $d_3$  não pode ser atendida: não é possível cruzar a curva de oferta com a demanda. O déficit é  $d_3 - \sum_{j=1}^4 \bar{g}_j$  e o preço,  $M$ , pelo Teorema 2.2 (neste caso, o preço não é determinado pela interseção das curvas, já que ela não existe).

PUC-Rio - Certificação Digital N° 2012237/CA

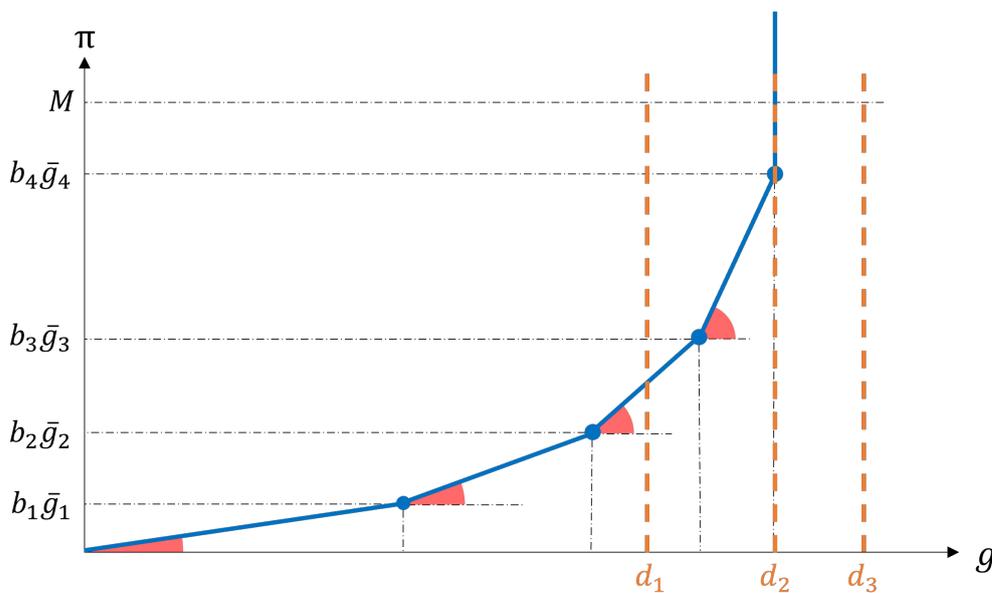


Figura 2.2: Cruzamento de oferta e demanda.

### 2.3.2

#### Geometrização do problema original

É fácil eliminar a variável  $def$  no problema do operador,

$$\min_{g_1, \dots, g_N} \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{2} g_j^2 + M \left( d - \sum_{j=1}^N g_j \right) \quad (2-19)$$

s.a

$$\forall j, 0 \leq g_j \leq \bar{g}_j$$

$$\sum_{j=1}^N g_j \leq d$$

Completando quadrados e removendo termos constantes, a função objetivo pode ser alterada para  $\sum_{j=1}^N \left( \sqrt{\frac{b_j}{2}} g_j - \frac{M}{\sqrt{2b_j}} \right)^2$ . Fazendo a transformação de variáveis  $h_j = \sqrt{\frac{b_j}{2}} g_j$ , chegamos ao problema equivalente:

$$\min_{h_1, \dots, h_N} \sum_{j=1}^N \left( h_j - \frac{M}{\sqrt{2b_j}} \right)^2$$

s.a

$$\forall j, 0 \leq h_j \leq \bar{h}_j \quad (2-20)$$

$$\sum_{j=1}^N \sqrt{\frac{2}{b_j}} h_j \leq d \quad (2-21)$$

com  $\bar{h}_j = \sqrt{\frac{b_j}{2}} \bar{g}_j$ . Há dois casos a considerar. No primeiro, o hiperplano  $H : \sum_{j=1}^N \sqrt{\frac{2}{b_j}} h_j = d$  não encontra a caixa<sup>5</sup>  $\prod_{j=1}^N [0, \bar{h}_j]$ . Isso ocorre quando  $d \geq \sum_{j=1}^N \sqrt{\frac{2}{b_j}} \bar{h}_j$ . No segundo, o conjunto admissível é uma *caixa truncada*, dada pela interseção da caixa com o semi-espaço fechado associado a  $H$  contendo a origem. Nesse conjunto, procuramos o ponto  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_N)$  mais próximo do ponto  $\mathbf{M} = M \left( \frac{1}{\sqrt{2b_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2b_N}} \right)$ .

Os resultados das seções anteriores têm interpretação geométrica.

- A restrição  $\forall j, b_j \bar{g}_j \leq M$  nos Teoremas 2.1 e 2.2 equivale a  $\bar{h}_j \leq \frac{M}{\sqrt{2b_j}}$ : o ponto  $\mathbf{M}$  está fora da caixa ou no seu vértice  $\bar{\mathbf{h}}$  mais afastado da origem.
- Logo, as parcelas  $h_j - \frac{M}{\sqrt{2b_j}}$  na função objetivo são negativas e o ótimo é  $\bar{\mathbf{h}}$  se  $H$  não encontra a caixa. Se encontrar, o ótimo está na face da caixa truncada contida em  $H$ . Caso contrário, haveria alguma coordenada  $q$  em que poderíamos aumentar  $h_q$  e reduzir a função objetivo.
- A projeção ortogonal do ponto  $\mathbf{M}$  no hiperplano  $H$  é a interseção deste hiperplano com o segmento que liga a origem a  $\mathbf{M}$ , já que os dois são

<sup>5</sup>O produto cartesiano de intervalos nos eixos.

perpendiculares – o vetor dos coeficientes do hiperplano  $(\sqrt{\frac{2}{b_1}}, \dots, \sqrt{\frac{2}{b_N}})$  é  $2(\frac{1}{\sqrt{2b_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2b_N}})$ .

- Se a caixa for suficientemente grande, de modo que as equações (2-20) sejam inócuas, essas observações implicam que a solução ótima estará na interseção do segmento  $\lambda \in [0, M] \rightarrow \lambda(\frac{1}{\sqrt{2b_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2b_N}})$  com  $H$ . A Figura 2.3 ilustra o caso tridimensional:  $\mathbf{S}$  é a solução ótima.

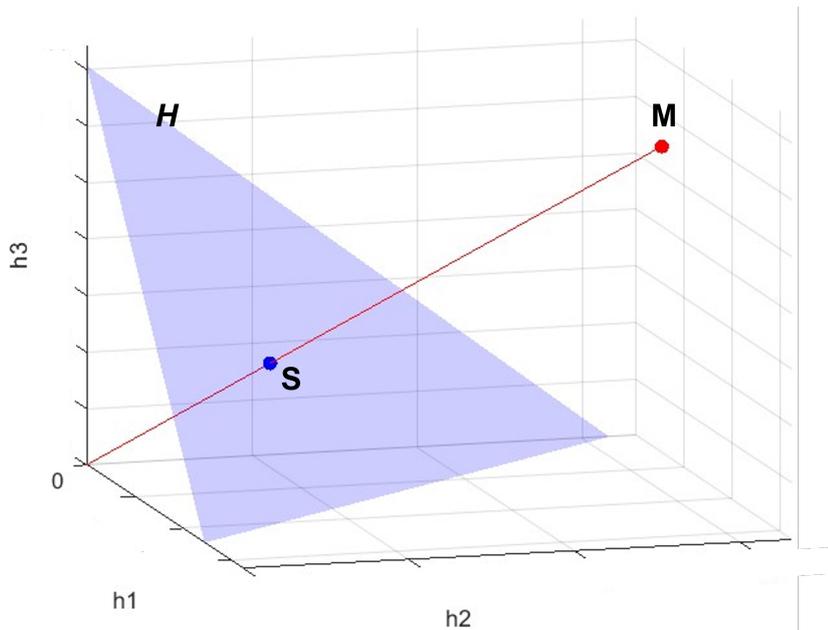


Figura 2.3: Grandes capacidades: ótimo no interior da face em  $H$ .

O valor do parâmetro  $\lambda$  em  $\mathbf{S}$  é  $d(\sum_{i=1}^N \frac{1}{b_i})^{-1}$ , justamente o valor da variável dual  $\pi$ . Conforme a demanda  $d$  muda, o hiperplano  $H$  se move paralelamente, e a solução ótima variará sobre o segmento  $\mathbf{OM}$ .

- No caso mais geral, as restrições (2-20) devem ser consideradas. Agora, o segmento  $\mathbf{OM}$  intercepta o hiperplano  $H$  em um ponto  $\tilde{\mathbf{S}}$  fora da caixa. Pelo Teorema 2.1, a solução ótima é o ponto de interseção<sup>6</sup> entre  $H$  e o caminho linear por partes

$$C : \lambda \in [0, M] \rightarrow \left( \min \left\{ \frac{\lambda}{\sqrt{2b_1}}, \bar{h}_1 \right\}, \dots, \min \left\{ \frac{\lambda}{\sqrt{2b_N}}, \bar{h}_N \right\} \right),$$

e, neste ponto, novamente,  $\lambda = \pi$ . A Figura 2.4 ilustra para um caso tridimensional. A caixa é apresentada em rosa e o caminho  $C$ , em azul.  $S$  é a solução ótima, interseção de  $C$  e  $H$ . Na figura,  $b_1\bar{g}_1 \leq b_2\bar{g}_2 \leq b_3\bar{g}_3$ . O caminho  $C$  coincide com o segmento  $\mathbf{OM}$  para valores pequenos de  $\lambda$ .

<sup>6</sup>A visualização permite uma demonstração do Teorema 2.1 que dispensa o uso das condições KKT, mas não vamos dar detalhes.

Quando  $\lambda$  atinge  $b_1\bar{g}_1$ , há uma inflexão e o caminho passa a percorrer a face  $h_1 = \bar{h}_1$  (isto é, o agente 1 passa a ser usado a capacidade máxima). Ao atingir  $b_2\bar{g}_2$ , o caminho passa a percorrer a aresta  $h_1 = \bar{h}_1$ ,  $h_2 = \bar{h}_2$ . Por fim, quando  $\lambda \geq b_3\bar{g}_3$ , o caminho chega ao vértice  $\bar{\mathbf{h}}$ .

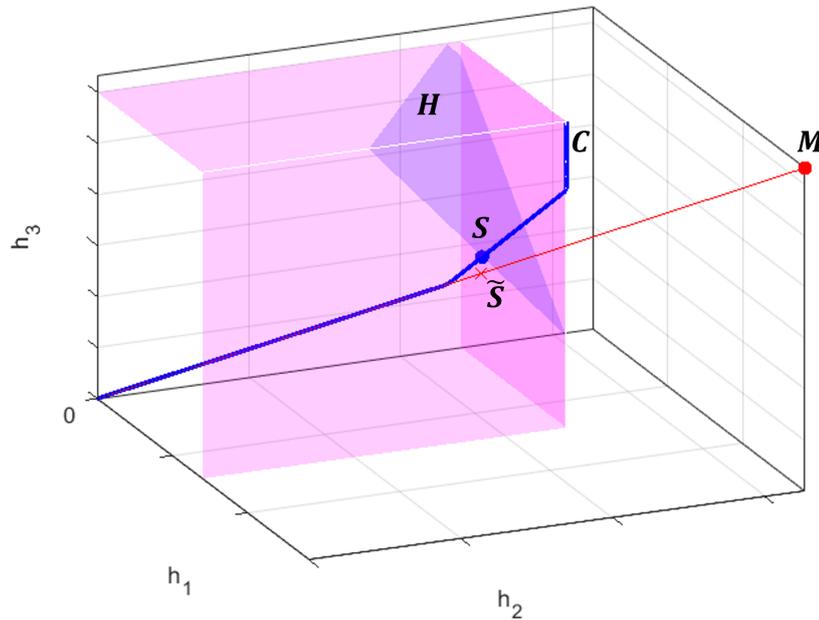


Figura 2.4: Caso geral: ótimo na fronteira da face em  $H$ .

- Existe uma interpretação geométrica para o ponto ótimo dada por uma descrição simples das superfícies de nível do preço  $\pi$ . No problema habitual de programação linear, consideram-se hiperplanos paralelos dados por níveis da função objetivo que têm que encontrar o conjunto admissível. Agora, o conjunto admissível é a parte do hiperplano  $H$  dentro da caixa. As superfícies de nível do preço são os conjuntos  $L_c$  :  $\max\{\sqrt{2b_j}h_j\} = c$ . Visualmente, considere translações de  $\mathbb{R}^N$  de modo a levar a origem a algum ponto do segmento  $\mathbf{OM}$ : o nível corresponde à fronteira da translação do quadrante de coordenadas todas negativas.

Mais precisamente, se um ponto de  $L_c$  é solução do problema do operador, o preço será  $c$ . Podemos resolver a minimização encontrando, dentre as superfícies  $L_c$  que interceptam  $H$  em pontos dentro da caixa, aquela

associada ao menor preço, ou seja,

$$\begin{aligned} & \min_{c, h_1, \dots, h_N} c \\ & \text{s.a} \\ & \max\{\sqrt{2b_j h_j}\} = c \\ & \forall j, 0 \leq h_j \leq \bar{h}_j \\ & \sum_{j=1}^N \sqrt{\frac{2}{b_j}} h_j = d \end{aligned}$$

As superfícies  $L_c$  dependem dos valores de  $b_j$ . Diferentes custos levariam a outro hiperplano  $H$  e a outras superfícies de nível.

## 2.4

### Propriedades da solução ótima

O lema seguinte estabelece algumas propriedades da solução do problema do operador (2-1) e do problema equivalente estabelecido pela equação (2-18).

**Lema 2.3** *Suponha  $\sum_{j=1}^N \bar{g}_j > d > 0$  e, para todo  $j$ ,  $\bar{g}_j > 0$ ,  $b_j > 0$  e  $b_j \bar{g}_j \leq M$ . Seja  $(g_j^{(0)})_{j=1}^N$  a solução do problema do operador e  $\pi^{(0)}$  o valor (único, pelo Teorema 2.1) do multiplicador de Lagrange associado a esta solução. Então:*

- a.  $\pi^{(0)} = \max_{j \leq N} \{b_j g_j^{(0)}\}$
- b.  $\pi^{(0)} = \max_{J \in \mathcal{S}(N) \setminus \emptyset} \left\{ \left( \sum_{j \in J} \frac{1}{b_j} \right)^{-1} [d - \sum_{i \in J^c} \bar{g}_i] \right\}$

em que  $\mathcal{S}(N)$  é o conjunto das partes de  $\{1, 2, \dots, N\}$  e  $J^c$  é o complementar de  $J$  em relação ao conjunto  $\{1, 2, \dots, N\}$ .

*Prova.*

a: Pela positividade do preço  $\pi^{(0)}$  (ver prova do Teorema 2.1 e Lema 2.1), sabemos que  $\forall j \leq N, b_j g_j^{(0)} = \min \{ \pi^{(0)}, b_j \bar{g}_j \}$ , de modo que  $\forall j \leq N, \pi^{(0)} \geq b_j g_j^{(0)}$ , implicando  $\pi^{(0)} \geq \max_{j \leq N} \{b_j g_j^{(0)}\}$ .

Suponha por contradição que  $\pi^{(0)} > \max_{j \leq N} \{b_j g_j^{(0)}\}$ . Pelo Lema 2.1, todo agente  $j$  tem geração  $g_j^{(0)}$  igual a  $\frac{\pi^{(0)}}{b_j}$  ou  $\bar{g}_j$ . Mas por hipótese,  $g_j^{(0)} < \frac{\pi^{(0)}}{b_j}$ . Assim, temos  $\sum_{j \leq N} g_j^{(0)} = \sum_{j \leq N} \bar{g}_j > d$ , o que contradiz que  $g_j^{(0)}$  é a solução ótima do problema do operador (ver equação (2-18) ou (2-2)). Segue que  $\pi^{(0)} = \max_{j \leq N} \{b_j g_j^{(0)}\}$ .

b: Defina a partição de  $\{1, 2, \dots, N\}$  dada por  $J_{part} = \{j \leq N | b_j \bar{g}_j > \pi^{(0)}\}$  e  $J_{full} = J_{part}^c = \{j \leq N | b_j \bar{g}_j \leq \pi^{(0)}\}$ . Pela equação (2-18):

$$\sum_{i \in J_{full}} \bar{g}_i + \sum_{j \in J_{part}} \frac{\pi^{(0)}}{b_j} = d$$

de modo que  $\pi^{(0)} = \left( \sum_{j \in J_{part}} \frac{1}{b_j} \right)^{-1} \left[ d - \sum_{i \in J_{full}} \bar{g}_i \right]$ .

Basta agora provar que  $\forall J \in \mathcal{S}(N)$ , com  $J \neq \emptyset$ ,  $\pi^{(0)} \geq \left( \sum_{i \in J} \frac{1}{b_i} \right)^{-1} \left[ d - \sum_{j \in J^c} \bar{g}_j \right]$ . Isso equivale a provar que :

$$\sum_{j \in J^c} \bar{g}_j + \sum_{i \in J} \frac{\pi^{(0)}}{b_i} \geq d = \sum_{i \in J_{full}} \bar{g}_i + \sum_{j \in J_{part}} \frac{\pi^{(0)}}{b_j}$$

Rearranjando os termos:

$$\sum_{j \in J^c} \bar{g}_j - \sum_{i \in J_{full}} \bar{g}_i \geq \sum_{j \in J_{part}} \frac{\pi^{(0)}}{b_j} - \sum_{i \in J} \frac{\pi^{(0)}}{b_i}$$

Podemos eliminar os termos comuns a ambos os somatórios do lado esquerdo (e direito) da inequação. Seja  $A = J \cap J_{part}$ :

$$\sum_{j \in J_{part} \setminus A} \bar{g}_j - \sum_{i \in J \setminus A} \bar{g}_i \geq \sum_{j \in J_{part} \setminus A} \frac{\pi^{(0)}}{b_j} - \sum_{i \in J \setminus A} \frac{\pi^{(0)}}{b_i}$$

Mas isso é verdade, pois  $j \in J_{part} \setminus A$  implica  $\bar{g}_j > \frac{\pi^{(0)}}{b_j}$ , pela definição de  $J_{part}$ . E  $i \in J \setminus A$  implica  $i \in J_{full}$ , de onde  $\bar{g}_i \leq \frac{\pi^{(0)}}{b_i}$ . ■

O Lema 2.3(a) essencialmente confirma que o preço  $\pi^{(0)}$  estabelecido pelo operador é de fato o custo marginal do sistema elétrico – no sentido de ser o custo marginal do agente mais caro para o sistema.

Já o Lema 2.3(b) estabelece o problema de encontrar o preço  $\pi$  que resolve a equação (2-18) como um problema de otimização combinatória: encontrar o conjunto  $J \in \mathcal{S}(N) \setminus \emptyset$  que maximiza o lado direito da equação. Mas o verdadeiro valor desta equação está em fornecer uma fórmula explícita para  $\pi^{(0)}$  como função somente de variáveis exógenas ao problema do operador (os valores de  $b_j$ ,  $\bar{g}_j$  e  $d$ ).

**Lema 2.4** *Suponha  $b_j, b_i, \bar{g}_j, \bar{g}_i > 0$  e  $b_j \bar{g}_j \geq b_i \bar{g}_i$ . Seja  $(g_j^{(0)})_{j=1}^N$  a solução do problema do operador.*

a. Se  $g_j^{(0)} = \bar{g}_j$ , então  $g_i^{(0)} = \bar{g}_i$ ;

b. Se  $g_i^{(0)} < \bar{g}_i$ , então  $g_j^{(0)} < \bar{g}_j$ ;

*Prova.*

a: Pela condição de KKT (2-9),  $\underline{\eta}_j = 0$ . Suponha  $g_i^{(0)} < \bar{g}_i$ , então  $\bar{\eta}_i = 0$  pela condição (2-8). Pela condição (2-7):

$$\pi = b_j \bar{g}_j + \bar{\eta}_j = b_i g_i^{(0)} - \underline{\eta}_i < b_i \bar{g}_i$$

Mas  $b_j \bar{g}_j + \bar{\eta}_j \geq b_i \bar{g}_i$ , o que é uma contradição.

b: Pela condição de KKT (2-8),  $\bar{\eta}_i = 0$ . Suponha  $g_j^{(0)} = \bar{g}_j$ , de modo que  $\underline{\eta}_j = 0$ . Pela condição (2-7):

$$\pi = b_i g_i^{(0)} - \underline{\eta}_i = b_j \bar{g}_j + \bar{\eta}_j$$

Mas  $b_j \bar{g}_j + \bar{\eta}_j \geq b_j \bar{g}_j$  e  $b_i g_i^{(0)} - \underline{\eta}_i < b_i \bar{g}_i \leq b_j \bar{g}_j$ , o que é uma contradição. ■

### 3

## Equilíbrios de Nash em $\mathcal{S}^b$ com capacidades ilimitadas

No capítulo anterior, discutimos a solução do problema do operador para valores fixos de  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N)$  e  $\bar{\mathbf{g}} = (\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_N)$ . O principal resultado é o Teorema 2.1, que estabelece, sob certas condições, um problema equivalente: encontrar  $\pi$  que resolve  $\sum_{j \leq N} \min \left\{ \frac{\pi}{b_j}, \bar{g}_j \right\} = d$ .

Variando os vetores  $\mathbf{b}$  e  $\bar{\mathbf{g}}$ , a solução do operador muda, afetando o preço, as gerações e lucros. Consequentemente, alguns valores de  $\mathbf{b}$  e  $\bar{\mathbf{g}}$  devem ser mais interessantes para os agentes que outros. Neste e nos próximos capítulos, o foco está em encontrar pontos  $\mathbf{b}$  e  $\bar{\mathbf{g}}$  que são equilíbrios de Nash locais e/ou globais, isto é, em que cada agente maximiza o seu lucro (local ou globalmente), fixadas as estratégias dos outros agentes, como definido no Capítulo 1.

Cada capítulo trata de um caso particular, com níveis crescentes de complexidade. Para começar, supomos que cada agente  $j$  tem uma capacidade total de geração  $\bar{G}_j$  infinita, submetendo para o operador somente um valor  $b_j \in \mathcal{S}_j^b = (0, \bar{b}_j]$  – o operador considera  $\bar{g}_j = \infty$  ao resolver o problema de minimização de custos<sup>1</sup>. No Capítulo 4, a capacidade real dos agentes  $\bar{G}_j$  será finita e fixa,  $\bar{g}_j = \bar{G}_j$ , e no Capítulo 5, os agentes escolhem um valor  $\bar{g}_j \in [0, \bar{G}_j]$ .

O principal resultado deste capítulo é o seguinte.

**Teorema 3.1** *Suponha que  $\forall j, \bar{G}_j = \infty$ . Se há pelo menos três agentes, para  $\bar{b}_j$  e penalidade  $M$  suficientemente grandes, então existe um único equilíbrio de Nash local, que é também global.*

### 3.1

#### Lucro de cada agente

Como explicado no Capítulo 1, a decisão de despacho ocorre através de um leilão, em que cada agente  $j$  declara um parâmetro  $b_j$  para o operador, e este resolve o problema de minimização de custos (2-1).

**Proposição 3.1** *Se  $M > d \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{\bar{b}_j} \right)^{-1}$ , então o preço spot em função do vetor  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N) \in \mathcal{S}^b = \prod_{j=1}^N (0, \bar{b}_j]$  é  $\pi(\mathbf{b}) = d \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{b_j} \right)^{-1}$ . O lucro do*

<sup>1</sup>Note que a restrição  $b_j \bar{g}_j \leq M$  usada em outros capítulos desta dissertação não é pertinente ao conteúdo deste capítulo.

agente  $j$  é

$$L_j(b_1, \dots, b_N) = \left( b_j - \frac{c_j}{2} \right) \left[ \frac{d}{1 + b_j \left( \sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i} \right)} \right]^2$$

e, fixadas as estratégias dos demais agentes, se  $N > 1$ , sua estratégia ótima é

$$b_j^* = \min \left\{ c_j + \left( \sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i} \right)^{-1}, \bar{b}_j \right\}.$$

A hipótese sobre  $M$  é razoável: em mercados elétricos reais, as entidades reguladoras (em alguns casos, o próprio operador) definem as regras do jogo (o que inclui os valores de  $M$  e  $\bar{b}_j$ ) e podem garantir que  $M > d \left( \sum_{j=1}^N 1/\bar{b}_j \right)^{-1}$ . Por exemplo, se o operador impuser um tratamento isonômico a todos os agentes,  $\forall j, \bar{b}_j = \bar{b}$ , e bastaria tomar  $M > d \frac{\bar{b}}{N}$ .

*Prova.* Como não há limites máximos de geração, o custo marginal de cada agente iguala o preço spot  $\pi$  na solução do problema do operador:  $\forall j, g_j = \frac{\pi}{b_j}$ .

Por contradição, suponha  $\pi \geq M$ . Então  $\sum g_j = \sum \frac{\pi}{b_j} \geq M \sum \frac{1}{b_j} > d$ . Isso implicaria déficit negativo, um absurdo. Logo,  $\pi < M$  e o déficit é zero<sup>2</sup>.

Pela restrição de balanço e do fato de o déficit ser nulo, temos  $\sum_{j=1}^N g_j = \pi \sum_{j=1}^N \frac{1}{b_j} = d$ , ou  $\pi = d \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{b_j} \right)^{-1}$ , como no enunciado da proposição<sup>3</sup>.

O lucro de cada agente é dado pela equação (1-1),

$$L_j = \pi g_j - \frac{c_j}{2} g_j^2 = \left( b_j - \frac{c_j}{2} \right) g_j^2 = \left( b_j - \frac{c_j}{2} \right) \left( \frac{\pi}{b_j} \right)^2.$$

Substituindo a expressão obtida para  $\pi$ , chega-se ao valor de  $L_j$  anunciado.

Resta calcular a estratégia ótima. O domínio da função lucro é o espaço de estratégias  $\mathcal{S}^b = \prod_{i=1}^N \mathcal{S}_i^b \subseteq \mathbb{R}_{>0}^N$ . Um cálculo de derivadas (ver Proposição A.1) mostra os seguintes fatos, se  $N > 1$ :

- $L_j > 0 \leftrightarrow b_j > \frac{c_j}{2}$
- $\frac{\partial L_j}{\partial b_j} > 0 \leftrightarrow b_j < c_j + \left( \sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i} \right)^{-1}$
- $\frac{\partial^2 L_j}{\partial b_j^2} > 0 \leftrightarrow b_j > 2 \left( \sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i} \right)^{-1} + \frac{3}{2} c_j$
- $\lim_{b_j \rightarrow \infty} L_j = 0$

Portanto, o único máximo da função é  $\min \left\{ c_j + \left( \sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i} \right)^{-1}, \bar{b}_j \right\}$ . ■

<sup>2</sup>Se o déficit não fosse zero, o operador poderia aumentar a geração de algum agente  $j$  em  $dg_j$  pequeno e reduzir o déficit e, logo, a função objetivo de  $(M - b_j g_j) dg_j > 0$ .

<sup>3</sup>A fórmula para  $\pi$  também segue da equação (2-18), tomando  $\bar{g}_j \rightarrow \infty$ .

Assim,  $(b_1, \dots, b_N) \in \mathcal{S}^b$  é equilíbrio de Nash (tanto local como global, já que a expressão de  $L_j$  tem um único máximo local) se só se

$$\forall j \leq N, b_j = \min \left\{ c_j + \left( \sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i} \right)^{-1}, \bar{b}_j \right\} \quad (3-1)$$

se  $N > 1$ . A figura abaixo mostra um exemplo típico para a função lucro  $L_j$  de um agente  $j$  em função de  $b_j$ , fixados os lances dos demais<sup>4</sup>. Como esperado pelas condições de primeira e segunda ordem, a função começa côncava e crescente até atingir o máximo em  $b_j = c_j + \left( \sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i} \right)^{-1}$ , e em seguida decresce tendendo assintoticamente a 0. A partir de  $b_j = 2 \left( \sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i} \right)^{-1} + \frac{3}{2}c_j$  (um valor superior ao máximo  $c_j + \left( \sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i} \right)^{-1}$ ) a função fica convexa. A mesma função, em situações em que as capacidades são finitas, tratadas nos capítulos subsequentes, tem vários máximos locais ao longo da cauda.

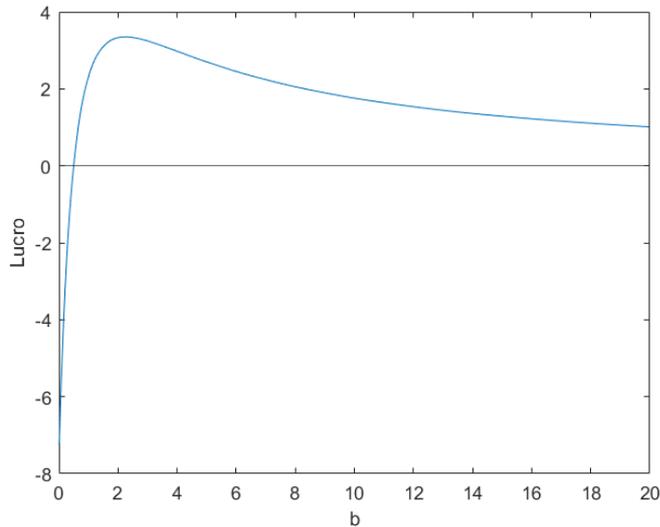


Figura 3.1:  $L_j$  em função de  $b_j$ .

### 3.2 Existência e unicidade do equilíbrio de Nash

Veremos no Teorema 3.2 que, com capacidades ilimitadas, há um único equilíbrio de Nash, sob certas condições. Precisamos de dois lemas preliminares.

Vamos tratar as equações (3-1) como um problema de ponto fixo.

**Lema 3.1** *Seja  $m \in \mathbb{N}$ ;  $\nu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}_{>0}$ . Se  $m > 2$  ou  $\nu > 0$ , o sistema em  $x_1, x_2, \dots, x_m$  dado por*

<sup>4</sup>A curva considera quatro agentes e demanda  $d = 15$ . O agente cujo lucro é representado possui custo  $c_j = 1$ . Os custos declarados dos demais agentes (valores de  $b_i$  para  $i \neq j$ ) são 2, 5 e 10. Esses valores são utilizados na fórmula do lucro da Proposição 3.1.

$$\forall j \leq m, x_j = \mu_j + \left( \sum_{\substack{i \leq m \\ i \neq j}} \frac{1}{x_i} + \nu \right)^{-1} \quad (3-2)$$

possui uma única solução em  $\mathbb{R}_{>0}^m$ ,

$$x_j = \frac{\mu_j}{2} + \frac{1}{S} + \sqrt{\frac{\mu_j^2}{4} + \frac{1}{S^2}}$$

com  $S$  sendo o único ponto fixo de

$$\Phi : s \in \mathbb{R}_{>0} \mapsto \nu + \sum_{i \leq m} \left( \frac{\mu_i}{2} + \frac{1}{s} + \sqrt{\frac{\mu_i^2}{4} + \frac{1}{s^2}} \right)^{-1}.$$

Se  $m = 2$  e  $\nu = 0$ , o sistema (3-2) não tem solução. De fato,  $x_1 = \mu_1 + x_2$  e  $x_2 = \mu_2 + x_1$  só teria solução se  $\mu_1 = -\mu_2$ , o que é impossível dado que  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ . Se  $m = 1$  e  $\nu = 0$ , o sistema não está bem definido.

*Prova.* Acrescente uma equação e uma variável ao sistema (3-2),

$$S = \sum_{i \leq m} \frac{1}{x_i} + \nu \quad (3-3)$$

$$x_j = \mu_j + \left( S - \frac{1}{x_j} \right)^{-1} \quad (3-4)$$

Como  $x_j \in \mathbb{R}_{>0}$  e  $\nu \geq 0$ , temos que  $x_j > \mu_j$  e  $S - \frac{1}{x_j} > 0$ , o que permite escrever, desenvolvendo (3-4),

$$Sx_j^2 - (S\mu_j + 2)x_j + \mu_j = 0.$$

Esta equação quadrática tem duas raízes  $r_{j,\pm} = \frac{\mu_j}{2} + \frac{1}{S} \pm \sqrt{\frac{\mu_j^2}{4} + \frac{1}{S^2}}$ . Se existisse  $j$  tal que  $x_j = r_{j,-}$ , teríamos  $x_j < \frac{\mu_j}{2} + \frac{1}{S} - \sqrt{\frac{\mu_j^2}{4} + \frac{1}{S^2}} = \frac{1}{S}$ , pois  $S > 0$  e  $\mu_j \geq 0$ . Aí

$$S = \frac{1}{x_j} + \sum_{\substack{i \leq m \\ i \neq j}} \frac{1}{x_i} + \nu > S + \sum_{\substack{i \leq m \\ i \neq j}} \frac{1}{x_i} + \nu \geq S,$$

obrigando  $x_j = r_{j,+}$ . Voltando à equação (3-3),

$$S = \nu + \sum_{i \leq m} \left( \frac{\mu_i}{2} + \frac{1}{S} + \sqrt{\frac{\mu_i^2}{4} + \frac{1}{S^2}} \right)^{-1} = \Phi(S)$$

e falta ver que esta equação tem uma única solução, para  $m > 2$  ou  $\nu > 0$ . Para isso, calculamos a primeira e a segunda derivada de  $\Phi$ , para  $s > 0$ :

$$\Phi'(s) = \sum_{i \leq m} \frac{1}{\left(s \frac{\mu_i}{2} + 1 + \sqrt{\left(s \frac{\mu_i}{2}\right)^2 + 1}\right)^2} \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{\left(s \frac{\mu_i}{2}\right)^2 + 1}} \right] > 0 \quad (3-5)$$

$$\Phi''(s) = - \sum_{i \leq m} \left[ \frac{2 \left\{ \frac{\mu_j}{2} + \frac{s \mu_j^2}{4} \left[ \left(s \frac{\mu_j}{2}\right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right\} \left\{ 1 + \left[ \left(s \frac{\mu_j}{2}\right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right\}}{\left(s \frac{\mu_j}{2} + 1 + \sqrt{\left(s \frac{\mu_j}{2}\right)^2 + 1}\right)^3} \right]$$

$$- \sum_{i \leq m} \left[ \frac{\frac{s \mu_j^2}{4} \left[ \left(s \frac{\mu_j}{2}\right)^2 + 1 \right]^{-3/2}}{\left(s \frac{\mu_j}{2} + 1 + \sqrt{\left(s \frac{\mu_j}{2}\right)^2 + 1}\right)^2} \right] < 0$$

onde usamos o fato de que  $\mu_j > 0, \forall j$ . Além disso, tomando limites:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Phi(s) = \nu$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Phi(s) = \nu + \sum_{i \leq m} \frac{1}{\mu_i}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Phi'(s) = \frac{m}{2}$$

Se  $\nu = 0$ ,  $\Phi(s)$  é uma função estritamente crescente, côncava, que “parte” de 0 até um valor finito. A condição para que  $\Phi(s)$  cruze a função identidade em algum ponto é  $\lim_{s \rightarrow 0} \Phi'(s) \geq 1$ , ou seja  $m > 2$ . Se  $\nu > 0$ , então o teorema do valor intermediário é suficiente para provar a existência de tal cruzamento. Pela concavidade estrita da função, o cruzamento é único (ver Figura 3.2). ■

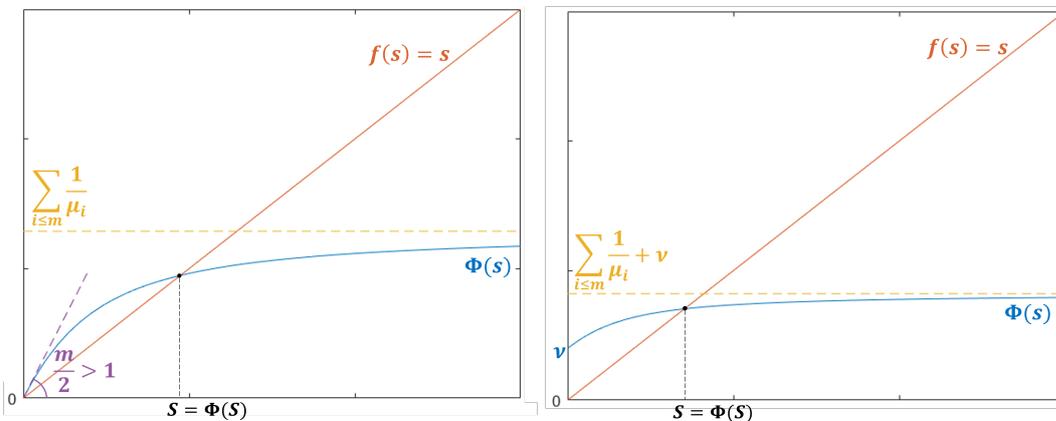


Figura 3.2: Ponto fixo de  $\Phi(s)$  nos casos  $m > 2$  e  $\nu > 0$ .

O (único) ponto fixo  $\mathbf{x}^*$  da função definida por (3-2), com  $\nu = 0$ , é a (única) raiz comum das funções

$$v_j : x \in \mathbb{R}_{>0}^N \mapsto x_j - \mu_j - \left( \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i} \right)^{-1}.$$

**Lema 3.2** Se  $\forall j, v_j(\mathbf{x}) \leq 0$ , então  $\forall j, x_j \leq x_j^*$ .

Isto é, o conjunto  $\forall j, v_j(\mathbf{x}) \leq 0$  está dentro de uma caixa  $\prod_{j \leq N} [0, x_j^*]$ . A Figura 3.3 é o caso tridimensional (o conjunto satisfazendo  $v_j(\mathbf{x}) \leq 0$  é a região delimitada pelo nível  $v_j(\mathbf{x}) = 0$ , desenhado na figura, contendo a origem).

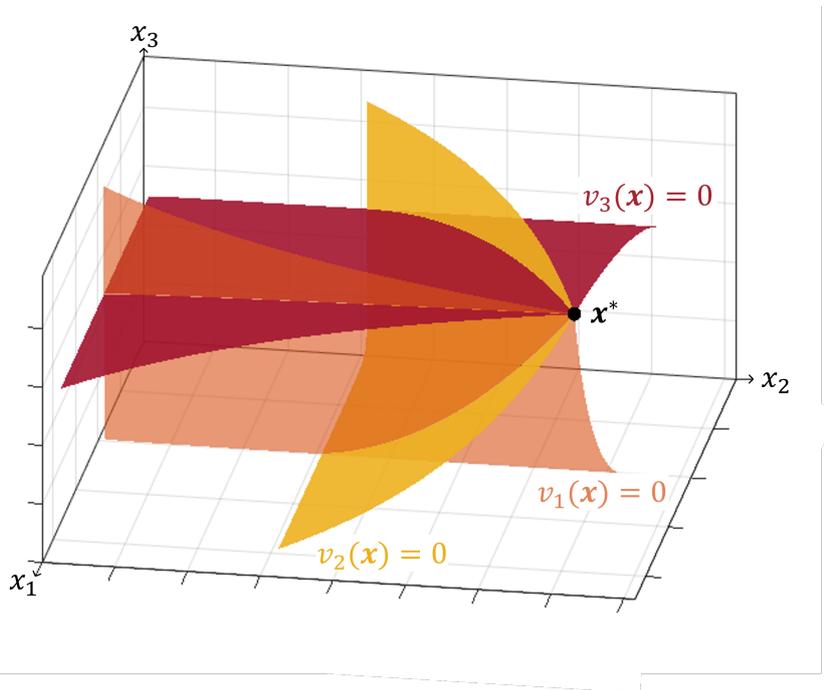


Figura 3.3: Os níveis  $v_j = 0$  e sua interseção  $\mathbf{x}^*$ , no caso tridimensional ( $N = 3$ ).

*Prova.* Tomemos um ponto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{>0}^N$  fora da caixa  $\prod_{j \leq N} [0, x_j^*]$ , ou seja, tal que existe  $q$  com  $x_q > x_q^*$ . Seja  $\mathbf{p} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$  e tome  $n$  tal que  $p_n = \max p_j$ . Logo,

$$p_n \geq p_q > 0 \tag{3-6}$$

O argumento explora a monotonicidade das funções  $v_j$  em relação às suas variáveis: vamos ver que a derivada direcional de  $v_n$  no segmento ligando os pontos  $\mathbf{x}^*$  e  $\mathbf{x}$  é positiva, de modo que  $v_n(\mathbf{x}) > v_n(\mathbf{x}^*) = 0$  e, assim,  $\mathbf{x}$  não satisfaz as condições do teorema. Mais precisamente, defina a função

$$g_j : t \in [0, 1] \mapsto v_j(\mathbf{x}^* + t\mathbf{p})$$

Como  $\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 1$  e para todo  $i \neq j$ ,  $\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -x_i^{-2} \left( \sum_{k \neq j} \frac{1}{x_k} \right)^{-2}$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{dg_j}{dt} &= \langle \nabla v_j(\mathbf{x}^* + t\mathbf{p}), \mathbf{p} \rangle = p_j - \sum_{i \neq j} \left\{ p_i (x_i^* + tp_i)^{-2} \left( \sum_{k \neq j} \frac{1}{x_k^* + tp_k} \right)^{-2} \right\} \\ &= p_j - \left( \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i^* + tp_i} \right)^{-2} \sum_{i \neq j} p_i (x_i^* + tp_i)^{-2} \end{aligned}$$

Então

$$\frac{dg_j}{dt} \geq p_j - p_n \left( \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i^* + tp_i} \right)^{-2} \sum_{i \neq j} (x_i^* + tp_i)^{-2}$$

Mas  $p_n > 0$ , por 3-6, e  $\left( \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i^* + tp_i} \right)^{-2} \sum_{i \neq j} (x_i^* + tp_i)^{-2} < 1$ , implicando

$$\frac{dg_j}{dt} > p_j - p_n .$$

Como esta inequação é válida para todo  $j$ , temos, em particular, que  $\frac{dg_n}{dt} > 0$ . Mas então  $g_n(t)$  é uma função estritamente crescente, partindo de  $g_n(0) = v_n(\mathbf{x}^*) = 0$ . Assim,  $g_n(1) - g_n(0) = v_n(\mathbf{x}) > 0$ . ■

Com os Lemas 3.1 e 3.2, concluímos a existência e unicidade do equilíbrio de Nash no caso de capacidades infinitas, se há mais de dois agentes e se a penalidade  $M$  e os custos máximos  $\bar{b}_j$  são suficientemente grandes.

**Teorema 3.2** *Sejam  $N > 2$  agentes com capacidades de geração infinita e funções de custo quadráticas de coeficientes  $c_j > 0$ , e seja o espaço de estratégias  $S^b = \prod_{j=1}^N (0, \bar{b}_j]$ . Defina  $S^{(0)}$  como o único ponto fixo de*

$$\Phi^{(0)} : s \in \mathbb{R}_{>0} \mapsto \sum_{j \leq N} \left( \frac{c_j}{2} + \frac{1}{s} + \sqrt{\frac{c_j^2}{4} + \frac{1}{s^2}} \right)^{-1}$$

*Se  $M > d \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{\bar{b}_j} \right)^{-1}$  e, para todo  $j$ ,  $\bar{b}_j > b_j^{(0)} = \frac{c_j}{2} + \frac{1}{S^{(0)}} + \sqrt{\frac{c_j^2}{4} + \left( \frac{1}{S^{(0)}} \right)^2}$ , então existe um único equilíbrio de Nash (tanto local como global), dado por  $b_j = b_j^{(0)}$ , para todo  $j$ .*

*Prova.* Como visto na Seção 3.1,  $M > d \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{\bar{b}_j} \right)^{-1}$  implica que  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N)$  é Nash (local e global) se só se

$$\forall j \leq N, b_j = \min \left\{ c_j + \left( \sum_{\substack{i \leq N \\ i \neq j}} \frac{1}{b_i} \right)^{-1}, \bar{b}_j \right\} \quad (3-7)$$

Isso é verdade no caso de  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(0)}$ , pois o Teorema 3.1 (fazendo  $\nu = 0$ ,  $\mu_j = c_j$  e trocando  $x_j$  por  $b_j$ ) e a hipótese  $\bar{b}_j \geq b_j^{(0)}$  implicam que  $\forall j \leq N, b_j^{(0)} = c_j + \left( \sum_{\substack{i \leq N \\ i \neq j}} \frac{1}{b_i^{(0)}} \right)^{-1} \leq \bar{b}_j$ . Logo,  $\mathbf{b}^{(0)}$  é Nash.

Falta demonstrar que  $\mathbf{b}^{(0)}$  é o único equilíbrio de Nash possível. Suponha haver outro equilíbrio  $\mathbf{b}^{(1)} = (b_1^{(1)}, \dots, b_N^{(1)})$ . Como  $\mathbf{b}^{(1)}$  satisfaz (3-7), temos  $\forall j, b_j^{(1)} \leq c_j + \left( \sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i^{(1)}} \right)^{-1}$ , ou seja,  $v_j(\mathbf{b}^{(1)}) \leq 0$ . Pelo Lema 3.2<sup>5</sup>,

$$\forall j, b_j^{(1)} \leq b_j^{(0)} < \bar{b}_j$$

Mas então, pela equação (3-7),  $\forall j \leq N, b_j^{(1)} = c_j + \left( \sum_{\substack{i \leq N \\ i \neq j}} \frac{1}{b_i^{(1)}} \right)^{-1}$  e, pela unicidade da solução (Teorema 3.1), teríamos  $\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{b}^{(0)}$ . ■

### 3.3

#### Quando o número de agentes cresce

Considere uma sequência  $(c_j)_{j \in \mathbb{N}}$  e seja  $\mathbf{b}_n = (b_{n,1}, b_{n,2}, \dots, b_{n,n})$ , com  $n > 2$ , a solução (única, pelo Lema 3.1)

$$\forall j \leq n, b_{n,j} = c_j + \left( \sum_{\substack{i \leq n \\ i \neq j}} \frac{1}{b_{n,i}} \right)^{-1}.$$

Se  $M$  e  $\bar{b}_j$  forem suficientemente grandes, conforme Teorema 3.2,  $\mathbf{b}_n$  é o equilíbrio de Nash resultante de considerar os primeiros  $n$  termos da sequência.

Um resultado usual em modelos econômicos é que a competição pressiona os agentes a declarar custos cada vez mais próximos a seus custos reais: o limite da diferença  $b_{n,j} - c_j$ , com  $n$  tendendo a infinito, comumente é zero.

Entretanto, quando  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{c_j}$  converge,  $b_{n,j}$  não tende a  $c_j$ . Se convergisse,

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n,j} - c_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{\substack{i \leq n \\ i \neq j}} \frac{1}{b_{n,i}} \right)^{-1} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{\substack{i \leq n \\ i \neq j}} \frac{1}{c_i} \right)^{-1} > 0,$$

usando  $b_{n,j} > c_j$ . Essa hipótese não é realista:  $(c_j)_{j \in \mathbb{N}}$  não admitiria cota superior. O resultado seguinte diz que se os coeficientes  $c_j$  são cotados por um valor  $L$ , então  $b_{n,j}$  tende a  $c_j$ .

<sup>5</sup>O ponto  $\mathbf{b}^{(0)}$  é o único satisfazendo  $\forall j, v_j(\mathbf{b}^{(0)}) = 0$ . Ou seja,  $\mathbf{b}^{(0)}$  é o  $\mathbf{x}^*$  no Lema.

**Proposição 3.2** *Seja  $m > 2$ ,  $\nu = 0$  e  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}_{>0}^m$  a solução do sistema (3-2). Se os  $\mu_j$ 's são uniformemente cotados por  $L$ , então*

$$\forall j \leq m, x_j - \mu_j \leq \frac{2L}{m-1}$$

*Prova.* Seja  $\tilde{i}$  tal que  $x_{\tilde{i}} = \max_{i \leq m} x_i$ .

$$\forall j \leq m, x_j - \mu_j = \left( \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i} \right)^{-1} \leq \left( \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_{\tilde{i}}} \right)^{-1} = \frac{x_{\tilde{i}}}{m-1} \quad (3-8)$$

Em particular

$$x_{\tilde{i}} - \mu_{\tilde{i}} \leq \frac{x_{\tilde{i}}}{m-1} \rightarrow x_{\tilde{i}} \leq \frac{m-1}{m-2} \mu_{\tilde{i}}$$

Como  $\frac{m-1}{m-2}$  é decrescente com  $m$ , seu maior valor ocorre quando  $m$  é mínimo, ou seja,  $m = 3$  e  $\frac{m-1}{m-2} = 2$ . Assim

$$\forall j \leq m, x_j \leq x_{\tilde{i}} \leq 2\mu_{\tilde{i}} \leq 2L$$

Voltando à equação (3-8), temos, para todo  $j$ ,  $x_j - \mu_j \leq \frac{x_{\tilde{i}}}{m-1} \leq \frac{2L}{m-1}$ , como queríamos demonstrar. ■

Uma consequência da demonstração é que  $b_j \leq 2 \max_i c_i$ : nenhuma oferta  $b_j$  irá superar o dobro do maior coeficiente quadrático  $c_j$ .

Isso implica que, se  $M > d \left( \sum_{j=1}^3 \frac{1}{b_j} \right)^{-1}$  e  $\bar{b}_j > 2L$  para todo  $j$ , então as condições do Teorema 3.2 são satisfeitas para todo  $n > 2$ , e  $\mathbf{b}_n$  é equilíbrio de Nash global. Com uma condição ainda menos restritiva, prova-se que, se  $\inf_{j \in \mathbb{N}} (\bar{b}_j) > L$  e  $M > d \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{b_j} \right)^{-1}$ , então  $\mathbf{b}_n$  é equilíbrio de Nash para  $n$  suficientemente grande (ver Teorema A.2 no Apêndice).

### 3.4

#### Propriedades adicionais do equilíbrio

**Proposição 3.3** *Sejam  $N > 2$  agentes com capacidades de geração infinita, funções de custo quadráticas de coeficientes  $c_j > 0$  e espaço de estratégias  $S_j^b = (0, \bar{b}_j]$ . Se as condições do Teorema 3.2 sobre  $M$  e  $\bar{b}_j$  são satisfeitas, o equilíbrio tem as seguintes propriedades.*

- Para todo  $j \leq N$ ,  $b_j^{(0)}$  independe da demanda.
- Preço e gerações são lineares com a demanda.
- Nenhum agente gera mais que metade da demanda<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Como  $N > 2$ , essa condição é coerente com a inexistência de déficit.

d. Se  $c_j > c_i$ , então  $b_j^{(0)} > b_i^{(0)}$ . Isto é, a ordenação dos agentes por lances ou por funções de custo é a mesma.

e. O lucro de todos os agentes é estritamente positivo.

f. Para todo  $j \leq N$ ,  $c_j < b_j^{(0)} \leq 2 \max_j c_j$ .

*Prova.*

Satisfeitas as condições do Teorema 3.2, no equilíbrio, os lances, o preço e a geração de cada agente são

$$b_j^{(0)} = \frac{c_j}{2} + \frac{1}{S^{(0)}} + \sqrt{\frac{c_j^2}{4} + \left(\frac{1}{S^{(0)}}\right)^2}, \quad (3-9)$$

$$\pi^{(0)} = d \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{b_j^{(0)}} \right)^{-1} = \frac{d}{S^{(0)}} \quad e \quad \frac{g_j^{(0)}}{d} = \frac{\pi^{(0)}}{b_j^{(0)} d} = \frac{1}{b_j^{(0)} S^{(0)}}$$

respectivamente. O ponto fixo  $S^{(0)}$  não depende da demanda  $d$ , de modo que os valores de  $b_j^{(0)}$  no equilíbrio também não variam com a demanda. Pelas fórmulas acima, o preço e a geração são lineares com a demanda (cada agente atende sempre à mesma fração da demanda). Isso prova (a) e (b).

Para ver (c),

$$\frac{g_j^{(0)}}{d} = \frac{1}{b_j^{(0)} S^{(0)}} = \left[ \frac{c_j S^{(0)}}{2} + 1 + \sqrt{\left(\frac{c_j S^{(0)}}{2}\right)^2 + 1} \right]^{-1} < \frac{1}{2}.$$

A demonstração de (d) é direta a partir de (3-9).

Para (e), uma vez que  $\pi^{(0)} = b_j^{(0)} g_j^{(0)}$  para todo  $j$ , temos (ver Seção 3.1)

$$L_j = \pi^{(0)} g_j^{(0)} - \frac{c_j}{2} (g_j^{(0)})^2 = \left(b_j^{(0)} - \frac{c_j}{2}\right) (g_j^{(0)})^2.$$

Mas  $b_j^{(0)} = c_j + \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i^{(0)}}\right)^{-1} > \frac{c_j}{2}$  e  $g_j^{(0)} > 0$ , desde que  $d > 0$ .

Para (f), ver demonstração da Proposição 3.2 e comentário ao fim da Seção 3.3. ■

## 4

### Equilíbrios de Nash em $\mathcal{S}^b$ com capacidades limitadas

Neste capítulo, cada agente  $j$  possui uma capacidade total de geração  $\bar{G}_j > 0$ , que diferentemente do último capítulo, é *finita*. Os agentes dão como lance um valor  $b_j$  no intervalo  $\mathcal{S}_j^b = \left(0, \frac{M}{\bar{G}_j}\right]$ . O operador, então, resolve o problema de minimização de custos (2-1), considerando os valores declarados de  $b_j$  e as capacidades  $\bar{g}_j = \bar{G}_j$ .

Para  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , dizemos que  $u \geq v$  se e somente se  $u_j \geq v_j$  para  $j = 1, \dots, n$ . O resultado a seguir será demonstrado e refinado na Proposição 4.1, Teorema 4.2, Teorema 4.3 e Teorema 4.4.

**Teorema 4.1** *Suponha  $\bar{G}_j$  e  $\mathcal{S}^b = \prod_{j \leq N} \left(0, \frac{M}{\bar{G}_j}\right]$  como acima. Então*

- a. *Se  $\sum_{j \leq N} \bar{G}_j \leq d$ , qualquer ponto do espaço de estratégias é Nash global.*
- b. *Se  $\sum_{j \leq N} \bar{G}_j > d > 0$ , os equilíbrios de Nash locais no interior de  $\mathcal{S}^b$  formam um número finito de caixas  $E_i$  em  $\mathcal{S}^b$ ,  $i \leq 2^N - \binom{N}{2} - N - 1$ . Em cada  $E_i$ , o despacho, preço e lucro resultantes são constantes.*
- c. *Se  $\mathbf{b} \in E_i$  não é um equilíbrio de Nash global, então qualquer outro ponto  $\mathbf{b}^* \in E_i$  com  $\mathbf{b}^* \geq \mathbf{b}$  também não é Nash global.*

#### 4.1

##### Caso de déficit

**Proposição 4.1** *Suponha  $\sum_{j \leq N} \bar{G}_j \leq d$ . Então qualquer ponto em  $\mathcal{S}^b = \prod_{j \leq N} \mathcal{S}_j^b$  é um equilíbrio de Nash global e leva ao mesmo despacho  $g_j = \bar{G}_j$  do sistema e aos mesmos lucros dos agentes.*

*Prova.* A restrição das estratégias ao espaço  $b_j \in \left(0, \frac{M}{\bar{G}_j}\right]$ , junto com o Teorema 2.2, implica que a solução do problema do operador será  $\forall j, g_j = \bar{G}_j$  e  $\text{def} = d - \sum_{j \leq N} \bar{G}_j$ , para qualquer  $n$ -upla de lances  $(b_1, b_2, \dots, b_N)$ . Isto é, todo agente gera à máxima capacidade, mas isso não é suficiente para atender à totalidade da demanda, havendo déficit pelo montante sobressalente.

Pelo mesmo Teorema 2.2, o preço da energia é sempre  $\pi = M$  (com a convenção de que o preço é  $M$  também no caso  $\sum_{j \leq N} \bar{G}_j = d$ , em que o multiplicador de Lagrange associado à restrição de balanço de energia (2-2) não

é unicamente definido). Para qualquer agente  $j$ , o seu lucro é  $L_j = M\bar{G}_j - \frac{c_j}{2}\bar{G}_j^2$ , e como este valor não depende de  $b_j$ , todo vetor de estratégias é Nash. ■

O resultado prova o item (a) do Teorema 4.1.

## 4.2

### Homogeneidade: dividindo $\mathcal{S}^b$ em cones

Desta seção até o fim deste capítulo, vamos supor  $\sum_{j \leq N} \bar{G}_j > d > 0$ . Pelo Teorema 2.1, para  $\mathbf{b} \in \mathcal{S}^b$ , há uma única solução do problema do operador, e para ela,  $\text{def} = 0$ .

Abusando um pouco a notação, vamos considerar as *funções* preço  $\pi(\mathbf{b})$ , geração  $g_j(\mathbf{b})$  e lucro  $L_j(\mathbf{b}) = \pi(\mathbf{b})g_j(\mathbf{b}) - \frac{c_j}{2}g_j^2(\mathbf{b})$  para indicar a dependência dos valores obtidos pela solução do problema do operador<sup>1</sup> em termos do parâmetro de entrada  $\mathbf{b}$ .

Definimos dois subconjuntos complementares de agentes:

$$J_{full}(\mathbf{b}) = \{j \leq N \mid g_j(\mathbf{b}) = \bar{G}_j\}, \quad J_{part}(\mathbf{b}) = \{j \leq N \mid g_j(\mathbf{b}) < \bar{G}_j\},$$

respectivamente os conjuntos de agentes que geram a capacidade plena ou parcial (daí os nomes *full* e *part*) na solução ótima obtida pelo operador.

**Lema 4.1** *Seja  $\sum_{j \leq N} \bar{G}_j > d > 0$  e  $\mathbf{b} \in \mathcal{S}^b$ .*

a.  $j \in J_{part}(\mathbf{b}) \iff \pi(\mathbf{b}) < b_j \bar{G}_j$ ,  $j \in J_{full}(\mathbf{b}) \iff \pi(\mathbf{b}) \geq b_j \bar{G}_j$ .

b.  $\pi(\mathbf{b}) = \left( d - \sum_{j \in J_{full}(\mathbf{b})} \bar{G}_j \right) / \left( \sum_{j \in J_{part}(\mathbf{b})} \frac{1}{b_j} \right)$ .

c. O lucro é dado por

$$L_j(\mathbf{b}) = \left( b_j - \frac{c_j}{2} \right) \left[ \frac{d - \sum_{i \in J_{full}(\mathbf{b})} \bar{G}_i}{1 + b_j \sum_{\substack{i \in J_{part}(\mathbf{b}) \\ i \neq j}} \frac{1}{b_i}} \right]^2, \quad \text{se } j \in J_{part}(\mathbf{b})$$

$$L_j(\mathbf{b}) = \left[ \frac{d - \sum_{\substack{i \in J_{full}(\mathbf{b}) \\ i \neq j}} \bar{G}_i}{\sum_{i \in J_{part}(\mathbf{b})} \frac{1}{b_i}} \right] \bar{G}_j - \left[ \frac{c_j}{2} + \left( \sum_{i \in J_{part}(\mathbf{b})} \frac{1}{b_i} \right)^{-1} \right] \bar{G}_j^2, \quad \text{se } j \in J_{full}(\mathbf{b})$$

<sup>1</sup>A unicidade da solução do problema do operador, provada em 2.1 garante que a função  $g$  está bem definida, enquanto o Teorema 2.1 implica em  $\pi$  bem definida.

Pelo item (b), o preço é proporcional à média harmônica<sup>2</sup> dos lances dos agentes em  $J_{part}$ <sup>3</sup>.

*Prova.* Pelo Lema 2.1,  $g_j(\mathbf{b}) = \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_j}, \bar{G}_j \right\}$ , e a primeira afirmação é imediata. Para a segunda, some as gerações dos agentes em  $J_{part}$  e em  $J_{full}$ <sup>4</sup>,

$$\sum_{j \in J_{part}(\mathbf{b})} \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_j} + \sum_{j \in J_{full}(\mathbf{b})} \bar{G}_j = d$$

e isole  $\pi(\mathbf{b})$ .

Substituindo a fórmula para o preço do item (b) na expressão do lucro e sabendo que  $g_j(\mathbf{b}) = \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_j}$ , se  $j \in J_{part}(\mathbf{b})$ , ou  $g_j(\mathbf{b}) = \bar{G}_j$ , se  $j \in J_{full}$ , obtém-se as fórmulas para o lucro  $L_j(\mathbf{b})$  do item (c). ■

Vamos considerar alguns subconjuntos especiais de  $\mathcal{S}^b$ . Seja  $\mathcal{C}_J = \{\mathbf{b} \in \mathcal{S}^b \mid J_{full}(\mathbf{b}) = J\}$ . Nesta definição,  $J$  pode ser qualquer subconjunto de agentes diferente de  $\{1, 2, \dots, N\}$ <sup>5</sup>. Por exemplo,  $\mathcal{C}_{\{1,2\}}$  é o conjunto dos vetores de estratégias que levam a soluções do problema do operador em que os agentes 1 e 2 (e somente esses) geram a plena capacidade. Já  $\mathcal{C}_\emptyset$  é o conjunto das estratégias que levam a soluções com todos os agentes gerando apenas uma parcela de sua capacidade total. O conjunto  $\mathcal{C}_J$  é o *subcone* associado a  $J$ . Essa nomenclatura provém do fato de que  $\mathcal{C}_J$  é um conjunto de segmentos limitados partindo da origem, conforme estabelece o seguinte Lema.

**Lema 4.2** *Suponha  $\sum_{j \leq N} \bar{G}_j > d > 0$ . Seja  $\mathbf{b} \in \mathcal{S}^b$  e  $\theta \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $(\theta\mathbf{b}) \in \mathcal{S}^b$ . Então*

$$\pi(\theta\mathbf{b}) = \theta\pi(\mathbf{b}) , \quad g(\theta\mathbf{b}) = g(\mathbf{b}) , \quad J_{part}(\theta\mathbf{b}) = J_{part}(\mathbf{b}) .$$

*Prova.* Pelo Teorema 2.1,

$$\sum_{j=1}^N \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_j}, \bar{G}_j \right\} = d.$$

Se todos os  $b_j$  forem multiplicados por  $\theta$ , então basta multiplicar  $\pi$  pelo mesmo  $\theta$  para manter esta igualdade. Pelo mesmo teorema, não existem dois valores de  $\pi$  que resolvem  $\sum_{j=1}^N \min \left\{ \frac{\pi}{\theta b_j}, \bar{G}_j \right\} = d$ , e assim  $\pi(\theta\mathbf{b}) = \theta\pi(\mathbf{b})$ .

<sup>2</sup>A média harmônica aqui é  $\text{card}(J_{part}(\mathbf{b})) \left( \sum_{j \in J_{part}(\mathbf{b})} \frac{1}{b_j} \right)^{-1}$ .

<sup>3</sup>A fórmula também é válida na situação tratada no Capítulo 3, quando todos os agentes estão em  $J_{part}$ , bastando fazer  $J_{full} = \emptyset$ .

<sup>4</sup>Ou use diretamente a equação do Teorema 2.1.

<sup>5</sup>Se todos os agentes gerassem com capacidade máxima,  $\sum g_j = \sum \bar{G}_j > d$ , um absurdo.

Então,  $g_j(\theta \mathbf{b}) = \min \left\{ \frac{\pi(\theta \mathbf{b})}{\theta b_j}, \bar{G}_j \right\} = \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_j}, \bar{G}_j \right\} = g_j(\mathbf{b})$ , o que implica, por definição,  $J_{part}(\theta \mathbf{b}) = J_{part}(\mathbf{b})$ . ■

Subcones são descritos por desigualdades.

**Lema 4.3** *Suponha  $\sum_{j \leq N} \bar{G}_j > d > 0$ . Então  $\mathbf{b} \in S^b$  pertence a  $\mathcal{C}_J$  se só se*

$$\forall j \in J, b_j \leq \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{G}_i}{\bar{G}_j \sum_{i \notin J} \frac{1}{b_i}} \quad e \quad \forall j \notin J, \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{G}_i}{1 + b_j \sum_{\substack{i \notin J \\ i \neq j}} \frac{1}{b_i}} < \bar{G}_j .$$

Pela unicidade da solução do operador, não há interseção entre subcones diferentes, o que equivale a dizer que, para todo  $\mathbf{b} \in S^b$ , só há um subconjunto  $J$  satisfazendo as condições do Lema 4.3.

*Prova.* ( $\Leftarrow$ ) Defina  $\lambda = \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{G}_i}{\sum_{i \notin J} \frac{1}{b_i}}$ . As duas condições do enunciado implicam  $b_j \bar{G}_j \leq \lambda$  se  $j \in J$  e  $b_j \bar{G}_j > \lambda$  se  $j \notin J$ . Assim

$$\sum_{j=1}^N \min \left\{ \frac{\lambda}{b_j}, \bar{G}_j \right\} = \lambda \sum_{j \notin J} \frac{1}{b_j} + \sum_{j \in J} \bar{G}_j = d$$

e pelo Teorema 2.1, temos  $\pi(\mathbf{b}) = \lambda$ . Pelo Lema 4.1 (a),  $J_{full}(\mathbf{b}) = J$ .

( $\Rightarrow$ ) Se  $\mathbf{b} \in \mathcal{C}_J$ , pelo Lema 4.1 (b), temos

$$\pi(\mathbf{b}) = \frac{d - \sum_{j \in J} \bar{G}_j}{\sum_{j \notin J} \frac{1}{b_j}}$$

e por (a), valem as duas condições do enunciado. ■

**Lema 4.4** *Suponha  $\sum_{j \leq N} \bar{G}_j > d > 0$  e seja  $\mathbf{b} \in \mathcal{C}_J$ , com  $J \neq \emptyset$ . Tome  $q \in J$  e um ponto  $\mathbf{b}'$  tal que  $0 < b'_q < b_q$  e para todo  $j \neq q$ ,  $b'_j = b_j$ . Então*

$$\pi(\mathbf{b}') = \pi(\mathbf{b}) , \quad \forall i \leq N, \quad g_i(\mathbf{b}') = g_i(\mathbf{b})$$

o que implica  $\mathbf{b}' \in \mathcal{C}_J$ .

O fato que  $\mathbf{b}' \in \mathcal{C}_J$  segue direto do lema anterior.

*Prova.* Como  $q \in J_{full}(\mathbf{b})$ ,  $\frac{\pi(\mathbf{b})}{b'_q} > \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_q} \geq \bar{G}_q$ , pelo Lema 4.1(a). Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{j \leq N} \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{b})}{b'_j}, \bar{G}_j \right\} &= \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{b})}{b'_q}, \bar{G}_q \right\} + \sum_{j \neq q} \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_j}, \bar{G}_j \right\} \\ &= \sum_{j=1}^N \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_j}, \bar{G}_j \right\} = d \end{aligned}$$

A última igualdade vem do Teorema 2.1. Pela unicidade da solução desta equação, do mesmo teorema,  $\pi(\mathbf{b}') = \pi(\mathbf{b})$ . Então

$$\forall j \neq q, g_i(\mathbf{b}') = \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{b}')}{b_j}, \bar{G}_j \right\} = g_i(\mathbf{b}),$$

$$g_q(\mathbf{b}') = \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{b}')}{b'_q}, \bar{G}_q \right\} = \bar{G}_q = g_q(\mathbf{b})$$

■

Pelo Lema 4.4, reduzir os lances de um agente em  $J_{full}(\mathbf{b})$  não afeta as gerações, os preços e, conseqüentemente, os lucros. Por indução, podemos reduzir a oferta de qualquer número de agentes em  $J_{full}$  e manter a solução do operador inalterada. Em termos geométricos, se  $\mathbf{b}$  pertence a  $\mathcal{C}_J$ , a caixa  $\prod_{j \in J} (0, b_j] \times \prod_{i \notin J} b_i$  também pertence.

O próximo lema caracteriza as fronteiras dos subcones.

**Lema 4.5** *Suponha  $\sum_{j \leq N} \bar{G}_j > d > 0$ . Seja  $\mathbf{b} \in S^b$ . Então*

$$\exists J, \mathbf{b} \in \partial \mathcal{C}_J \iff \exists j \leq N, (b_j \bar{G}_j = \pi(\mathbf{b}) \vee b_j \bar{G}_j = M)$$

em que  $\partial \mathcal{C}_J$  representa a fronteira de  $\mathcal{C}_J$ .

*Prova.*

( $\Leftarrow$ ) Se  $b_j \bar{G}_j = M$ , então  $\mathbf{b} \in \partial S^b$ . Logo,  $\mathbf{b} \in \partial \mathcal{C}_J$ , com  $J = J_{full}(\mathbf{b})$ .

Já se  $b_j \bar{G}_j = \pi(\mathbf{b})$ , então, pelo Lema 4.1(a),  $j \in J_{full}(\mathbf{b})$ . Tome  $\epsilon > 0$  e  $\mathbf{b}^-$ ,  $\mathbf{b}^+$  com  $b_j^- = b_j - \epsilon$ ,  $b_j^+ = b_j + \epsilon$  e  $b_i^- = b_i^+ = b_i, \forall i \neq j$ . Pelo Lema 4.4,  $\mathbf{b}^- \in \mathcal{C}_{J_{full}(\mathbf{b})}$ . Vamos ver agora que  $\mathbf{b}^+ \notin \mathcal{C}_{J_{full}(\mathbf{b})}$ . Por contradição, se  $\mathbf{b}^+ \in \mathcal{C}_{J_{full}(\mathbf{b})}$ , teríamos, pelo Lema 4.3:

$$b_j + \epsilon = b_j^+ \leq \frac{d - \sum_{i \in J_{full}(\mathbf{b})} \bar{G}_i}{\bar{G}_j \sum_{i \in J_{part}(\mathbf{b})} \frac{1}{b_i^+}} = \frac{d - \sum_{i \in J_{full}(\mathbf{b})} \bar{G}_i}{\bar{G}_j \sum_{i \in J_{part}(\mathbf{b})} \frac{1}{b_i}} = \frac{\pi(\mathbf{b})}{\bar{G}_j} = b_j$$

em que a penúltima igualdade vem do Lema 4.1(b). Mas isso é absurdo.

Portanto, a afirmação é verdadeira, com  $J = J_{full}(\mathbf{b})$ .

( $\Rightarrow$ ) Seja  $\mathbf{b} \in S^b$  satisfazendo  $(b_j \bar{G}_j \neq \pi(\mathbf{b}) \wedge b_j \bar{G}_j < M)$  para todo  $j$ , e defina  $J = J_{full}(\mathbf{b})$ . Vamos provar que  $\mathbf{b}$  está no interior do subcone  $\mathcal{C}_J$  – e logo não pode estar na fronteira deste nem de nenhum outro subcone, já que os subcones não têm interseção.

Por 4.1(a),  $\forall j \in J, \pi(\mathbf{b}) > b_j \bar{G}_j$  e  $\forall j \notin J, \pi(\mathbf{b}) < b_j \bar{G}_j$ . Então existe  $\epsilon \in (0, 1)$  tal que:

$$\forall j \in J, \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} < \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_j \bar{G}_j},$$

$$\forall j \notin J, \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} < \frac{b_j \bar{G}_j}{\pi(\mathbf{b})} \text{ e}$$

$$\forall j \leq N, b_j(1 + \epsilon) \bar{G}_j < M$$

já que  $\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}$  é uma função contínua e crescente no intervalo  $\epsilon \in (0, 1)$ , e sua imagem é o intervalo  $(1, \infty)$ .

Tome  $\mathbf{b}'$  tal que  $(1 - \epsilon)b_j < b'_j < (1 + \epsilon)b_j$  para todo  $j$ . Pela última das equações acima,  $b'_j \bar{G}_j < M$  e assim  $\mathbf{b}' \in \mathcal{S}^b$ . Então

$$\begin{aligned} \forall j \notin J, \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{G}_i}{1 + b'_j \sum_{i \notin J, i \neq j} \frac{1}{b'_i}} &< \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{G}_i}{(1 - \epsilon)b_j \sum_{i \notin J} \frac{1}{b_i(1 + \epsilon)}} \\ &= \frac{(1 + \epsilon)}{(1 - \epsilon)} \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{G}_i}{b_j \sum_{i \notin J} \frac{1}{b_i(1 + \epsilon)}} = \frac{(1 + \epsilon)}{(1 - \epsilon)} \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_j} < \bar{G}_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall j \in J, \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{G}_i}{\bar{G}_j \sum_{i \notin J} \frac{1}{b'_i}} &> \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{G}_i}{\bar{G}_j \sum_{i \notin J} \frac{1}{b_i(1 - \epsilon)}} \\ &= (1 - \epsilon) \frac{\pi(\mathbf{b})}{\bar{G}_j} > (1 + \epsilon)b_j > b_j \end{aligned}$$

Segue do Lema 4.3 que  $\mathbf{b}' \in \mathcal{C}_J$ . Assim, existe uma vizinhança do ponto  $\mathbf{b}$  que está em  $\mathcal{C}_J$ :  $\mathbf{b}$  está no interior do subcone.  $\blacksquare$

### 4.3

#### Equilíbrios de Nash locais no interior de subcones

Em equilíbrios de Nash locais, cada agente maximiza seu lucro localmente, fixadas as estratégias dos outros agentes. Os lucros são obtidos das funções do Lema 4.1(c), que são diferentes em cada subcone, pois as parcelas consideradas nos somatórios mudam a depender de quais agentes geram a capacidade plena ou parcial. No interior de cada subcone, essas parcelas são sempre as mesmas, o que garante a diferenciabilidade das funções de lucro. Equilíbrios de Nash interiores a um subcone, portanto, podem ser encontrados igualando as derivadas parciais dos lucros a zero.

As implicações estão resumidas no resultado a seguir.

**Teorema 4.2** *Seja  $\sum_{j \leq N} \bar{G}_j > d > 0$  e  $J$  com  $\text{card}(J) < N - 1$ . Um ponto  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_{>0}^N$  é um equilíbrio de Nash local no interior do subcone  $\mathcal{C}_J$  se só se*

$$\forall j \notin J, b_j = c_j + \left( \sum_{i \notin J \cup \{j\}} \frac{1}{b_i} \right)^{-1} \quad (4-1)$$

$$\forall j \notin J, \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{G}_i}{1 + b_j \sum_{i \notin J \cup \{j\}} \frac{1}{b_i}} < \bar{G}_j, \quad \forall j \in J, b_j < \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{G}_i}{\bar{G}_j \sum_{i \notin J} \frac{1}{b_i}} \quad (4-2)$$

$$\forall j \leq N, b_j \bar{G}_j < M \quad (4-3)$$

Se  $\text{card}(J) = N - 1$ , não há equilíbrio de Nash local interior a  $\mathcal{C}_J$ .

*Prova.* Primeiro, as condições (4-2) e (4-3) são necessárias e suficientes para que  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$  esteja no interior de  $\mathcal{C}_J$ . De fato, se as condições são satisfeitas, o Lema 4.3 garante que  $\mathbf{b} \in \mathcal{C}_J$  e o Lema 4.1(b), que  $\pi(\mathbf{b}) = \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{G}_i}{\sum_{i \notin J} \frac{1}{b_i}}$ . Então as condições (4-2) implicam que  $\forall j \notin J, b_j \bar{G}_j > \pi(\mathbf{b})$  e que  $\forall j \in J, b_j \bar{G}_j < \pi(\mathbf{b})$ . Pelo Lema 4.5,  $\mathbf{b}$  não está em nenhuma fronteira e, portanto, é interior a  $\mathcal{C}_J$ .

Para demonstrar a recíproca, suponha  $\mathbf{b}$  no interior de  $\mathcal{C}_J$  (logo, fora das fronteiras de qualquer cone). As condições (4-2) e (4-3) surgem diretamente do Lema 4.3 e da definição de  $S^b$ , respectivamente. Do Lema 4.1(a) e 4.1(b), podemos fazer  $\forall j \in J, b_j \bar{G}_j \leq \pi(\mathbf{b}) = \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{G}_i}{\sum_{i \notin J} \frac{1}{b_i}}$ . Pelo Lema 4.5, a igualdade não pode valer, donde provamos (4-2).

Falta provar que um ponto no interior de  $\mathcal{C}_J$  (inclusive para  $\text{card}(J) = N - 1$ ) é Nash local se e só se satisfaz (4-1). Se  $\mathbf{b}$  está no interior de  $\mathcal{C}_J$ , existe  $\epsilon$  tal que, para todo ponto  $\mathbf{x}$  com  $\|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_\infty \leq \epsilon$ , temos, pelo Lema 4.1(c),

$$\forall j \in J, L_j(\mathbf{x}) = \left[ \frac{d - \sum_{i \notin J \cup \{j\}} \bar{G}_i}{\sum_{i \notin J} \frac{1}{x_i}} \right] \bar{G}_j - \left[ \frac{c_j}{2} + \left( \sum_{i \notin J} \frac{1}{x_i} \right)^{-1} \right] \bar{G}_j^2$$

e

$$\forall j \notin J, L_j(\mathbf{x}) = \left( x_j - \frac{c_j}{2} \right) \left[ \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{G}_i}{1 + x_j \sum_{i \notin J \cup \{j\}} \frac{1}{x_i}} \right]^2.$$

Nessa vizinhança de  $\mathbf{b}$ , tais funções são diferenciáveis. Suponha  $\text{card}(J) < N - 1$ . Então, para  $j \notin J, \frac{\partial L_j}{\partial b_j}(\mathbf{b}) = 0$  se e só se  $b_j = c_j + \left( \sum_{i \notin J \cup \{j\}} \frac{1}{b_i} \right)^{-1}$ , como visto na demonstração da Proposição 3.1. Já para  $j \in J$ , a função lucro é constante em toda vizinhança. Assim, a condição (4-1) é necessária e suficiente para que  $\mathbf{b}$  seja Nash local.

No caso de  $\text{card}(J) = N - 1$ , só há um agente  $p \notin J$  e o lucro desse agente, se  $|x_p - b_p| < \epsilon$  é dado por:

$$L_p(b_1, \dots, x_p, \dots, b_N) = \left( x_p - \frac{c_p}{2} \right) \left[ d - \sum_{i \neq p} \bar{G}_i \right]^2$$

crescente em  $x_p$ . Logo,  $L_p(b_1, \dots, b_p + \frac{\epsilon}{2}, \dots, b_N) > L_p(b_1, \dots, b_p, \dots, b_N)$ . Mas

então  $\mathbf{b}$ , um ponto no interior de  $\mathcal{C}_J$ , não pode ser Nash local. ■

Nem sempre as condições (4-2) e (4-3) podem ser satisfeitas (ver demonstração do Corolário 4.2.1) e, conseqüentemente, pode haver subcones sem nenhum equilíbrio de Nash local em seu interior. É possível até não existir nenhum subcone com equilíbrios locais interiores (ver exemplo na Seção 6.1.3).

O corolário seguinte estabelece uma parte do Teorema 4.1(b): que os equilíbrios de Nash locais formam caixas  $E_i$ . Pelo Lema 4.4, todos os pontos de  $E_i$  levam ao mesmo preço spot, às mesmas gerações e aos mesmos lucros. Para demonstrar a parte faltante – que não existem mais de  $2^N - \binom{N}{2} - N - 1$  caixas – usaremos um resultado da Seção 4.5, que afirma não existirem equilíbrios locais nas fronteiras entre cones. Desse modo, as caixas em cada subcone formam os únicos equilíbrios possíveis no interior de  $S^b$  e o número limite vem do fato de não haver caixas nos subcones com somente um ou dois agentes fora de  $J$  – e de não haver subcone com  $J = \{1, 2, \dots, N\}$ .

**Corolário 4.2.1** *a. Não há equilíbrio de Nash (local ou global) interior a  $\mathcal{C}_J$  se  $\text{card}(J) = N - 2$ .*

*b. Os equilíbrios de Nash locais em um subcone  $\mathcal{C}_J$ , se existirem, formam uma caixa de dimensão  $\text{card}(J)$ .*

*c. Se  $\mathbf{b}$  é Nash local interior a  $\mathcal{C}_J$ , então  $\mathbf{b}'$  tal que*

$$\forall j \notin J, b'_j = b_j \quad e \quad \forall j \in J, b'_j \leq b_j$$

*também é equilíbrio de Nash local.*

*Prova.*

Pelo Lema 3.1, o sistema (4-1) não tem solução quando há somente duas equações, provando (a). Caso contrário, para um dado conjunto  $J$  com  $\text{card}(J) < N - 2$ , existe uma única solução para o sistema, um vetor de dimensão  $N - \text{card}(J)$  com coordenadas  $b_j^*$ , para os agentes  $j \notin J$ .

Falta verificar (4-2) e (4-3). Há três casos em que estas não podem ser atendidas e, conseqüentemente, não existirão equilíbrios de Nash locais em  $\mathcal{C}_J$ :

1. Se  $d - \sum_{i \in J} \bar{G}_i \leq 0$ , de modo que a condição (4-2) não pode ser satisfeita (para  $q \in J$ , nenhum valor  $b_q$  positivo satisfaz a condição);
2. Se existir  $j \notin J$  tal que

$$\frac{d - \sum_{i \in J} \bar{G}_i}{1 + b_j^* \sum_{i \notin J \cup \{j\}} \frac{1}{b_i^*}} \geq \bar{G}_j ,$$

o que também impossibilita (4-2);

3. Se existir  $j \notin J$  tal que  $b_j^* \bar{G}_j \geq M$ , o que impossibilita (4-3).

Se não cairmos em nenhum desses casos<sup>6</sup>, então temos  $\text{card}(J)$  graus de liberdade: para os agentes em  $J$ , qualquer valor de  $b_j$  em

$$\left( 0, \min \left\{ \frac{M}{\bar{G}_j}, \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{G}_i}{\bar{G}_j \sum_{i \notin J} \frac{1}{b_i^*}} \right\} \right)$$

satisfaz as condições (4-2) e (4-3), formando uma caixa de equilíbrios de Nash locais no interior de  $\mathcal{C}_J$ . Isto prova (b) e o item (c) é consequência. ■

## 4.4

### Algumas ferramentas

Nesta seção, vamos fixar as ofertas de todos os agentes, exceto um, e analisar como o lucro deste agente muda conforme este varia seu lance. Isto é, vamos olhar para um subespaço unidimensional de  $\mathcal{S}^b$ . Há dois objetivos: o primeiro é permitir uma melhor intuição dos resultados obtidos nas seções anteriores. O segundo é demonstrar na próxima seção que pontos nas fronteiras dos subcones  $\mathcal{C}_j$  (desde que não estejam na fronteira de  $\mathcal{S}^b$ ) não são equilíbrios de Nash locais.

#### 4.4.1

##### O lucro como área

Supondo  $\sum_{j \leq N} \bar{G}_j > d > 0$ , pelo Teorema 2.1, o problema do operador é equivalente a resolver a equação (2-18) em  $\pi$ , que pode ser reformulada do seguinte modo:

$$\forall i \leq N, \min \left\{ \frac{\pi}{b_i}, \bar{G}_i \right\} = d - \sum_{j \neq i} \min \left\{ \frac{\pi}{b_j}, \bar{G}_j \right\}$$

O lado direito dessa equação, uma função de  $\pi$ , é a *demand residual* do agente  $i$ . Ela indica, para cada nível de preço  $\pi$ , o quanto da demanda não é atendida pelos outros agentes<sup>7</sup>. O lado esquerdo é a *função de oferta* do agente

<sup>6</sup>Em resumo, a condição para existência de equilíbrios de Nash locais em  $\mathcal{C}_J$  é

$$0 < \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{G}_i}{\sum_{i \notin J} \frac{1}{b_i^*}} < \min_{j \notin J} \{b_j^* \bar{G}_j\} \leq \max_{j \notin J} \{b_j^* \bar{G}_j\} < M,$$

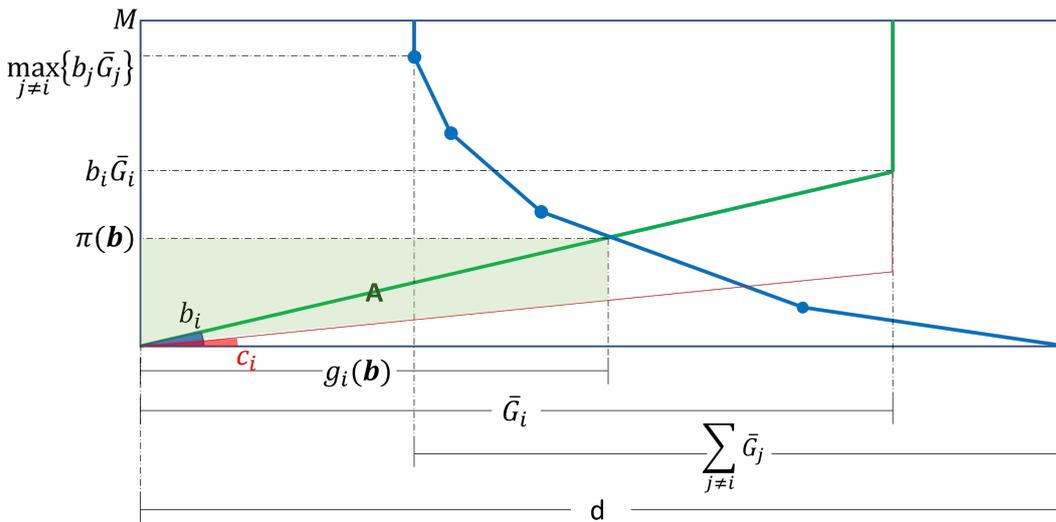
satisfeita mais facilmente para  $d$  pequeno, mas maior que  $\sum_{i \in J} \bar{G}_i$ , e  $M$  grande.

<sup>7</sup>Lembrando que  $\forall j, g_j = \min \left\{ \frac{\pi}{b_j}, \bar{G}_j \right\}$ , pelo Lema 2.1.

$i$ . A solução do problema do operador se dá ao preço em que as funções de oferta e de demanda residual do agente  $i$  se cruzam.

A figura 4.1 ilustra o cruzamento das duas curvas, com o preço no eixo vertical. A demanda residual é representada pela curva em azul, uma função não-crescente, linear por partes, e convexa em  $\pi$  (Lema 2.2). Se o preço é zero, a demanda residual é  $d$  (não há geração). Na medida em que o preço cresce, a demanda residual diminui, até chegar em 0 ou  $d - \sum_{j \neq i} \bar{G}_j$ , o que for maior – no caso desenhado,  $d - \sum_{j \neq i} \bar{G}_j > 0$ .

A função de oferta do agente  $i$  está em verde. A geração do agente aumenta com o preço, até atingir a capacidade máxima  $\bar{G}_i$  quando o preço for  $b_i \bar{G}_i$ . A partir desse ponto, aumentos de preço não alteram a geração do agente  $i$ . Quando o preço supera  $\max_{j \leq N} \{b_j \bar{G}_j\}$  (um valor menor ou igual a  $M$ , por hipótese), tanto a oferta do agente  $i$  como sua demanda residual são constantes (segmentos verticais na figura). O preço no cruzamento das duas curvas é menor que  $M$ , e não representamos na figura preços acima de  $M$ .



PUC-Rio - Certificação Digital N° 2012237/CA

Figura 4.1: Funções de oferta e de demanda residual do agente  $i$ .

O cruzamento das duas curvas, o ponto  $(g_i(\mathbf{b}), \pi(\mathbf{b}))$  na Figura 4.1, é a solução do problema do operador. O agente  $i$  gera  $g_i(\mathbf{b})$  e o preço é  $\pi(\mathbf{b})$ .

A receita do agente  $i$ ,  $\pi(\mathbf{b})g_i(\mathbf{b})$ , é a área de um retângulo na figura 4.1. A figura também mostra, em vermelho, o custo marginal real do agente  $i$ , o produto  $c_i g_i$ . A área sob a curva vermelha de 0 a  $g_i(\mathbf{b})$  é seu custo total. Portanto, o lucro do agente  $i$  é a área  $A$  do trapézio verde na figura, o resultado de subtrair a receita pelos custos.

Supondo as estratégias dos outros agentes fixas, se o agente aumenta o valor de  $b_i$ , ele altera a inclinação da curva de oferta, como se vê na Figura



A Figura 4.4 mostra o caso em que o cruzamento das duas curvas está abaixo da curva de custo marginal  $\pi(\mathbf{b}) < c_i g_i(\mathbf{b})$ . O lucro do agente segue sendo  $L_j = \pi(\mathbf{b})g_i(\mathbf{b}) - \frac{c_i}{2}g_i(\mathbf{b})^2$ , não mais a área de um trapézio, mas a diferença de áreas entre o triângulo vermelho e o verde da figura.

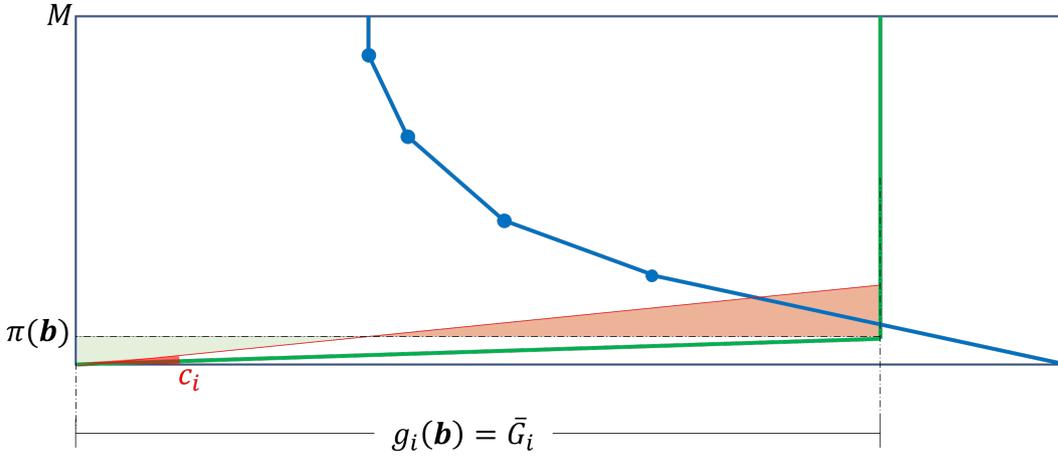


Figura 4.4: Caso com preço menor que o custo marginal do agente.

#### 4.4.2 Maximização da área

Maximizar o lucro individual do agente  $i$ , fixadas as estratégias dos outros agentes, significa, portanto, encontrar o ponto da curva de demanda residual que maximiza a área de um trapézio, ou a diferença de áreas dos triângulos na Figura 4.4. Vamos explicitar essa área e maximizá-la.

A Figura 4.5 mostra, em azul, uma demanda residual padrão: ela é uma função linear por partes não-crescente e convexa, que pode ser expressa como  $f(x) = \max_j \{-\alpha_j(x - \beta_j)\}$ .

Mais concretamente, vamos encontrar expressões para  $\alpha_j$  e  $\beta_j$ . Sem perda de generalidade, vamos supor  $b_1 \bar{G}_1 \leq b_2 \bar{G}_2 \leq \dots \leq b_{N-1} \bar{G}_{N-1}$ . Se  $b_{j-1} \bar{G}_{j-1} \leq \pi \leq b_j \bar{G}_j$ , a demanda residual do agente  $N$  é

$$x = d - \sum_{i \neq N} \min \left\{ \frac{\pi}{b_i}, \bar{G}_i \right\} = d - \pi \sum_{\substack{i \geq j \\ i \neq N}} \frac{1}{b_i} - \sum_{i < j} \bar{G}_i$$

ou, explicitando  $\pi$  em função de  $x$ ,

$$\pi = - \left( \sum_{\substack{i \geq j \\ i \neq N}} \frac{1}{b_i} \right)^{-1} \left[ x - \left( d - \sum_{i < j} \bar{G}_i \right) \right] \quad (4-4)$$

Comparando com a expressão de  $f_j(x)$ , vemos que

$$\alpha_j = \left( \sum_{\substack{i \geq j \\ i \neq N}} \frac{1}{b_i} \right)^{-1}, \quad \beta_j = \left( d - \sum_{i < j} \bar{G}_i \right).$$

Vale que  $\beta_j > \beta_{j+1}$ , que  $\alpha_j < \alpha_{j+1}$  (pela convexidade) e que  $\alpha_j \beta_j < \alpha_{j+1} \beta_{j+1}$ , como é exemplificado para  $\alpha_1 \beta_1 < \alpha_2 \beta_2$  na figura.

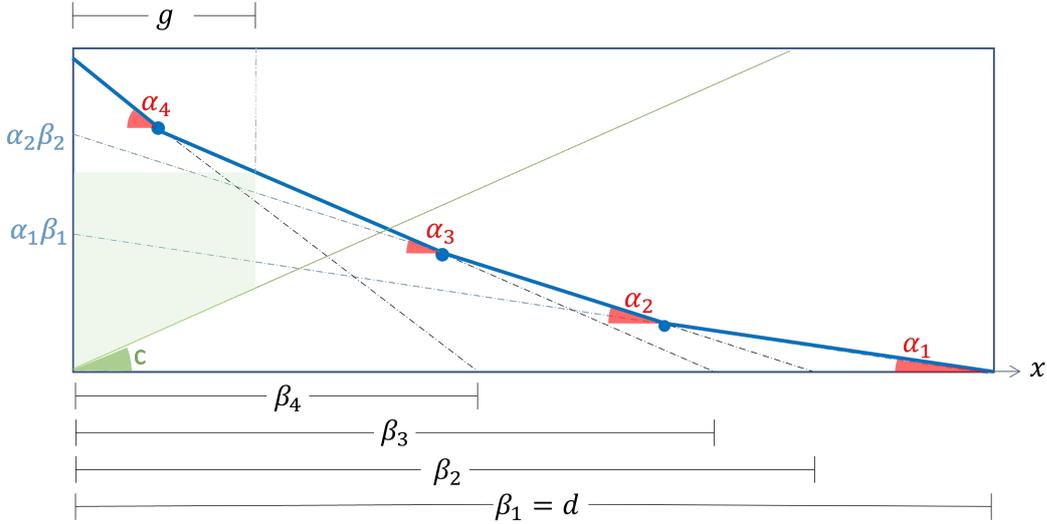


Figura 4.5: Parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  das funções de demanda residual.

A área que representa o lucro em função do ponto  $g$  é:

$$A(g) = f(g)g - \frac{c}{2}g^2 = \max_j \left\{ - \left( \alpha_j + \frac{c}{2} \right) g^2 + \alpha_j \beta_j g \right\}.$$

A expressão  $A_j(g) = - \left( \alpha_j + \frac{c}{2} \right) g^2 + \alpha_j \beta_j g$  é uma parábola côncava, com  $A_j(0) = 0$  e máximo em  $g_j^{max} = \frac{\alpha_j \beta_j}{2\alpha_j + c}$ , dado por  $A_j(g_j^{max}) = \frac{(\alpha_j \beta_j)^2}{2\alpha_j + c}$ . Sua derivada é

$$\frac{dA_j}{dg}(g) = -(2\alpha_j + c)g + \alpha_j \beta_j. \quad (4-5)$$

Portanto,  $A(g)$  é uma envoltória de parábolas. Quando  $g$  é pequeno,  $f_4(g) > f_j(g)$  para  $j \neq 4$  (estamos no primeiro segmento, da esquerda para a direita, do gráfico da função linear por partes mostrado na Figura 4.5) e a parábola é  $A_4(g) = - \left( \alpha_4 + \frac{c}{2} \right) g^2 + \alpha_4 \beta_4 g$ . Ao atingir a interseção do primeiro com o segundo segmento da função, a  $f_3(g)$  passa a dominar e a parábola é dada por  $A_3(g) = - \left( \alpha_3 + \frac{c}{2} \right) g^2 + \alpha_3 \beta_3 g$ .

Vamos considerar as derivadas laterais de  $A(g)$  nos pontos de inflexão da função linear por partes. Um ponto de inflexão  $\gamma_j$  ocorre quando  $f_j(\gamma_j) = f_{j+1}(\gamma_j)$ , sendo  $f_j(g) = -\alpha_j(g - \beta_j)$ . Resolvendo essa equação, encontramos

$$\gamma_j = \frac{\alpha_{j+1}\beta_{j+1} - \alpha_j\beta_j}{\alpha_{j+1} - \alpha_j} . \quad (4-6)$$

Então:

$$\frac{dA}{dg}(\gamma_j^-) = \frac{dA_{j+1}}{dg}(\gamma_j) = -(2\alpha_{j+1} + c)\gamma_j + \alpha_{j+1}\beta_{j+1}$$

$$\frac{dA}{dg}(\gamma_j^+) = \frac{dA_j}{dg}(\gamma_j) = -(2\alpha_j + c)\gamma_j + \alpha_j\beta_j$$

Subtraindo e usando (4-6),

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dg}(\gamma_j^+) - \frac{dA}{dg}(\gamma_j^-) &= \left( \frac{\alpha_{j+1}\beta_{j+1} - \alpha_j\beta_j}{\alpha_{j+1} - \alpha_j} \right) (2\alpha_{j+1} - 2\alpha_j) + \alpha_j\beta_j - \alpha_{j+1}\beta_{j+1} \\ &= \alpha_{j+1}\beta_{j+1} - \alpha_j\beta_j > 0 \end{aligned}$$

**Proposição 4.2**  $A(g)$  não possui máximos locais em pontos de inflexão. Um ponto de inflexão é um ponto de fronteira de algum subcone.

*Prova.* Se  $A(g)$  vem crescendo com  $g$  antes de chegar a um ponto de inflexão ( $\frac{dA}{dg}(\gamma_j^-) \geq 0$ ), então necessariamente ela seguirá crescendo quando a geração aumentar além desse ponto ( $\frac{dA}{dg}(\gamma_j^+) > 0$ ). Portanto, não é possível que um ponto de inflexão maximize a área do trapézio – se este fosse o caso,  $\frac{dA}{dg}(\gamma_j^-) \geq 0$  e  $\frac{dA}{dg}(\gamma_j^+) \leq 0$ , o que é um absurdo.

Em um ponto de inflexão, o preço é  $b_j\bar{G}_j$ , para algum  $j$ . Pelo Lema 4.5, um ponto de fronteira. ■

A Figura 4.6 mostra um exemplo para a derivada  $A'(g)$ . No primeiro salto da derivada, a função  $A(g)$  é crescente tanto à esquerda como à direita – não é um máximo, pois aumentos de  $g$  aumentam a área. No segundo salto, a função é decrescente à esquerda e crescente à direita – tanto aumentos como reduções de  $g$  neste ponto aumentam o lucro. No último salto, a função é decrescente dos dois lados – o agente poderia reduzir  $g$  e aumentar seus lucros. Saltos em que a função é crescente à esquerda e decrescente à direita – que corresponderiam a máximos locais – não são possíveis.

Máximos locais para o lucro do agente  $N$  só podem ocorrer, então, em pontos em que a derivada (4-5) é nula,

$$\alpha_j(\beta_j - g) = (\alpha_j + c_N)g .$$

A Figura 4.7 interpreta geometricamente os dois lados dessa equação. Fixada uma geração  $g$ , o lado esquerdo é a altura da função de demanda residual (o segmento vertical azul da figura). Dividir esta altura por  $g$  leva ao valor de  $b_N$  necessário para que o cruzamento da oferta com a demanda residual ocorra

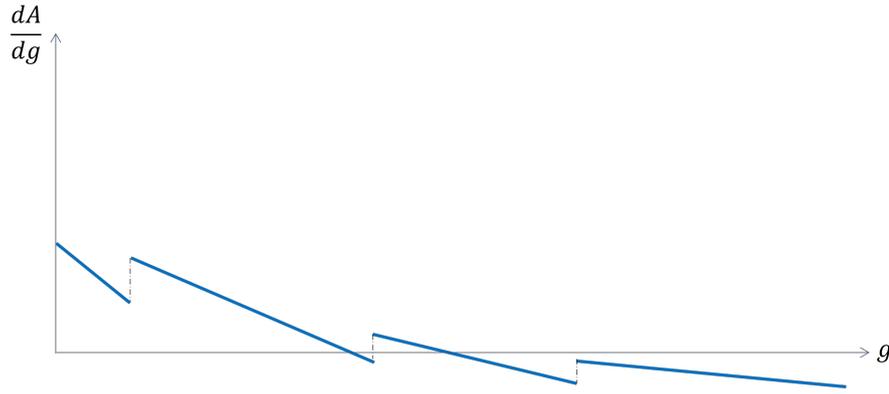


Figura 4.6: Derivada da área.

com uma geração  $g$  para o agente  $N$ . Ou seja,  $\alpha_j + c_N$  é justamente o lance ótimo do agente  $N$ , se ele estiver em  $J_{part}$ :  $b_N^{opt} = c_N + \alpha_j = c_N + \left( \sum_{\substack{i \geq j \\ i \neq N}} \frac{1}{b_i} \right)^{-1}$ , como já obtido na equação (4-1). Na figura, o lado direito da equação é o segmento vertical verde.

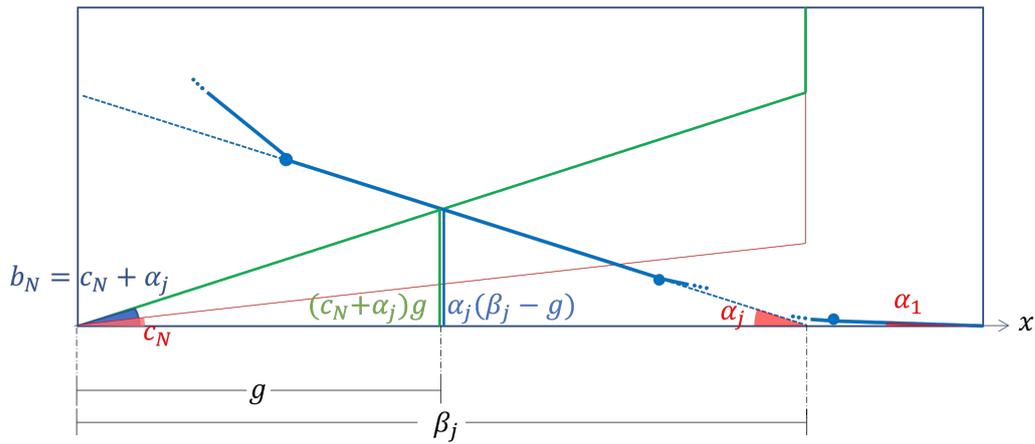


Figura 4.7: Estratégia ótima de um agente.

#### 4.5 Equilíbrios de Nash locais nas fronteiras de subcones

Pelo Lema 4.5, existem dois “tipos” de fronteira. Diremos que  $\mathbf{b} \in \mathcal{S}^b$  pertence a uma *fronteira interna* do espaço de estratégias se  $\exists j \leq N, b_j \bar{G}_j = \pi(\mathbf{b}) \wedge \nexists q \leq N, b_q \bar{G}_q = M$  e pertence a uma *fronteira externa* se  $\exists j \leq N, b_j \bar{G}_j = M$ . Em palavras, a fronteira externa consiste de pontos na fronteira de  $\mathcal{S}^b$ , enquanto as fronteiras internas são comuns a pelo menos dois subcones.

**Teorema 4.3** Não existem equilíbrios de Nash locais em fronteiras internas do espaço de estratégias  $S^b$ .

*Prova.* Seja  $\mathbf{b}$  um ponto em uma fronteira interna. Defina  $J_-$ ,  $J_0$  e  $J_+$  como o conjunto de agentes  $q \leq N$  tais que

$$b_q \bar{G}_q < \pi(\mathbf{b}), \quad b_q \bar{G}_q = \pi(\mathbf{b}), \quad b_q \bar{G}_q > \pi(\mathbf{b}).$$

Pela definição de fronteira interna,  $J_0 \neq \emptyset$ . Também é verdade que  $J_+ \neq \emptyset$  (caso contrário, todo agente geraria a plena capacidade,  $\sum_{j \leq N} g_j(\mathbf{b}) = \sum_{j \leq N} \bar{G}_j > d$ , o que é absurdo).

Tome  $p \in J_+$  e seja  $\mathbf{b}' = (b_1, \dots, b_{p-1}, b'_p, b_{p+1}, \dots, b_N)$ . Vamos analisar  $L_p(\mathbf{b}')$ , o lucro do agente  $p$  conforme este varia seu lance  $b'_p$ , mantendo as ofertas dos outros agentes fixas.

Seja  $m$  um agente em  $J_0$ . No ponto  $\mathbf{b}$ , o preço é  $\pi(\mathbf{b}) = b_m \bar{G}_m$ ; a geração de um agente  $j$  em  $J_0 \cup J_-$  é  $g_j(\mathbf{b}) = \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_j}, \bar{G}_j \right\} = \bar{G}_j$ ; e a geração de um agente  $j$  em  $J_+$  (incluindo  $p$ ) é  $g(\mathbf{b}) = \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_j}, \bar{G}_j \right\} = \frac{b_m \bar{G}_m}{b_p}$ .

Se aumentamos o lance do agente  $p$ , o preço aumenta. O agente  $p$  gerará menos e os agentes que ainda não saturaram aumentarão sua geração, já que a curva de oferta do agente  $p$  foi aumentada<sup>9</sup>. Por continuidade, como  $b_p < \frac{M}{\bar{G}_p}$ , existe  $b_p^+$  tal que, se  $b'_p \in [b_p, b_p^+)$ , o preço não aumenta tanto a ponto de saturar mais agentes e  $J_{full}(\mathbf{b}') = J_- \cup J_0$ .

Da mesma forma, existe  $b_p^-$  tal que, se  $b'_p \in (b_p^-, b_p)$ , nenhum outro agente, além dos que estão em  $J_0$ , deixa de estar saturado (e além disso  $p$  não passa a gerar a plena capacidade) e  $J_{full}(\mathbf{b}') = J_-$ .

A Figura 4.8 ilustra os dois casos, de aumento ou redução de  $b'_p$ . O cruzamento entre as curvas de oferta e de demanda residual, na situação  $b'_p = b_p$  ocorre em um ponto de inflexão desta última. Isso implica, como visto na última seção, que o agente  $p$  não está maximizando sua oferta em  $b_p$ .

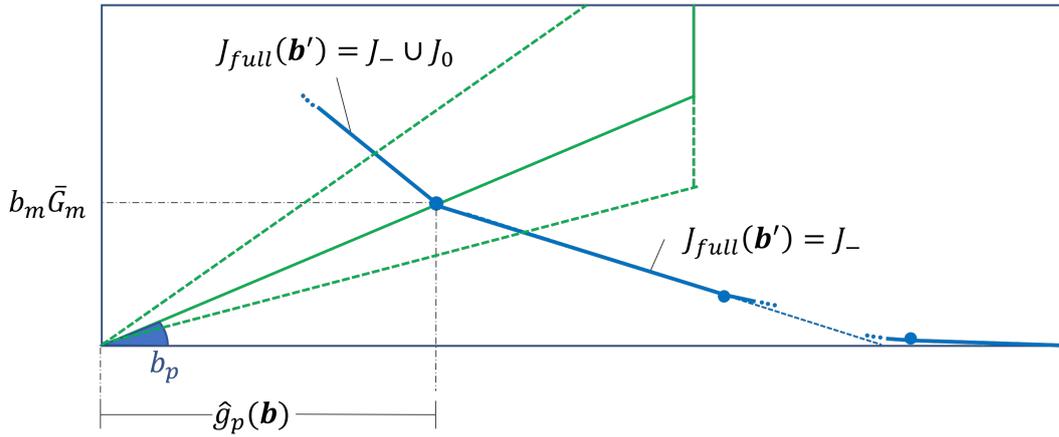
De fato, se  $b'_p \in [b_p, b_p^+)$ , o lucro do agente  $p$  em função de  $b'_p$  é dado pela expressão do Lema 4.1(c) para o lucro de um agente em  $J_{part}$ . No caso  $J_+ = \{p\}$ , o único agente que não gera a plena capacidade quando  $b'_p \in [b_p, b_p^+)$  é o próprio<sup>10</sup>  $p$  e o lucro é

$$L_p(\mathbf{b}') = \left( b'_p - \frac{c_p}{2} \right) \left[ d - \sum_{i \in J_0 \cup J_-} \bar{G}_i \right]^2.$$

Como essa expressão é crescente com  $b'_p$ , qualquer  $b'_p \in (b_p, b_p^+)$  aumenta o lucro do agente  $p$ , e, assim,  $\mathbf{b}$  não é Nash local.

<sup>9</sup>O argumento formal é extenso e não detalhamos nesse texto.

<sup>10</sup>A demanda residual do agente  $p$  é um segmento vertical para  $\pi > b_m \bar{G}_m$ .


 Figura 4.8: Alteração do lance de  $p \in J_{part}$  em pontos de fronteiras internas.

Quando  $J_+ \neq \{p\}$  é mais fácil expressar o lucro como função da geração  $g_p$  em vez do lance  $b_p$ . A troca de variáveis é possível: pelo Lema 4.1(b),

$$g'_p = g_p(\mathbf{b}') = \frac{\pi(\mathbf{b}')}{b'_p} = \frac{d - \sum_{j \in J_- \cup J_0} \bar{G}_j}{1 + b'_p \sum_{\substack{j \in J_+ \\ j \neq p}} \frac{1}{b_j}}.$$

Já que  $J_+ \neq \{p\}$ , a fórmula é uma bijeção entre  $g'_p$  e  $b'_p$  com inversa

$$b'_p(g'_p) = \left( \sum_{\substack{j \in J_+ \\ j \neq p}} \frac{1}{b_j} \right)^{-1} \left( \frac{d - \sum_{j \in J_- \cup J_0} \bar{G}_j}{g'_p} - 1 \right)$$

definindo assim o lucro em função da geração  $\tilde{L}_p^+(g'_p) = L_p(b_1, \dots, b'_p(g'_p), \dots, b_N)$ . Se  $J_+ \neq \{p\}$  (ou seja, há outros agentes em  $J_+$  além de  $p$ ), temos, pela equação (4-4):

$$\begin{aligned} \tilde{L}_p^+(g'_p) &= - \left( \sum_{\substack{j \in J_+ \\ j \neq p}} \frac{1}{b_j} \right)^{-1} \left[ g'_p - \left( d - \sum_{j \in J_- \cup J_0} \bar{G}_j \right) \right] g'_p - \frac{c_p}{2} (g'_p)^2 \\ &= - \left[ \left( \sum_{\substack{j \in J_+ \\ j \neq p}} \frac{1}{b_j} \right)^{-1} + \frac{c_p}{2} \right] (g'_p)^2 + \left( \sum_{\substack{j \in J_+ \\ j \neq p}} \frac{1}{b_j} \right)^{-1} \left( d - \sum_{j \in J_- \cup J_0} \bar{G}_j \right) g'_p \\ &= - \left[ \alpha^+ + \frac{c_p}{2} \right] (g'_p)^2 + \alpha^+ \beta^+ g'_p \end{aligned}$$

com a notação  $\alpha^+$  e  $\beta^+$  introduzida na Seção 4.4.

Aplicando o mesmo argumento<sup>11</sup>, se  $b'_p \in (b_p^-, b_p^+)$ , temos  $p \in J_{part}(\mathbf{b}')$  e

$$\begin{aligned} \tilde{L}_p^-(g'_p) &= - \left[ \left( \sum_{\substack{j \in J_+ \cup J_0 \\ j \neq p}} \frac{1}{b_j} \right)^{-1} + \frac{c_p}{2} \right] (g'_p)^2 + \left( \sum_{\substack{j \in J_+ \cup J_0 \\ j \neq p}} \frac{1}{b_j} \right)^{-1} \left( d - \sum_{j \in J_-} \bar{G}_j \right) g'_p \\ &= - \left[ \alpha^- + \frac{c_p}{2} \right] (g'_p)^2 + \alpha^- \beta^- g'_p \end{aligned}$$

Não surpreendentemente, as fórmulas de  $\tilde{L}_p^+(g'_p)$  e  $\tilde{L}_p^-(g'_p)$  são as mesmas obtidas para as áreas do trapézio. Suas derivadas são dadas pela equação (4-5). Seguindo os desenvolvimentos da Seção 4.4.2,  $\frac{d\tilde{L}_p^-}{dg}(g_p) - \frac{d\tilde{L}_p^+}{dg}(g_p) > 0$ . Ou seja, é possível o agente  $p$  melhorar o seu lucro aumentando ou reduzindo seu lance  $b_p$  (o que reduz ou aumenta sua geração  $g_p$ , respectivamente). Logo  $\mathbf{b}$  não é um equilíbrio de Nash local. ■

A existência de equilíbrios de Nash locais em fronteiras externas é um problema em aberto.

#### 4.6 Globalidade

Pelo Corolário 4.2.1(c) um equilíbrio de Nash local induz uma caixa de outros equilíbrios locais. O mesmo vale para equilíbrios globais.

**Teorema 4.4** *Seja  $J \neq \emptyset$ . Se  $\mathbf{b}$  é equilíbrio de Nash global no interior de  $\mathcal{C}_J$ , então um ponto  $\mathbf{b}'$  tal que*

$$\forall j \notin J, b'_j = b_j \quad e \quad \forall j \in J, b'_j \leq b_j$$

*também é Nash global no interior de  $\mathcal{C}_J$ .*

A demonstração é apresentada com um vocabulário algébrico, e admite uma reinterpretação geométrica que não apresentamos.

*Prova.* Por indução, basta supor que somente um agente tem o seu lance alterado: tomamos  $f \in J$  e  $\mathbf{b}' = (b_1, \dots, b_{f-1}, b'_f, b_{f+1}, \dots, b_N)$ , com  $b'_f \leq b_f$ .

Seja um agente  $q$  qualquer e defina um vetor de estratégias  $\mathbf{s}$  tal que  $s_q \in \mathcal{S}_q^b$  (um número entre 0 e  $M/\bar{G}_q$ ),  $s_f = b'_f$  e para todo  $j \notin \{f, q\}$ ,  $s_j = b_j$ . A exceção é o caso  $q = f$ , em que definimos  $s_f \in \mathcal{S}_q^b$  e  $j \neq f$ ,  $s_j = b_j$ . Como o agente  $q$  e a estratégia  $s_q$  são genéricos,  $\mathbf{b}'$  será Nash global se só se

$$L_q(\mathbf{b}') \geq L_q(\mathbf{s}).$$

<sup>11</sup>Agora  $J_+ \cup J_0 \neq \{p\}$ , pois  $J_0 \neq \emptyset$ . O caso  $J_- = \emptyset$  não tem maiores implicações para o argumento.

A demonstração se divide em quatro casos. Dois fatos serão úteis:

1.  $L_q(\mathbf{b}) = L_q(\mathbf{b}')$  (Lema 4.4).
2. Se  $\pi \geq \pi(\mathbf{b})$ ,

$$\min \left\{ \frac{\pi}{b_f}, \bar{G}_f \right\} = \min \left\{ \frac{\pi}{b'_f}, \bar{G}_f \right\} = \bar{G}_f .$$

já que, pelo Lema 4.1(a),  $b'_f \bar{G}_f \leq b_f \bar{G}_f \leq \pi(\mathbf{b}) \leq \pi$ .

**Caso 1:**  $s_q \geq b_q$  e  $q \neq f$

Pelo Teorema 2.1, para o vetor  $\mathbf{r}$  com  $r_q = s_q$  e  $r_j = b_j$ ,  $j \neq q$ ,

$$\min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{r})}{s_q}, \bar{G}_q \right\} = d - \sum_{j \notin \{q, f\}} \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{r})}{b_j}, \bar{G}_j \right\} - \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{r})}{b_f}, \bar{G}_f \right\} .$$

Como  $r_q = s_q \geq b_q$ ,  $\pi(\mathbf{r}) \geq \pi(\mathbf{b})$ . De fato, suponha que não:  $\pi(\mathbf{r}) < \pi(\mathbf{b})$ . Como  $\sum_{j \leq N} \bar{G}_j > d$ , temos  $J \neq \{1, 2, \dots, N\}$ . Assim, ou o agente  $q$  está em  $J_{part}(\mathbf{b})$  e  $\frac{\pi(\mathbf{r})}{s_q} < \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_q} < \bar{G}_q$  ou algum outro agente  $j \notin \{q, f\}$  está em  $J_{part}(\mathbf{b})$  e  $\frac{\pi(\mathbf{r})}{b_j} < \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_j} < \bar{G}_j$ . De todo modo, teríamos  $\min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{r})}{s_q}, \bar{G}_q \right\} + \sum_{j \neq q} \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{r})}{b_j}, \bar{G}_j \right\} < \sum_{j \leq N} \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{r})}{b_j}, \bar{G}_j \right\} = d$ , um absurdo.

Pelo Fato 2,

$$\min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{r})}{s_q}, \bar{G}_q \right\} = d - \sum_{j \notin \{q, f\}} \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{r})}{b_j}, \bar{G}_j \right\} - \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{r})}{b'_f}, \bar{G}_f \right\} ,$$

implicando  $\pi(\mathbf{s}) = \pi(\mathbf{r})$  (pela unicidade no Teorema 2.1). Logo,  $g_q(\mathbf{s}) = \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{s})}{s_q}, \bar{G}_q \right\} = g_q(\mathbf{r})$ . Como preço e geração são iguais, o lucro também é:  $L_q(\mathbf{s}) = L_q(\mathbf{r})$ . E  $L_q(\mathbf{b}) \geq L_q(\mathbf{r})$ , pois  $\mathbf{b}$  é Nash global. Pelo Fato 1,

$$L_q(\mathbf{b}') = L_q(\mathbf{b}) \geq L_q(\mathbf{r}) = L_q(\mathbf{s})$$

e conclui-se a demonstração para esse caso.

**Caso 2:**  $s_q < b_q$  e  $q \in J$ , com  $q \neq f$

Consideramos novamente o vetor de estratégias  $\mathbf{r}$ . Pelo Lema 4.4,  $\pi(\mathbf{r}) = \pi(\mathbf{b})$  e  $g_q(\mathbf{r}) = g_q(\mathbf{b})$ , e aí  $L_q(\mathbf{r}) = L_q(\mathbf{b})$ . Pelo Teorema 2.1,

$$\min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{r})}{s_q}, \bar{G}_q \right\} = d - \sum_{j \notin \{q, f\}} \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{r})}{b_j}, \bar{G}_j \right\} - \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{r})}{b_f}, \bar{G}_f \right\} ,$$

e, do Fato 2, o lado esquerdo dessa equação é igual a

$$d - \sum_{j \notin \{q, f\}} \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{r})}{b_j}, \bar{G}_j \right\} - \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{r})}{b'_f}, \bar{G}_f \right\}.$$

Segue, pela unicidade do valor do preço spot, provada no mesmo Teorema, que  $\pi(\mathbf{s}) = \pi(\mathbf{r})$  e  $g_q(\mathbf{s}) = \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{s})}{s_q}, \bar{G}_q \right\} = g_q(\mathbf{r})$ . Assim, usando o Fato 1,

$$L_q(\mathbf{b}') = L_q(\mathbf{b}) = L_q(\mathbf{r}) = L_q(\mathbf{s}).$$

**Caso 3:**  $s_q < b_q$  e  $q \notin J$

Suponha  $\pi(\mathbf{s}) \geq \pi(\mathbf{b})$ . Pelo Teorema 2.1,

$$\begin{aligned} \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_q}, \bar{G}_q \right\} &= d - \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_f}, \bar{G}_f \right\} - \sum_{j \notin \{f, q\}} \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_j}, \bar{G}_j \right\} \\ &\geq d - \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{s})}{b_f}, \bar{G}_f \right\} - \sum_{j \notin \{f, q\}} \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{s})}{b_j}, \bar{G}_j \right\} \\ &= d - \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{s})}{b'_f}, \bar{G}_f \right\} - \sum_{j \notin \{f, q\}} \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{s})}{b_j}, \bar{G}_j \right\} \end{aligned}$$

em que a última igualdade vem do Fato 2. Como  $\frac{\pi(\mathbf{s})}{s_q} > \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_q}$  e, pelo Lema 4.1(a),  $\bar{G}_q > \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_q}$ ,

$$\min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{s})}{s_q}, \bar{G}_q \right\} > \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_q} = \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_q}, \bar{G}_q \right\}$$

assim,  $\min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{s})}{s_q}, \bar{G}_q \right\} > d - \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{s})}{b'_f}, \bar{G}_f \right\} - \sum_{j \notin \{f, q\}} \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{s})}{b_j}, \bar{G}_j \right\}$ , uma contradição, pelo Teorema 2.1. Logo,  $\pi(\mathbf{s}) < \pi(\mathbf{b})$ .

Pelo Corolário 4.2.1,  $\text{card}(J) \leq N - 2$  e existe  $i \notin \{f, q\}$  fora de  $J$ :

$$\begin{aligned} g_q(\mathbf{b}) &= d - \bar{G}_f - \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_i} - \sum_{j \notin \{f, q, i\}} \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_j}, \bar{G}_j \right\} \text{ (Teorema 2.1 e Lema 4.1(a))} \\ &= d - \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{b})}{b'_f}, \bar{G}_f \right\} - \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_i} - \sum_{j \notin \{f, q, i\}} \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_j}, \bar{G}_j \right\} \text{ ( Fato 2)} \\ &< d - \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{s})}{b'_f}, \bar{G}_f \right\} - \frac{\pi(\mathbf{s})}{b_i} - \sum_{j \notin \{f, q, i\}} \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{s})}{b_j}, \bar{G}_j \right\} \text{ (pois } \pi(\mathbf{s}) < \pi(\mathbf{b})) \\ &= d - \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{s})}{b'_f}, \bar{G}_f \right\} - \sum_{j \notin \{f, q\}} \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{s})}{b_j}, \bar{G}_j \right\} \text{ (pois } \pi(\mathbf{s}) < \pi(\mathbf{b}) < b_i \bar{G}_i). \end{aligned}$$

Portanto, a demanda residual do agente  $q$  quando o vetor de estratégias é  $\mathbf{s}$ ,

$$DR = d - \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{s})}{b'_f}, \overline{G}_f \right\} - \sum_{j \notin \{f, q\}} \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{s})}{b_j}, \overline{G}_j \right\},$$

é um valor no intervalo  $(g_q(\mathbf{b}), \min\{\overline{G}_q, d\}]$ . Existe  $\pi^* \in [\pi(\mathbf{s}), \pi(\mathbf{b})]$  tal que

$$d - \min \left\{ \frac{\pi^*}{b_f}, \overline{G}_f \right\} - \sum_{j \notin \{f, q\}} \min \left\{ \frac{\pi^*}{b_j}, \overline{G}_j \right\} = DR. \quad (4-7)$$

De fato, o lado esquerdo é uma função contínua não-crescente de  $\pi^*$ , que assume os valores  $g_q(\mathbf{b}) < DR$ , se  $\pi^* = \pi(\mathbf{b})$ ; e  $d - \sum_{j \neq q} \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{s})}{b_j}, \overline{G}_j \right\} \geq d - \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{s})}{b'_f}, \overline{G}_f \right\} - \sum_{j \notin \{f, q\}} \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{s})}{b_j}, \overline{G}_j \right\} = DR$ , se  $\pi^* = \pi(\mathbf{s})$ .

Defina  $s_q^* > 0$  de modo a obter

$$\min \left\{ \frac{\pi^*}{s_q^*}, \overline{G}_q \right\} = DR \quad (4-8)$$

Isso é possível, pois o lado esquerdo é contínuo em  $s_q^*$  com imagem  $(0, \overline{G}_q]$  e o lado direito é menor ou igual a  $\overline{G}_q$ .

Suponhamos, por absurdo,  $s_q^* \geq b_q$ . Como  $\pi^* \leq \pi(\mathbf{b})$ , temos  $\min \left\{ \frac{\pi^*}{s_q^*}, \overline{G}_q \right\} \leq \min \left\{ \frac{\pi(\mathbf{b})}{b_q}, \overline{G}_q \right\} = g_q(\mathbf{b})$ , levando à contradição  $DR \leq g_q(\mathbf{b})$ . Então  $s_q^* < b_q < \frac{M}{G_q}$ .

Portanto, podemos definir um vetor de estratégias  $\mathbf{t} \in S^b$  tal que  $t_q = s_q^*$  e  $\forall j \neq q, t_j = b_j$ . Por globalidade,  $L_q(\mathbf{b}) \geq L_q(\mathbf{t})$ . Por (4-7) e (4-8),

$$\min \left\{ \frac{\pi^*}{s_q^*}, \overline{G}_q \right\} = DR = d - \min \left\{ \frac{\pi^*}{b_f}, \overline{G}_f \right\} - \sum_{j \notin \{f, q\}} \min \left\{ \frac{\pi^*}{b_j}, \overline{G}_j \right\},$$

de modo que  $\pi(\mathbf{t}) = \pi^* \geq \pi(\mathbf{s})$  e, logo,  $g_q(\mathbf{t}) = DR = g_q(\mathbf{s})$ . Assim  $L_q(\mathbf{t}) = \pi(\mathbf{t})g_q(\mathbf{t}) - \frac{c_q}{2}g_q(\mathbf{t})^2 \geq L_q(\mathbf{s})$ . Finalmente, pelo Fato 1,

$$L_q(\mathbf{b}') = L_q(\mathbf{b}) \geq L_q(\mathbf{t}) \geq L_q(\mathbf{s}).$$

#### Caso 4: $q = f$

Como  $\mathbf{b}$  é equilíbrio de Nash global,

$$\forall s_f \in S_f^b, \quad L_f(\mathbf{b}) \geq L_f(b_1, \dots, b_{f-1}, s_f, b_{f+1}, \dots, b_N).$$

Pelo Fato 1, podemos substituir  $L_f(\mathbf{b})$  por  $L_f(\mathbf{b}')$  na expressão acima e concluir que  $\mathbf{b}'$  maximiza o lucro do agente  $f$  globalmente. ■

Este resultado completa a demonstração do Teorema 4.1(c).

## 5

### Equilíbrios de Nash em $\mathcal{S}^{b,g}$

Neste capítulo, cada agente  $j$  possui uma capacidade total de geração finita  $\bar{G}_j > 0$ . Os agentes dão como lance um par  $(b_j, \bar{g}_j)$  no espaço

$$\mathcal{S}_j^{b,g} = \{(b_j, \bar{g}_j) \mid \bar{g}_j \in (0, \bar{G}_j], 0 < b_j \bar{g}_j \leq M\} .$$

O operador, então, resolve o problema de minimização de custos (2-1), considerando os valores declarados de  $b_j$  e  $\bar{g}_j$ .

O principal resultado neste capítulo é muito semelhante ao Teorema 5.1.

**Teorema 5.1** *Sejam  $\bar{G}_j$  e  $\mathcal{S}^{b,g} = \prod_{j \leq N} \mathcal{S}_j^{b,g}$  como acima e  $M \left( \sum_{j \leq N} \frac{1}{c_j} \right) > d$ .*

- Os equilíbrios de Nash locais no interior de  $\mathcal{S}^{b,g}$  em que  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_i \neq d$  formam um número finito de caixas  $E_i$ ,  $i \leq 2^N - \binom{N}{2} - N - 1$ . Em cada  $E_i$ , o despacho, preço e lucros resultantes são constantes.*
- Se  $\mathbf{s} \in E_i$  é um equilíbrio de Nash global, outro equilíbrio de Nash global é obtido realizando as seguintes operações: reduzir a oferta  $b_k$  de um agente  $k$  que esteja gerando com toda a capacidade declarada ou aumentar a oferta  $\bar{g}_p$  de um agente  $p$  que esteja sendo despachado só parcialmente, mantendo-se em  $\mathcal{S}^{b,g}$ .*

Ao longo do texto, indicamos as alterações necessárias nos argumentos do Capítulo 4 que levam à demonstração do Teorema 5.1.

#### 5.1

##### Dividindo $\mathcal{S}^{b,g}$ em regiões

Novamente, para cada  $\mathbf{s} = (\mathbf{b}, \bar{\mathbf{g}}) \in \mathcal{S}^{b,g}$ , existem funções  $\pi(\mathbf{s})$ ,  $\text{def}(\mathbf{s})$ ,  $g_j(\mathbf{s})$  e  $L_j(\mathbf{s}) = \pi(\mathbf{s})g_j(\mathbf{s}) - \frac{c_j}{2}g_j^2(\mathbf{s})$ : o preço, o déficit, a geração e o lucro de um agente  $j$  que resultam do problema do operador para os lances dados por  $\mathbf{s}$ . Agora, ao declarar capacidades pequenas, os agentes podem induzir déficit.

Os conjuntos complementares relevantes dependem das escolhas  $\bar{g}_j$ :

$$J_{full}(\mathbf{s}) = \{j \leq N \mid g_j(\mathbf{s}) = \bar{g}_j\} , \quad J_{part}(\mathbf{s}) = \{j \leq N \mid g_j(\mathbf{s}) < \bar{g}_j\} .$$

A contrapartida do Lema 4.1 consiste em substituir  $\bar{G}_j$  por  $\bar{g}_j$ . Aqui também é necessário levar em conta a possibilidade de déficit.

**Lema 5.1** *Seja  $\mathbf{s} = (\mathbf{b}, \bar{\mathbf{g}}) \in \mathcal{S}^{b,g}$  e  $d > 0$ .*

- a.  $j \in J_{part}(\mathbf{s}) \iff \pi(\mathbf{s}) < b_j \bar{g}_j$ ,  $j \in J_{full}(\mathbf{s}) \iff \pi(\mathbf{s}) \geq b_j \bar{g}_j$ .
- b. Se  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j > d$ ,  $\pi(\mathbf{s}) = \frac{d - \sum_{j \in J_{full}(\mathbf{s})} \bar{g}_j}{\sum_{j \in J_{part}(\mathbf{s})} \frac{1}{b_j}}$ . Se  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j \leq d$ ,  $\pi(\mathbf{s}) = M$ .
- c. Se  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j > d$ , o lucro é dado por

$$L_j(\mathbf{s}) = \left( b_j - \frac{c_j}{2} \right) \left[ \frac{d - \sum_{i \in J_{full}(\mathbf{s})} \bar{g}_i}{1 + b_j \sum_{i \in J_{part}(\mathbf{s})} \frac{1}{b_i}} \right]^2, \text{ se } j \in J_{part}(\mathbf{s})$$

$$L_j(\mathbf{s}) = \left[ \frac{d - \sum_{i \in J_{full}(\mathbf{s})} \bar{g}_i}{\sum_{i \in J_{part}(\mathbf{s})} \frac{1}{b_i}} \right] \bar{g}_j - \left[ \frac{c_j}{2} + \left( \sum_{i \in J_{part}(\mathbf{s})} \frac{1}{b_i} \right)^{-1} \right] \bar{g}_j^2, \text{ se } j \in J_{full}(\mathbf{s})$$

- d. Se  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j \leq d$ , o lucro é dado por

$$\forall j \leq N, L_j(\mathbf{s}) = M \bar{g}_j - \frac{c_j}{2} \bar{g}_j^2$$

*Prova.* No caso  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j > d$ , a demonstração é idêntica à do Lema 4.1. No caso  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j \leq d$ , pelo Teorema 2.2,  $\pi(\mathbf{s}) = M$  (com a convenção  $\pi(\mathbf{s}) = M$  quando  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j = d$ ), e então segue (b), e que  $J_{full}(\mathbf{s}) = \{1, 2, \dots, N\}$ . Como,  $\forall j \leq N$ ,  $b_j \bar{g}_j \leq M = \pi(\mathbf{s})$ , segue (a). Por fim, basta substituir  $\pi(\mathbf{s})$  por  $M$  e  $g_j(\mathbf{s})$  por  $\bar{g}_j$  na expressão do lucro para obter (d). ■

Em vez de subcones, agora dividimos  $\mathcal{S}^{b,g}$  nas *regiões* associadas a  $J$ :

$$\mathcal{R}_J = \{ \mathbf{s} \in \mathcal{S}^{b,g} \mid J_{full}(\mathbf{s}) = J \} .$$

Aqui,  $J$  pode ser qualquer subconjunto de agentes, inclusive  $\{1, 2, \dots, N\}$ , uma região que não existia quando os agentes declaravam somente seus custos (Capítulo 4). Como será mostrado no Lema 5.2, essa é a região em que  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j \leq d$ . Exceto pelo conjunto  $(2N - 1)$ -dimensional  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j = d$ , qualquer ponto dessa região terá déficit não nulo. Fora dessa região, vale o Teorema 2.1 e não há déficit.

Ainda existe a homogeneidade<sup>1</sup> de grau 0 no vetor  $\mathbf{b}$ , ou seja, se  $\mathbf{b} \in \mathcal{R}_J$ ,  $\theta > 0$  e  $(\theta \mathbf{b}) \in \mathcal{S}^{b,g}$ , então  $(\theta \mathbf{b}) \in \mathcal{R}_J$ . No entanto, não há homogeneidade nas capacidades  $\bar{\mathbf{g}}$ .

Agora adaptamos o Lema 4.3 para tratar o caso  $J = \{1, 2, \dots, N\}$ .

<sup>1</sup>A demonstração é a mesma que no Lema 4.2 no caso  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j > d > 0$ . Se  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j \leq d$ ,  $J_{full}(\theta \mathbf{b}) = J_{full}(\mathbf{b}) = \{1, 2, \dots, N\}$ .

**Lema 5.2** *Seja  $\mathbf{s} = (\mathbf{b}, \bar{\mathbf{g}}) \in \mathcal{S}^{b,g}$ .*

a.  $\mathbf{s}$  pertence a  $\mathcal{R}_{1,2,\dots,N}$  se só se  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j \leq d$ .

b.  $\mathbf{s}$  pertence a  $\mathcal{R}_J$ , com  $J \neq \{1, 2, \dots, N\}$  se só se

$$\forall j \in J, b_j \leq \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{g}_i}{\bar{g}_j \sum_{i \notin J} \frac{1}{b_i}} \quad e \quad \forall j \notin J, \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{g}_i}{1 + b_j \sum_{\substack{i \notin J \\ i \neq j}} \frac{1}{b_i}} < \bar{g}_j .$$

*Prova.*

(a) Pelo Teorema 2.2,  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j \leq d$  implica  $J_{full}(\mathbf{s}) = \{1, 2, \dots, N\}$ . Já  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j > d$  implica  $J_{full}(\mathbf{s}) \neq \{1, 2, \dots, N\}$ , pois caso todos gerassem a plena capacidade  $\sum_{j \leq N} g_j(\mathbf{s}) = \sum_{j \leq N} \bar{g}_j > d$ , o que é absurdo.

(b) ( $\Leftarrow$ ) Somando as capacidades dos agentes que não estão em  $J$ ,

$$\sum_{j \notin J} \bar{g}_j > \left( d - \sum_{i \in J} \bar{g}_i \right) \sum_{j \notin J} \frac{1}{b_j \sum_{i \notin J} \frac{1}{b_i}} = \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{g}_i}{\sum_{i \notin J} \frac{1}{b_i}} \sum_{j \notin J} \frac{1}{b_j} = d - \sum_{i \in J} \bar{g}_i .$$

Assim  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j > d$  e podemos aplicar a demonstração do Lema 4.3.

( $\Rightarrow$ ) Se  $\mathbf{b} \in \mathcal{R}_J$ , com  $J \neq \{1, 2, \dots, N\}$ , vale  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j > d$  pela primeira parte do lema, e aplica-se a mesma demonstração do Lema 4.3. ■

A seguir, a contrapartida do Lema 4.4. Agora, há duas variações a considerar para o vetor  $\mathbf{s}$ : ou um agente diminui seu custo declarado ou aumenta sua capacidade declarada.

**Lema 5.3** *Seja  $\mathbf{s} = (\mathbf{b}, \bar{\mathbf{g}}) \in \mathcal{R}_J$ . Suponha uma das duas hipóteses a seguir.*

a.  $q \in J$  e  $\mathbf{s}' = (\mathbf{b}', \bar{\mathbf{g}}')$  satisfaz  $0 < b'_q < b_q$ ,  $\bar{g}'_q = \bar{g}_q$  e, para todo  $j \neq q$ ,  $b'_j = b_j$ ,  $\bar{g}'_j = \bar{g}_j$ .

b.  $p \notin J$  e  $\mathbf{s}' = (\mathbf{b}', \bar{\mathbf{g}}')$  satisfaz  $\bar{g}_p < \bar{g}'_p \leq \min \left\{ \bar{G}_p, \frac{M}{b_p} \right\}$ ,  $b'_p = b_p$  e para todo  $j \neq p$ ,  $b'_j = b_j$ ,  $\bar{g}'_j = \bar{g}_j$ .

Então  $\mathbf{s}' \in \mathcal{R}_J$  e

$$\pi(\mathbf{s}') = \pi(\mathbf{s}) , \quad \forall i \leq N, \quad g_i(\mathbf{s}') = g_i(\mathbf{s}) .$$

*Prova.* Consequência direta do Lema 5.2 e Lema 5.1(b). ■

Por fim, o próximo lema caracteriza as fronteiras das regiões, correspondendo ao Lema 4.5.

**Lema 5.4** *Seja  $\mathbf{s} = (\mathbf{b}, \bar{\mathbf{g}}) \in \mathcal{S}^{b,g}$ . Então*

$$\exists J, \mathbf{s} \in \partial \mathcal{R}_J \iff \sum_{i=1}^N \bar{g}_i = d \vee (\exists j \leq N, b_j \bar{g}_j = \pi(\mathbf{s}) \vee b_j \bar{g}_j = M \vee \bar{g}_j = \bar{G}_j)$$

em que  $\partial \mathcal{R}_J$  representa a fronteira de  $\mathcal{R}_J$ .

*Prova.*

( $\Leftarrow$ ) Se  $b_j \bar{g}_j = M$  ou  $\bar{g}_j = \bar{G}_j$ , para algum  $j$ , então  $\mathbf{s} \in \partial \mathcal{S}^{b,g}$ . Se  $\sum_{i=1}^N \bar{g}_i = d$ ,  $\mathbf{s} \in \partial \mathcal{R}_{\{1,2,\dots,N\}}$ , pelo Lema 5.2(a).

Se  $b_j \bar{g}_j = \pi(\mathbf{s})$  e  $b_j \bar{g}_j < M$  devemos ter  $\pi(\mathbf{s}) < M$  e assim  $\sum_{i \leq N} \bar{g}_i > d$ , pelo Lema 5.1(b). Podemos então aplicar a mesma demonstração do Lema 4.5.

( $\Rightarrow$ ) Seja  $\mathbf{s} \in \mathcal{S}^{b,g}$  satisfazendo, para todo  $j$ ,

$$b_j \bar{g}_j \neq \pi(\mathbf{s}), \quad b_j \bar{g}_j < M, \quad \bar{g}_j < \bar{G}_j \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^N \bar{g}_i \neq d.$$

Defina  $J = J_{full}(\mathbf{s})$ . Provemos que  $\mathbf{s}$  está no interior da região  $\mathcal{R}_J$  – e logo não pode estar na fronteira de nenhuma região.

Se  $\sum_{i=1}^N \bar{g}_i < d$ , isso segue diretamente do Lema 5.2(a).

Se  $\sum_{i=1}^N \bar{g}_i > d$ , pelo Lema 5.1(b), o preço é  $\pi(\mathbf{s}) = \frac{d - \sum_{j \in J} \bar{g}_j}{\sum_{j \notin J} \frac{1}{b_j}}$ . Pelo Lema 5.1(a),  $\forall j \in J, b_j \bar{g}_j < \pi(\mathbf{s})$  e assim as condições do Lema 5.2 valem com desigualdade estrita. Por continuidade, pequenas alterações das declarações de custo e capacidade  $b_j$  e  $\bar{g}_j$  preservam estas desigualdades. Assim, existe uma vizinhança do ponto  $\mathbf{s}$  que está em  $\mathcal{R}_J$ :  $\mathbf{S}$  está no interior da região. ■

## 5.2

### Equilíbrios de Nash locais

Assim como no capítulo anterior, os equilíbrios de Nash locais podem estar no interior das regiões  $\mathcal{R}_J$  ou em suas fronteiras. No interior de cada região, a diferenciabilidade da função lucro permite encontrar equilíbrios locais igualando as derivadas parciais dos lucros no Lema 5.1(c) a zero. Isso leva ao Teorema seguinte, análogo ao Teorema 4.2.

**Teorema 5.2** *Seja  $J$  com  $\text{card}(J) < N - 2$ . Um ponto  $\mathbf{s} = (\mathbf{b}, \bar{\mathbf{g}}) \in \mathbb{R}^{2N}$  é um equilíbrio de Nash local no interior da região  $\mathcal{R}_J$  se só se*

$$\forall j \notin J, \quad b_j = c_j + \left( \sum_{i \notin J \cup \{j\}} \frac{1}{b_i} \right)^{-1} \quad (5-1)$$

$$\forall j \in J, \quad \bar{g}_j = \frac{d - \sum_{i \in J - \{j\}} \bar{g}_i}{2 + c_j \sum_{i \notin J} \frac{1}{b_i}} \quad (5-2)$$

$$\forall j \notin J, \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{g}_i}{1 + b_j \sum_{i \notin J \cup \{j\}} \frac{1}{b_i}} < \bar{g}_j, \quad \forall j \in J, b_j < \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{g}_i}{\bar{g}_j \sum_{i \notin J} \frac{1}{b_i}} \quad (5-3)$$

$$\forall j \leq N, \quad b_j \bar{g}_j < M \text{ e } \bar{g}_j < \bar{G}_j \quad (5-4)$$

Se  $\text{card}(J)$  é  $N - 1$  ou  $N - 2$ , não há equilíbrio de Nash local interior a  $\mathcal{R}_J$ .

Se  $\text{card}(J) = N$  e  $M > d \left( \sum_{j \leq N} \frac{1}{c_j} \right)^{-1}$ , não existem equilíbrios de Nash locais no interior de  $\mathcal{R}_J$ .

O sistema formado pelas equações (5-1) e (5-2) ainda possui solução única, uma vez fixado  $J$  com  $\text{card}(J) < N - 2$ . De fato, uma vez que se encontrem os valores de  $b_j$  resolvendo (5-1), as equações (5-2) formam um sistema linear determinado nas variáveis  $\bar{g}_j$ . Um cálculo, de fácil verificação, dá a seguinte solução, para  $S = \sum_{i \notin J} \left( \frac{1}{b_i} \right)$ ,

$$\forall j \in J, \quad \bar{g}_j = \frac{d}{2 + c_j S + (1 + c_j S) \sum_{i \in J - \{j\}} \frac{1}{1 + c_i S}}.$$

Mesmo existindo solução desse sistema, pode não haver equilíbrios de Nash locais no interior de  $\mathcal{R}_J$ , se as condições (5-3) e (5-4) não puderem ser satisfeitas. Quanto maiores os valores de  $M$  e  $\bar{G}_j$  e quanto menor  $d$ , mais fácil será satisfazer essas desigualdades (ver demonstração do Corolário 5.2.1).

*Prova.* Omitimos os detalhes, já que a demonstração é idêntica à do Teorema 4.2: primeiro, demonstra-se que as condições (5-3) e (5-4) equivalem a  $\mathbf{s}$  estar no interior de  $\mathcal{R}_J$  para, em seguida, igualar as derivadas parciais da função lucro a zero e chegar às condições (5-1) e (5-2).

A única diferença em relação ao Teorema 4.2 é que o lucro dos agentes em  $J$  varia com  $\bar{g}_j$  (quando não havia declaração das capacidades ao operador, o lucro para estes agentes era constante em toda a região). Assim é necessário derivar o lucro de todos os agentes (não só dos que não estão em  $J$ ), o que gera a condição adicional (5-2).

O caso  $\text{card}(J) = N - 1$  pode ser demonstrado tal como no Teorema 4.2 e o caso  $\text{card}(J) = N - 2$  vem do fato de o sistema (5-1) não ter solução quando há somente duas equações, tal como demonstrado no Lema 3.1.

No caso  $\text{card}(J) = N$ , suponha, por contradição, que um ponto  $\mathbf{s}$  no interior de  $\mathcal{R}_J$  é equilíbrio de Nash. Pelo Lema 5.1(d),

$$\forall j \leq N, \quad L_j(\mathbf{s}) = M \bar{g}_j - \frac{c_j}{2} \bar{g}_j^2.$$

Conclui-se que, para todo agente,  $\bar{g}_j = \frac{M}{c_j}$ , o máximo da função quadrática acima. Caso contrário, como estamos no interior de  $\mathcal{R}_j$ , algum agente poderia aumentar ou diminuir  $\bar{g}_j$  e aumentar seu lucro, e esse ponto não seria Nash.

Consequentemente, a geração total do sistema seria  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j = \sum_{j \leq N} \frac{M}{c_j} > d$ , por hipótese. Mas isso é absurdo. ■

**Corolário 5.2.1** *Seja  $\text{card}(J) < N - 2$ . Então os equilíbrios de Nash locais em  $\mathcal{R}_J$ , se existirem, formam uma caixa de dimensão  $N$ .*

*Prova.* Pelo Lema 3.1, o sistema composto por (5-1) e (5-2) possui uma única solução  $b_j^*$ , para  $j \notin J$ , e  $\bar{g}_j^*$ , para  $j \in J$ .

Se, para todo  $j$  em  $J$ ,  $\bar{g}_j^* < \bar{G}_j$  e, para todo  $k$  não pertencente a  $J$ ,  $\frac{d - \sum_{i \in J} \bar{g}_i^*}{1 + b_k^* \sum_{i \notin J \cup \{j\}} \frac{1}{b_i^*}} < \min \left\{ \frac{M}{b_k^*}, \bar{G}_k \right\}$ , então é possível encontrar valores para  $b_j$  e  $\bar{g}_k$  que satisfazem (5-3) e (5-4). Estes são os pontos da caixa  $E$  dada por um produto cartesiano de caixas em  $\mathbf{b}$  e  $\bar{\mathbf{g}}$ :

$$\mathbf{b} \in \prod_{j \in J} \left( 0, \min \left\{ \frac{M}{\bar{g}_j^*}, \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{g}_i^*}{\bar{g}_j^* \sum_{i \notin J} \frac{1}{b_i^*}} \right\} \right) \times \prod_{j \notin J} b_j^*$$

$$\bar{\mathbf{g}} \in \prod_{j \in J} \bar{g}_j^* \times \prod_{j \notin J} \left( \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{g}_i^*}{1 + b_j^* \sum_{i \notin J \cup \{j\}} \frac{1}{b_i^*}}, \min \left\{ \frac{M}{b_j^*}, \bar{G}_j \right\} \right),$$

provando o resultado. ■

Falta analisar os equilíbrios de Nash em fronteiras. Assim como no Capítulo 4, dividimos as fronteiras em dois tipos, conforme o Lema 5.4. *Fronteiras externas* do espaço de estratégias  $\mathcal{S}^{b,g}$  são pontos em que  $\exists j \leq N, b_j \bar{g}_j = M$  ou  $\bar{g}_j = \bar{G}_j$ . *Fronteiras internas* são os pontos fora das fronteiras externas tais que  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j = d$ , ou, para algum  $j$ ,  $b_j \bar{g}_j = \pi(\mathbf{b})$ . Ou seja, são pontos entre regiões. O Teorema seguinte é análogo ao Teorema 4.3. Novamente, o caso de fronteiras externas está em aberto.

**Teorema 5.3** *Não existem equilíbrios de Nash locais em fronteiras internas, exceto possivelmente por pontos em que  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j = d$ .*

*Prova.* Seja  $\mathbf{s}$  um ponto em uma fronteira interna, com  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j \neq d$ . Então  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j > d$ , pois, caso contrário o ponto estaria no interior de  $\mathcal{R}_{\{1, \dots, N\}}$ . Sejam  $J_-, J_0$  e  $J_+$  os conjuntos de agentes  $q \leq N$  tais que

$$b_q \bar{g}_q < \pi(\mathbf{b}), \quad b_q \bar{g}_q = \pi(\mathbf{b}), \quad b_q \bar{g}_q > \pi(\mathbf{b}).$$

Pela definição de fronteira interna,  $J_0 \neq \emptyset$ . Pelo Lema 5.1(a), também vale que  $J_+ \neq \emptyset$  (caso contrário, todo agente geraria a plena capacidade,

$\sum_{j \leq N} g_j(\mathbf{b}) = \sum_{j \leq N} \bar{g}_j > d$ , o que é absurdo). Consequentemente, podemos aplicar o mesmo argumento do Teorema 4.3, isto é, para um agente  $p \notin J$ , existe um intervalo de valores  $[b_p, b_p^+)$  em que  $J_{full}$  é  $J_- \cup J_0$  e um intervalo de valores  $(b_p^-, b_p)$  em que  $J_{full}$  é  $J_-$ , tal como ilustrado na Figura 4.8. Na transição de um intervalo para o outro, a derivada apresenta um salto positivo, como descrito na Proposição 4.2, de modo que não podem haver máximos locais do lucro do agente  $p$  em  $b_p$ . ■

Com o Teorema 5.2, o Corolário 5.2.1 e Teorema 5.3, fica demonstrada a parte (a) do Teorema 5.1.

### 5.3 Globalidade

A seguir, apresentamos resultado análogo ao Teorema 4.4, e que conclui a demonstração do Teorema 5.1.

**Teorema 5.4** *Se  $\mathbf{s} = (\mathbf{b}, \bar{\mathbf{g}}) \in \mathcal{S}^{b,g}$  é equilíbrio de Nash global no interior de uma região  $\mathcal{R}_J$ , então um ponto  $\mathbf{s}' = (\mathbf{b}', \bar{\mathbf{g}}') \in \mathcal{S}^{b,g}$  tal que*

$$\forall j \notin J, b'_j = b_j \text{ e } \bar{g}'_j \geq \bar{g}_j, \quad \forall j \in J, b'_j \leq b_j \text{ e } \bar{g}'_j = \bar{g}_j$$

*também é Nash global em  $\mathcal{R}_J$ .*

O ponto  $\mathbf{s}'$  do teorema pode estar na fronteira de  $\mathcal{S}^{b,g}$ , se existir  $j$  tal que  $\bar{g}'_j = \min\{\bar{g}'_j, \frac{M}{b'_j}\}$ .

*Prova.* Novamente, basta supor que somente um agente tem o seu lance alterado. No caso de redução do valor  $b_j$  de um agente  $j \in J$ , a demonstração é idêntica à do Teorema 4.4. No outro caso, considere  $p \notin J$ ,  $\mathbf{s}' = (\mathbf{b}, \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{p-1}, \bar{g}'_p, \bar{g}_{p+1}, \dots, \bar{g}_N)$  e  $\bar{g}'_p \geq \bar{g}_p$ .

Para o agente  $p$ , como  $\mathbf{s}$  é equilíbrio de Nash global, para  $(u_p^b, u_p^g) \in \mathcal{S}_p^{b,g}$

$$L_p(\mathbf{s}) \geq L_p(b_1, \dots, b_{p-1}, u_p^b, b_{p+1}, \dots, b_N, \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{p-1}, u_p^g, \bar{g}_{p+1}, \dots, \bar{g}_N).$$

Pelo Lema 5.3, podemos substituir  $L_p(\mathbf{s})$  por  $L_p(\mathbf{s}')$  na expressão acima e concluir que  $\mathbf{s}'$  maximiza o lucro do agente  $p$  globalmente.

No caso de outro agente  $q \neq p$ , vamos apresentar uma demonstração geométrica. Primeiro, suponha que o agente  $q$  altere suas estratégias para  $(r_q^b, r_q^g)$ , de modo que o cruzamento entre a curva de oferta e demanda residual se desloque para a direita. A Figura 5.1 ilustra esse caso. As curvas pontilhadas são a nova demanda residual (em azul), devido ao aumento da declaração de

capacidade do agente  $p$ , e a nova oferta do agente  $q$  (em verde). As curvas não pontilhadas são as ofertas e demandas residuais originais.

É fácil ver que a curva de demanda residual é alterada somente em pontos à esquerda do cruzamento entre a oferta (original) e a demanda residual (original) – demonstração semelhante à do Fato 2 da prova do Teorema 4.4. Portanto, como pode ser visto da figura, o novo cruzamento entre oferta e demanda residual se dá a um preço  $\pi'$  e geração  $g'_q$  que já eram atingíveis pelo agente  $q$  antes das mudanças de estratégias. Logo,  $(r_q^b, r_q^g)$  é uma estratégia inferior ou igual a  $(b_q, \bar{g}_q)$  para o agente  $q$ .

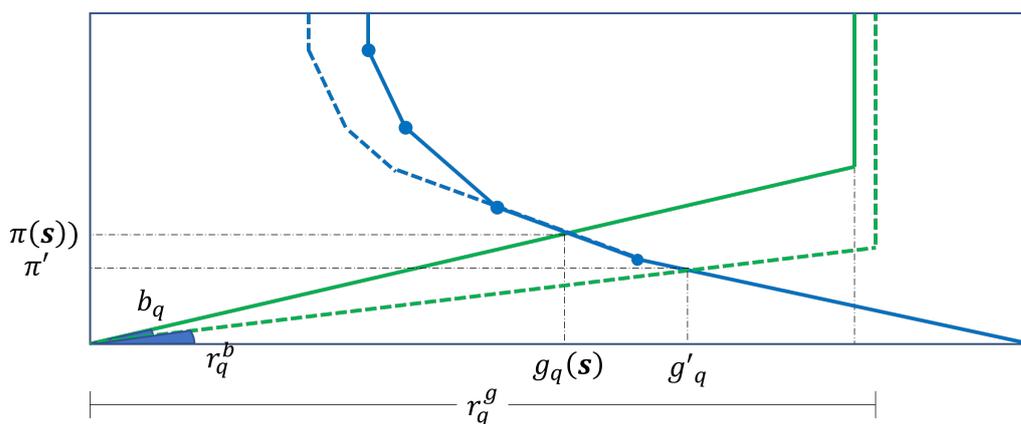


Figura 5.1: Alteração da oferta do agente  $q$  no sentido de reduzir o preço.

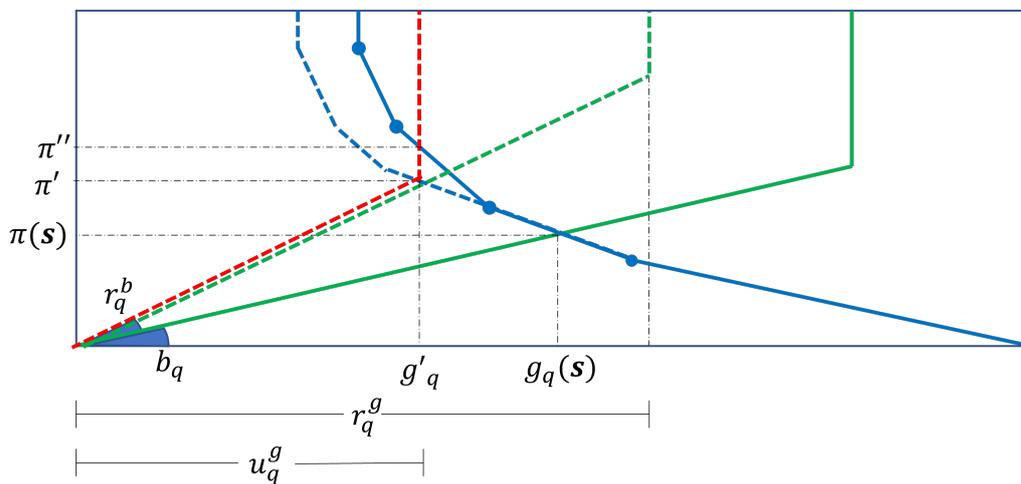


Figura 5.2: Alteração da oferta do agente  $q$  no sentido de aumentar o preço.

O caso em que o agente altera suas estratégias para  $(r_q^b, r_q^g)$ , fazendo o cruzamento entre a oferta e demanda residual se deslocar para a esquerda é ilustrado na Figura 5.2. As curvas verde e azul possuem o mesmo significado. Desta vez, o agente  $q$  pode reduzir a capacidade ofertada, alterando sua

oferta para a curva vermelha, e chegar a um preço  $\pi''$  maior, com a mesma geração. Logo, seu lucro aumentaria. Mas novamente, o preço  $\pi''$  era atingível originalmente com a mesma geração. Assim, a estratégia ótima do agente  $q$  é manter-se na estratégia  $(b_q, \bar{g}_q)$ .

Portanto, quando o agente  $p \notin J$  aumenta sua oferta de capacidade, qualquer outro agente  $q$  não pode aumentar seu lucro desviando-se da estratégia  $(b_q, \bar{g}_q)$ . Assim,  $\mathbf{s}'$  é equilíbrio de Nash global. ■

## 6 Simulação Computacional

Os resultados apresentados nesta dissertação permitem encontrar equilíbrios de Nash locais e globais computacionalmente. Este capítulo apresenta algoritmos com esse intuito, para os casos apresentados nos capítulos 4 (agentes declaram somente  $\mathbf{b} \in \mathcal{S}^b$  e as capacidades são limitadas) e 5 (agentes declaram  $(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{g}}) \in \mathcal{S}^{b,g}$ ). O caso do capítulo 3 (agentes declaram somente  $\mathbf{b} \in \mathcal{S}^b$  e as capacidades são ilimitadas) será apresentado como um subcaso do primeiro, na Seção 6.1.1.

Como sempre, consideramos como dados o número de agentes no sistema  $N$ ; seus custos e capacidades reais, respectivamente  $(c_1, c_2, \dots, c_N)$  e  $(\bar{G}_1, \bar{G}_2, \dots, \bar{G}_N)$ ; o custo de déficit  $M$  e a demanda  $d$ .

A implementação foi feita em MATLAB, em computador com processador Intel(R) Core(TM) i7-8565U CPU 1.80GHz e 16 GB de RAM.

### 6.1 Caso $\mathcal{S}^b$ com capacidades limitadas

#### 6.1.1 Algoritmo

O seguinte algoritmo encontra todos os equilíbrios de Nash locais no interior de  $\mathcal{C}_J$ , se existirem. Também verifica a existência de equilíbrios de Nash globais em  $\mathcal{C}_J$  e, caso positivo, retorna um deles.

---

**Algoritmo 1** Encontrar equilíbrios de Nash em  $\mathcal{C}_J$

---

- 1: Fixe  $J$  com  $\text{card}(J) < N - 2$  e  $\epsilon$  pequeno.
- 2: Encontrar  $s > 0$  que resolve

$$s = \sum_{j \notin J} \left( \frac{c_j}{2} + \frac{1}{s} + \sqrt{\frac{c_j^2}{4} + \frac{1}{s^2}} \right)^{-1}.$$

- 3: Para todo  $j \notin J$ , calcular

$$b_j^* = \frac{c_j}{2} + \frac{1}{s} + \sqrt{\frac{c_j^2}{4} + \left(\frac{1}{s}\right)^2}.$$

4: Verificar se

$$d - \sum_{i \in J} \bar{G}_i > 0 \quad e \quad \forall j \notin J, \quad \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{G}_i}{s} < b_j^* \bar{G}_j < M .$$

Caso negativo, pare: não existe equilíbrio de Nash local em  $\mathcal{C}_J$ .

5: Para todo  $j \in J$ , calcular

$$\tilde{b}_j = \min \left\{ \frac{M}{\bar{G}_j}, \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{G}_i}{\bar{G}_j s} \right\} .$$

6: Os equilíbrios de Nash locais são a caixa

$$\prod_{j \in J} (0, \tilde{b}_j) \times \prod_{j \notin J} b_j^* .$$

7: Verificar se  $\mathbf{b} = \prod_{j \in J} \tilde{b}_j \times \prod_{j \notin J} b_j^*$  é equilíbrio de Nash global.

Descrevemos em mais detalhe a implementação dos passos acima. Os passos 2 a 6 do algoritmo se baseiam no Teorema 4.2 e Corolário 4.2.1. Os passos 2 e 3 do algoritmo calculam a solução do sistema (4-1) – dada pelo Teorema 3.2. O passo 4 verifica se as condições (4-2) e (4-3) podem ser satisfeitas. Caso positivo, os passos 5 e 6 retornam todos os pontos no interior de  $\mathcal{C}_J$  que satisfazem essas condições e são, portanto, equilíbrios de Nash locais. Esses pontos, como vimos, formam uma caixa.

O passo 7 se baseia no Teorema 4.4. Por esse teorema, se há equilíbrios de Nash globais no interior de  $\mathcal{C}_J$ , então, para  $\delta$  suficientemente pequeno,  $\prod_{j \in J} \delta \times \prod_{j \notin J} b_j^*$  é equilíbrio de Nash global. Não sabemos o quão pequeno  $\delta$  precisa ser. Assim, se  $\prod_{j \in J} \tilde{b}_j \times \prod_{j \notin J} b_j^*$  no passo 7 não é um equilíbrio de Nash global, não podemos rigorosamente dizer que não existem outros equilíbrios globais no interior de  $\mathcal{C}_J$ : só sabemos que pontos da caixa com  $b_j > \tilde{b}_j$  para todo  $j \in J$  não o são. Mas possíveis equilíbrios globais estarão restritos a uma vizinhança minúscula do ponto  $\prod_{j \in J} 0 \times \prod_{j \notin J} b_j^*$ .

Podemos aplicar o algoritmo a todos os subconjuntos  $J \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$  com cardinalidade menor que  $N - 2$ , se o objetivo for encontrar todos os equilíbrios possíveis no interior de  $\mathcal{S}^b$  (dado que o Teorema 4.3 exclui a possibilidade de outros equilíbrios interiores, isto é, em fronteiras internas de  $\mathcal{S}^b$ ), ou parar se e quando acharmos  $\mathcal{C}_J$  com equilíbrio de Nash global. Como o número de subcones em que equilíbrios de Nash são possíveis é  $2^N - \binom{N}{2} - N - 1$ , a complexidade do algoritmo descrito cresce exponencialmente com o número de agentes.

No caso de capacidades ilimitadas, apresentado no Capítulo 3, basta fixar  $J = \emptyset$ , resolver os passos 2 e 3 (os passos 4 em diante não se aplicam) e verificar

as condições do Teorema 3.2. Caso positivo, o ponto em  $\mathcal{S}^b$  encontrado no passo 3 é o único equilíbrio de Nash global (e local).

### 6.1.2 Implementação computacional

No Passo 2, usamos o método de Newton-Raphson, com ponto inicial  $s = \sum_{j \notin J} \frac{1}{c_j}$ . Como se vê na Figura 3.2, esse ponto está à direita do ponto fixo. Logo, a concavidade da função  $\Phi$  garante que o algoritmo convergirá para ele (e não para zero, que seria o caso se iniciássemos com um ponto à esquerda do ponto fixo). As derivadas de  $\Phi$  são calculadas, em cada iteração do método, usando a fórmula explícita (3-5), obtida na demonstração do Lema 3.1.

Para verificar a globalidade no passo 7, tomamos um agente  $j \leq N$ , fixamos as estratégias dos  $N - 1$  concorrentes e calculamos o lucro  $L_j$  em uma malha de pontos em  $\mathcal{S}_j^b$ . Se em algum ponto da malha, o lucro for maior que no ponto testado, então este não é um equilíbrio de Nash global<sup>1</sup>. O mesmo processo é realizado para todos os agentes.

Para um caso com 14 agentes, o algoritmo levou cerca de 14 segundos para percorrer todos os subcones  $\mathcal{C}_J$  com  $\text{card}(J) < N - 2$ .

### 6.1.3 Exemplo

Sejam quatro agentes, com custos  $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (0.8, 0.4, 0.3, 0.2)$  e capacidades reais  $(\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3, \bar{G}_4) = (600, 1200, 1300, 5000)$ . O custo de déficit é  $M = 6000$ . A Tabela 6.1 mostra os resultados do Algoritmo 1, para alguns valores de demanda  $d$ .

Subcones  $\mathcal{C}_J$  com  $\text{card}(J) \geq N - 2$  não podem ter equilíbrios de Nash locais em seu interior, pelo Teorema 4.2 e Corolário 4.2.1(a). Assim, a busca por equilíbrios se restringe aos subcones indicados nas colunas da tabela.

A primeira linha mostra os valores de  $b_j$  (para  $j \notin J$ ) encontrados após aplicar os passos 1 a 3 do Algoritmo 6.1.1 em cada subcone. Estes valores são independentes da premissa de demanda.

O passo 4 verifica a existência de equilíbrios de Nash locais. As células da tabela em vermelho mostram subcones (colunas da tabela) que, para dada demanda (linhas da tabela) não possuem equilíbrios de Nash locais. Nas células restantes (em amarelo ou verde), o algoritmo prossegue com os passos 5 e 6. A tabela mostra os limites superiores  $\tilde{b}_j$  (encontrados no passo 5), com  $j \in J$ , para que um ponto seja equilíbrio de Nash local. Ou seja, equilíbrios de Nash

<sup>1</sup>O desempenho computacional poderia melhorar se, ao invés de analisar uma grade de pontos em  $\mathcal{S}_j^b$ , analisássemos somente os pontos de máximo local.

Tabela 6.1: Exemplo com 4 agentes e espaço de estratégias  $\mathcal{S}^b$ .

	$J = \emptyset$	$J = \{1\}$	$J = \{2\}$	$J = \{3\}$	$J = \{4\}$
	$b_1 = 0.96$ $b_2 = 0.58$ $b_3 = 0.49$ $b_4 = 0.41$	$b_2 = 0.68$ $b_3 = 0.59$ $b_4 = 0.52$	$b_1 = 1.13$ $b_3 = 0.71$ $b_4 = 0.64$	$b_1 = 1.18$ $b_2 = 0.83$ $b_4 = 0.69$	$b_1 = 1.23$ $b_2 = 0.89$ $b_3 = 0.82$
$d = 500$					
$d = 1000$		$b_1 < 0.13$			
$d = 2000$		$b_1 < 0.46$	$b_2 < 0.17$	$b_3 < 0.15$	
$d = 3000$		$b_1 < 0.78$	$b_2 < 0.39$	$b_3 < 0.37$	
$d = 4000$		$b_1 < 1.1$			
$d = 4500$		$b_1 < 1.27$			
$d = 4900$					
$d = 6000$					$b_4 < 0.06$

■ Nem local, nem global     
 ■ Nash local     
 ■ Equilíbrios locais contendo equilíbrios globais

locais em um subcone  $\mathcal{C}_J$  possuem valores fixos para  $b_j$  no caso de  $j \notin J$ , mostrados na primeira linha da tabela (e invariantes com a demanda); e o valor de  $b_j$  para  $j \in J$  pode variar no intervalo  $(0, \tilde{b}_j)$ , indicado na tabela para cada possível valor de demanda.

Por exemplo, para a demanda  $d = 2000$ , o subcone  $\mathcal{C}_{\{4\}}$  não possui equilíbrios de Nash locais. No subcone  $\mathcal{C}_{\{3\}}$ , os equilíbrios formam o segmento unidimensional  $\mathbf{b} \in 1.18 \times 0.83 \times (0, 0.15) \times 0.69$ . No subcone  $\mathcal{C}_{\{2\}}$  e  $\mathcal{C}_{\{1\}}$ , os equilíbrios de Nash são segmentos em que  $b_2$  e  $b_1$  variam, respectivamente. No caso do subcone  $\mathcal{C}_\emptyset$ , só o ponto  $(0.96, 0.58, 0.49, 0.41)$  é equilíbrio de Nash local (motivo pelo qual as células dessa coluna não possuem fórmula).

Por fim, o passo 7 fixa, para cada subcone e para todo  $j \in J$ ,  $b_j = \epsilon \tilde{b}_j$  e verifica se esse ponto da caixa é equilíbrio de Nash global. Utilizamos  $\epsilon = 10^{-9}$ . As células em verde são aquelas em que tal ponto é equilíbrio de Nash global; as células em amarelo são aquelas em que não é.

Neste exemplo, não há nenhum equilíbrio de Nash global quando a demanda é maior que 3000 (pelo menos para os valores testados). Se a demanda está entre 500 e 3000, o único equilíbrio de Nash global encontrado está no subcone  $\mathcal{R}_\emptyset$ . Diferente dos equilíbrios locais, os quais foram encontrados todos, somente um equilíbrio de Nash global foi localizado (o equilíbrio com  $b_j = \epsilon \tilde{b}_j$  para  $j \in J$ ). Há outros equilíbrios de Nash globais, mas todos eles levarão à mesma geração, preço e lucro dos agentes.

## 6.2

### Caso $S^{b,g}$

#### 6.2.1

##### Algoritmo

O seguinte algoritmo é aplicável no caso em que os agentes declaram para o operador tanto funções de custo  $b_j g_j^2/2$  como disponibilidades máximas  $\bar{g}_j$ .

---

##### Algoritmo 2 Encontrar equilíbrios de Nash em $\mathcal{R}_J$

---

- 1: Fixe  $J$  e  $\epsilon$  pequeno.
- 2: Encontrar  $s > 0$  que resolve

$$s = \sum_{j \notin J} \left( \frac{c_j}{2} + \frac{1}{s} + \sqrt{\frac{c_j^2}{4} + \frac{1}{s^2}} \right)^{-1}.$$

- 3: Para todo  $j \notin J$ , calcular

$$b_j^* = \frac{c_j}{2} + \frac{1}{s} + \sqrt{\frac{c_j^2}{4} + \left(\frac{1}{s}\right)^2},$$

e para todo  $j \in J$ , calcular

$$\bar{g}_j^* = d \left( 2 + c_j s + \sum_{i \in J - \{j\}} \frac{1 + c_j s}{1 + c_i s} \right)^{-1}.$$

- 4: Verificar se

$$\forall j \notin J, \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{g}_i^*}{s} < \min\{M, b_j^* \bar{G}_j\} \quad e \quad \forall j \in J, \bar{g}_j^* < \bar{G}_j.$$

Caso negativo, pare: não existe equilíbrio de Nash local em  $\mathcal{R}_J$ .

- 5: Para todo  $j \in J$ , calcular

$$\tilde{b}_j = \min \left\{ \frac{M}{\bar{g}_j^*}, \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{g}_i^*}{\bar{g}_j^* s} \right\}$$

e para todo  $j \notin J$ ,

$$\tilde{g}_j = \min \left\{ \bar{G}_j, \frac{M}{b_j^*} \right\} \quad e \quad \hat{g}_j = \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{g}_i^*}{b_j^* s}.$$

- 6: Os equilíbrios de Nash locais formam a caixa:

$$\mathbf{b} \in \prod_{j \in J} (0, \tilde{b}_j) \times \prod_{j \notin J} b_j^*,$$

$$\bar{\mathbf{g}} \in \prod_{j \in J} g_j^* \times \prod_{j \notin J} (\hat{g}_j, \tilde{g}_j) .$$

7: Verificar se  $(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{g}})$  com

$$\mathbf{b} = \prod_{j \in J} \epsilon \tilde{b}_j \times \prod_{j \notin J} b_j^* \quad e \quad \bar{\mathbf{g}} = \prod_{j \in J} g_j^* \times \prod_{j \notin J} \tilde{g}_j$$

é equilíbrio de Nash global.

Os passos 2 e 3 resolvem as equações (5-1) e (5-2) do Teorema 5.2. O passo 4 verifica se é possível atender às condições (5-3) e (5-4) do mesmo teorema. Caso positivo, os passos 5 e 6 calculam a caixa de equilíbrios de Nash locais. Por fim, o passo 7 verifica a existência de equilíbrios de Nash globais, baseado no Teorema 5.4, aplicando-se as mesmas ressalvas apresentadas na Seção 6.1.1.

Pelo Teorema 5.3, o algoritmo encontra todos os equilíbrios de Nash locais no interior de  $\mathcal{S}^{b,g}$ , com possível exceção de pontos em que  $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j = d$ . Encontra também um equilíbrio de Nash global em  $\mathcal{R}_J$ , se existir e se  $\epsilon$  for suficientemente pequeno (Teorema 5.4). Pode haver outros equilíbrios globais em  $\mathcal{R}_J$ , mas terão mesmas gerações, lucros e preço, sendo, assim, equivalentes.

Os passos 2 e 7 são implementados conforme descrito na Seção 6.1.2. Para os casos de 14 agentes testados, o algoritmo tipicamente leva cerca de 30 segundos para percorrer todas as regiões  $\mathcal{R}_J$  com  $\text{card}(J) < N - 2$ .

### 6.2.2 Exemplo

Consideramos o mesmo sistema elétrico apresentado na Seção 6.1.3, mas agora os agentes podem declarar tanto  $b_j$  como  $\bar{g}_j$ . A Tabela 6.2 mostra os resultados. As cores têm a mesma interpretação que na Tabela 6.1. Os valores de  $b_j$  para  $j \notin J$  encontrados no passo 3 estão na primeira linha da tabela (novamente, independem da demanda), enquanto os valores de  $\bar{g}_j$  para  $j \in J$  calculados no mesmo passo variam com a demanda e são mostrados nas respectivas linhas (em letras vermelhas).

Os equilíbrios de Nash em cada região formam uma caixa de dimensão quatro (em  $\mathbb{R}_8$ ), com os limites máximos para  $b_j$ ,  $j \in J$ , e mínimos para  $\bar{g}_j$ ,  $j \notin J$ , indicados na respectiva célula da tabela. O limite mínimo para  $b_j$ ,  $j \in J$ , é zero e o limite máximo para  $\bar{g}_j$  é  $\bar{G}_j$ . Ambos são suprimidos da tabela.

Ressaltamos que, nas células em verde, que indicam a existência de equilíbrios de Nash globais em dada região, os pontos que satisfazem as desigualdades indicadas são equilíbrios locais, mas não necessariamente globais. Nessas

<sup>2</sup>Neste exemplo específico,  $\tilde{g}_j = \min\{\bar{G}_j, M/b_j^*\} = \bar{G}_j$  em todas as regiões.

regiões, somente podemos ter certeza que os pontos com

$$\mathbf{b} \in \prod_{j \in J} (0, \epsilon \tilde{b}_j) \times \prod_{j \notin J} b_j^* \quad e \quad \mathbf{g} = \prod_{j \in J} g_j^* \times \prod_{j \notin J} \tilde{g}_j$$

são equilíbrios de Nash globais. Novamente, usamos  $\epsilon = 10^{-9}$ .

Tabela 6.2: Exemplo com 4 agentes e espaço de estratégias  $\mathcal{S}^{b,g}$ .

	$J = \emptyset$	$J = \{1\}$	$J = \{2\}$	$J = \{3\}$	$J = \{4\}$
	$b_1 = 0.96$ $b_2 = 0.58$ $b_3 = 0.49$ $b_4 = 0.41$	$b_2 = 0.68$ $b_3 = 0.59$ $b_4 = 0.52$	$b_1 = 1.13$ $b_3 = 0.71$ $b_4 = 0.64$	$b_1 = 1.18$ $b_2 = 0.83$ $b_4 = 0.69$	$b_1 = 1.23$ $b_2 = 0.89$ $b_3 = 0.82$
$d = 2000$	$\bar{g}_1 > 287$ $\bar{g}_2 > 475$ $\bar{g}_3 > 561$ $\bar{g}_4 > 675$	$\bar{g}_1 = 329$ $b_1 < 1.00$ $\bar{g}_2 > 484$ $\bar{g}_3 > 552$ $\bar{g}_4 > 634$	$\bar{g}_2 = 564$ $\bar{g}_1 > 327$ $b_2 < 0.66$ $\bar{g}_3 > 525$ $\bar{g}_4 > 584$	$\bar{g}_3 = 656$ $\bar{g}_1 > 326$ $\bar{g}_2 > 460$ $b_3 < 0.58$ $\bar{g}_4 > 557$	$\bar{g}_4 = 760$ $\bar{g}_1 > 320$ $\bar{g}_2 > 440$ $\bar{g}_3 > 480$ $b_4 < 0.52$
$d = 3000$	$\bar{g}_1 > 431$ $\bar{g}_2 > 713$ $\bar{g}_3 > 842$ $\bar{g}_4 > 1014$	$\bar{g}_1 = 493$ $b_1 < 1.00$ $\bar{g}_2 > 727$ $\bar{g}_3 > 829$ $\bar{g}_4 > 952$	$\bar{g}_2 = 846$ $\bar{g}_1 > 491$ $b_2 < 0.66$ $\bar{g}_3 > 787$ $\bar{g}_4 > 876$	$\bar{g}_3 = 984$ $\bar{g}_1 > 490$ $\bar{g}_2 > 690$ $b_3 < 0.58$ $\bar{g}_4 > 837$	$\bar{g}_4 = 1139$ $\bar{g}_1 > 480$ $\bar{g}_2 > 661$ $\bar{g}_3 > 721$ $b_4 < 0.52$
$d = 3700$	$\bar{g}_1 > 532$ $\bar{g}_2 > 879$ $\bar{g}_3 > 1039$ $\bar{g}_4 > 1251$				$\bar{g}_4 = 1405$ $\bar{g}_1 > 592$ $\bar{g}_2 > 815$ $\bar{g}_3 > 889$ $b_4 < 0.52$
$d = 4000$	$\bar{g}_1 > 575$ $\bar{g}_2 > 951$ $\bar{g}_3 > 1123$ $\bar{g}_4 > 1352$				
$d = 4500$					

■ Nem local, nem global     
 ■ Nash local     
 ■ Equilíbrios locais contendo equilíbrios globais

## 7

### Conclusão

Essa dissertação analisou equilíbrios de Nash locais e globais em mercados elétricos em que as funções de custo reais e declaradas por agentes geradores ao operador do sistema elétrico são quadráticas e cotadas.

Mostramos que, quando as capacidades são infinitas, sob certas condições, existe um único equilíbrio de Nash local, que é também global. Quando o número de agentes tende a infinito, esse equilíbrio tende ao equilíbrio competitivo (em que agentes declaram seus custos reais ao operador).

Com capacidades limitadas, os equilíbrios de Nash locais no interior do espaço de estratégias formam um número finito de caixas. Em cada caixa, o preço, a geração e os lucros são iguais, e assim podemos, com algum abuso, falar em um número finito de equilíbrios de Nash locais, cotado por  $2^N - \binom{N}{2} - N - 1$ .

As caixas possuem dimensão significativamente menor que o espaço. Se o agente declara somente custos, as caixas têm dimensão variável – a cardinalidade de  $J$ , sendo  $\mathcal{C}_J$  o subcone em que a caixa está. Já se o agente declara custos e capacidades, a dimensão das caixas é o número de agentes  $N$ .

Outro resultado para o caso de capacidades finitas é que um ponto de uma caixa ser (ou não ser) equilíbrio de Nash global implica que outros pontos também são (ou não são). Mostramos que vizinhanças de um vértice específico de cada caixa são os locais mais indicados para buscar equilíbrios globais.

Com esses resultados, elaboramos algoritmos para encontrar equilíbrios de Nash locais e globais, que foram descritos e exemplificados no Capítulo 6.

Existem ainda diversas questões ainda em aberto a serem exploradas. Por exemplo, a existência e caracterização de equilíbrios de Nash locais e globais na fronteira do espaço de estratégias (no caso de capacidades finitas). Outra frente de trabalho é buscar métodos computacionais mais eficientes de percorrer os subcones/regiões – é bem possível que a existência ou não de equilíbrios de Nash locais ou globais em uma região permita afirmar algo sobre a existência ou não de equilíbrios em outros subcones/regiões. A extensão dos resultados para funções de custo mais genéricas e para o caso de o problema do operador incluir outras restrições físicas dos sistemas elétricos também é relevante para a compreensão de sistemas elétricos reais.

## Referências bibliográficas

- [1] CRAMTON, P.. Auction and market design lectures. <https://www.youtube.com/c/PeterCramton/videos>.
- [2] KAHN, A.; CRAMTON, P.; PORTER, R. ; TABORS, R. D.. Uniform pricing or pay-as-bid pricing: A dilemma for California and beyond. Technical report, University of Maryland, Department of Economics, 2001.
- [3] JEHLE, G. A.; RENY, P. J.. *Advanced Microeconomic Theory*. The Addison-Wesley series in economics. Financial Times/Prentice Hall, 2011.
- [4] ABREU, D.; PEARCE, D.. Bargaining, reputation, and equilibrium selection in repeated games with contracts. *Econometrica*, 75(3):653–710, 2007.
- [5] FUDENBERG, D.; TIROLE, J.. *Game Theory*. MIT Press, 1991.
- [6] WALSH, W.; DAS, R.; TESAURO, G. ; KEPHART, J.. Analyzing complex strategic interactions in multi-agent systems. 01 2002.
- [7] SPENCE, A.. Product differentiation and welfare. *American Economic Review*, 66(2):407–14, 1976.
- [8] DIXIT, A.; STIGLITZ, J.. Monopolistic competition and optimum product diversity. *American Economic Review*, 67(3):297–308, 1977.
- [9] VARIAN, H.; INOJOSA, R.. *Microeconomia: princípios básicos; uma abordagem moderna*. Campus, 1999.
- [10] STOFT, S.. *Power System Economics: Designing Markets for Electricity*. IEEE Press/Wiley-Interscience Press, 2002.
- [11] IEA. *Competition in electricity markets*. Technical report, IEA, Paris, 2001.
- [12] BARROSO, L. A. N.. *Estratégias de Ofertas Ótimas Sob Incerteza e Cálculos de Equilíbrios de Nash de Agentes Geradores em Mercados de Curto Prazo de Energia Elétrica: Uma Abordagem por Programação Linear Inteira*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2006.

- [13] IRENA. **Renewable energy auctions: Cases from sub-saharan Africa**, 2018.
- [14] COMITÊ DE REVITALIZAÇÃO. **Comitê de revitalização do modelo do setor elétrico: relatório de progresso nº3**, 2002.
- [15] CCEE. **Relatório do Grupo Temático: Mecanismos de Formação de Preço**, 2019.
- [16] PSR. **Propostas de metodologias para a formação de preços por oferta no brasil**. Projeto de PeD, Engie, 2021.
- [17] ROUGHGARDEN, T.. **Algorithmic game theory**. <https://timroughgarden.org/f13/f13.html>, 2013. Acessado em 13 de abril de 2023.
- [18] KLEMPERER, P.; MEYER, M.. **Supply function equilibria in oligopoly under uncertainty**. *Econometrica*, 57(6):1243–77, 1989.
- [19] GREEN, R. J.; NEWBERY, D. M.. **Competition in the British electricity spot market**. *Journal of Political Economy*, 100(5):929–953, October 1992.
- [20] GREEN, R.. **Increasing competition in the British electricity spot market**. *The Journal of Industrial Economics*, 44(2):205–216, 1996.
- [21] BOLLE, F.. **Supply function equilibria and the danger of tacit collusion: The case of spot markets for electricity**. *Energy Economics*, 14(2):94–102, 1992.
- [22] BALDICK, R.; HOGAN, W.. **Capacity constrained supply function equilibrium models of electricity markets: Stability, non-decreasing constraints, and function space iterations**. Working paper, University of California Energy Institute, 12 2001.
- [23] WOLAK, F. A.. **Measuring unilateral market power in wholesale electricity markets: The California market, 1998-2000**. *American Economic Review*, 93(2):425–430, 2003.
- [24] LIN, W.; BITAR, E.. **A structural characterization of market power in electric power networks**. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 7(3):987–1006, 2020.
- [25] WEARE, C.. **The California electricity crisis: causes and policy options**. Public Policy Institute Of California, 2004.

- [26] BOYD, S.; VANDENBERGHE, L.. **Convex Optimization**. Cambridge University Press, March 2004.
- [27] ROCKAFELLAR, R.. **Convex Analysis**. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics. Princeton University Press, 1997.
- [28] MACULAN, N.; SANTIAGO, C.; MACAMBIRA, E. ; JARDIM, H.. **An  $O(n)$  algorithm for projecting a vector on the intersection of a hyperplane and a box in  $\mathbb{R}^n$** . Journal of Optimization Theory and Applications - J OPTIMIZ THEOR APPL, 117:553–574, 06 2003.
- [29] BORTOLOSSI, H. J.. **Operação ótima de sistemas hidrotérmicos**. Minicurso no XXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), 2002.
- [30] GORDON, S.. **Why did Marshall transpose the axes?** Eastern Economic Journal, 8(1):31–45, 1982.

## A

### Demonstrações adicionais

O Teorema A.1 provê uma demonstração simples para o fato de que as condições de KKT são suficientes no caso da otimização de uma função convexa sobre um poliedro convexo. O teorema usa o fato de que uma função convexa é sempre superior que sua aproximação afim. Vale observar que existem condições mais gerais em que pode ser demonstrado que as condições de KKT são necessárias e suficientes [26].

**Teorema A.1** *Seja o problema de otimização*

$$\begin{aligned} \min_x F(x) \\ \text{s.a.} \\ Ax \leq b \end{aligned}$$

com  $F$  uma função real convexa e diferenciável no  $\mathbb{R}^n$  e  $A$  uma matriz.

*Então as condições de KKT são suficientes para otimalidade da solução.*

*Isto é, se  $x_0$  e  $\lambda_0$  satisfazem:*

$$Ax_0 \leq b \tag{A-1}$$

$$\nabla F^t(x_0) = \lambda_0^t A \tag{A-2}$$

$$\lambda_0^t (Ax_0 - b) = 0 \tag{A-3}$$

$$\lambda_0 \leq 0 \tag{A-4}$$

*$x_0$  é solução ótima.*

*Prova.* A condição (A-1) garante que  $x_0$  está no conjunto admissível. Basta, portanto, provar que para todo  $y$  no domínio,  $F(y) \geq F(x_0)$ .

Seja  $y$  tal que  $Ay \leq b$ . Pela desigualdade do gradiente de funções convexas:

$$F(y) \geq F(x_0) + \nabla F^t(x_0)(y - x_0)$$

Por (A-2):

$$F(y) \geq F(x_0) + \lambda_0^t A(y - x_0)$$

Por (A-4),  $Ay \leq b$  e  $\lambda_0 \leq 0$ , implicando  $\lambda_0^t Ay \geq \lambda_0^t b$ . Logo:

$$F(y) \geq F(x_0) + \lambda_0^t(b - Ax_0) = F(x_0)$$

com a última igualdade vindo de (A-3). ■

A Proposição A.1 é utilizada na demonstração da Proposição 3.1.

**Proposição A.1** *Seja  $N > 1$  e a função com domínio  $\mathcal{S}^b$*

$$L_j(b_1, \dots, b_N) = \left(b_j - \frac{c_j}{2}\right) \left[ \frac{d}{1 + b_j \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i}\right)} \right]^2.$$

Então  $\frac{\partial L_j}{\partial b_j} > 0 \Leftrightarrow b_j < c_j + \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i}\right)^{-1}$  e  $\frac{\partial^2 L_j}{\partial b_j^2} > 0 \Leftrightarrow b_j > 2 \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i}\right)^{-1} + \frac{3}{2}c_j$ .

*Prova.* Calculando derivadas, encontramos

$$\frac{\partial L_j}{\partial b_j} = \left[ \frac{d}{1 + b_j \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i}\right)} \right]^2 \left[ 1 - 2 \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i}\right) \frac{\left(b_j - \frac{c_j}{2}\right)}{1 + b_j \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i}\right)} \right]$$

e

$$\frac{\partial^2 L_j}{\partial b_j^2} = -\frac{2d^2 \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i}\right)}{\left[1 + b_j \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i}\right)\right]^4} \left[ 2 + \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i}\right) \left(\frac{3}{2}c_j - b_j\right) \right].$$

Dessas fórmulas e do fato de que  $\sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i} > 0$  (pois  $\mathcal{S}^b \subseteq \mathbb{R}_{>0}^N$ ),

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_j}{\partial b_j} > 0 &\iff 1 - 2 \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i}\right) \frac{\left(b_j - \frac{c_j}{2}\right)}{1 + b_j \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i}\right)} > 0 \\ &\iff 1 + b_j \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i}\right) > 2 \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i}\right) \left(b_j - \frac{c_j}{2}\right) \\ &\iff (b_j - c_j) \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i}\right) < 1 \iff b_j < c_j + \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i}\right)^{-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L_j}{\partial b_j^2} > 0 &\iff 2 + \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i}\right) \left(\frac{3}{2}c_j - b_j\right) < 0 \\ &\iff b_j > 2 \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{b_i}\right)^{-1} + \frac{3}{2}c_j \end{aligned}$$

■

O Teorema seguinte é mencionado ao fim da Seção 3.3.

**Teorema A.2** *Suponha  $L > 0$  tal que  $0 < (c_j)_{j \in \mathbb{N}} < L$  e  $\mathbf{b}_n = (b_{n,1}, b_{n,2}, \dots, b_{n,n})$ , com  $n > 2$ , resolvendo*

$$\forall j \leq n, b_{n,j} = c_j + \left( \sum_{\substack{i \leq n \\ i \neq j}} \frac{1}{b_{n,i}} \right)^{-1}.$$

*Se  $\inf_{j \in \mathbb{N}} (\bar{b}_j) > L$  e  $M > d \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{b_j} \right)^{-1}$ , então existe  $k$  tal que para todo  $N > k$ ,  $M > d \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{\bar{b}_j} \right)^{-1}$  e, para todo  $j \leq N$ ,  $\bar{b}_j > b_{N,j}$ .*

*Prova.* Pela definição de limite, existe  $k^*$  tal que

$$\forall n > k^*, M > d \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{\bar{b}_j} \right)^{-1}.$$

Seja  $k \geq \max \left\{ k^*, \frac{2L}{\inf_{j \in \mathbb{N}} (\bar{b}_j) - L} + 1, 2 \right\}$ . Se  $N > k$ , pela expressão acima, temos  $M > d \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{\bar{b}_j} \right)^{-1}$ . Além disso, para todo  $j \in \mathbb{N}$ ,  $N > k \geq \frac{2L}{\bar{b}_j - c_j} + 1$ . Logo, pela Proposição 3.2,  $\bar{b}_j > c_j + \frac{2L}{N-1} \geq b_{N,j}$ . ■

O Lema seguinte não foi usado nesta dissertação, mas mostra que os lances  $b_j$  decrescem com um aumento do número de agentes.

**Lema A.1** *Seja  $(c_j)_{j \in \mathbb{N}} > 0$  e  $\mathbf{b}_n = (b_{n,1}, b_{n,2}, \dots, b_{n,n})$ , com  $n > 2$ , que resolva*

$$\forall j \leq n, b_{n,j} = c_j + \left( \sum_{\substack{i \leq n \\ i \neq j}} \frac{1}{b_{n,i}} \right)^{-1}.$$

*Então  $b_{k+1,j} < b_{k,j}$ .*

*Prova.*

Pelo Lema 3.1,

$$b_{k,j} = \frac{c_j}{2} + \frac{1}{S_0} + \sqrt{\frac{c_j^2}{4} + \frac{1}{S_0^2}} \quad e \quad b_{k+1,j} = \frac{c_j}{2} + \frac{1}{S_1} + \sqrt{\frac{c_j^2}{4} + \frac{1}{S_1^2}},$$

com  $S_0$  e  $S_1$  sendo as respectivas soluções de

$$S_0 = \Phi_0(S_0) = \sum_{i \leq k} \left( \frac{c_i}{2} + \frac{1}{S_0} + \sqrt{\frac{c_i^2}{4} + \frac{1}{S_0^2}} \right)^{-1} \quad e$$

$$S_1 = \Phi_1(S_1) = \sum_{i \leq k+1} \left( \frac{c_i}{2} + \frac{1}{S_1} + \sqrt{\frac{c_i^2}{4} + \frac{1}{S_1^2}} \right)^{-1}.$$

Assim, basta provar que  $S_1 > S_0$ .

A função  $\Phi_0$  é côncava com  $\lim_{s \rightarrow 0} \Phi_0(s) = 0$  e  $\lim_{s \rightarrow 0} \Phi_0'(s) > 1$  (como na demonstração do Lema 3.1). Com um pouco de análise, demonstra-se que, para  $s < S_0$ ,  $\Phi_0(s) > s$  (ver Figura 3.2).

Suponha por contradição que  $S_1 \leq S_0$ . Então  $\Phi_0(S_1) \geq S_1$ . Além disso,  $\Phi_1(S_1) > \Phi_0(S_1)$  (pois  $\Phi_1$  tem uma parcela a mais no somatório, positiva e não-nula). Mas isso implicaria  $\Phi_1(S_1) > S_1$ , o que é absurdo. ■