



Fernanda Py Silva Cordeiro

Quádricas de Moutard em Superfícies

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Marcos Craizer

Rio de Janeiro
Setembro de 2023



Fernanda Py Silva Cordeiro

Quádricas de Moutard em Superfícies

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

Prof. Marcos Craizer

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Ronaldo Alves Garcia

Instituto de Matemática e Estatística – UFG

Profa. Débora Lopes da Silva

Departamento de Matemática – UFS

Prof. Ralph Costa Teixeira

Instituto de Matemática e Estatística – UFF

Prof. Marcelo Jose Saia

Departamento de Matemática – USP

Prof. Ady Cambraia Junior

Departamento de Matemática – UFV

Rio de Janeiro, 27 de Setembro de 2023

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial do trabalho, é proibida sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Fernanda Py Silva Cordeiro

Graduou-se em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Fez mestrado no Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Ficha Catalográfica

Cordeiro, Fernanda Py Silva

Quádricas de Moutard em Superfícies / Fernanda Py Silva Cordeiro; orientador: Marcos Craizer. – 2023.

49 f: il. color. ; 30 cm

Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2023.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Contato de quádricas com uma superfície. 3. Quádricas de Moutard. 4. Direções de Darboux. 5. Hiperquádricas de Moutard. I. Craizer, Marcos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

É com uma profunda sensação de gratidão que chego ao fim desta etapa significativa da minha jornada acadêmica. Há uma infinidade de pessoas que foram pilares essenciais nesta trajetória, e gostaria de expressar minha sincera gratidão a cada uma delas.

Em primeiro lugar, não posso deixar de agradecer aos membros da banca, que gentilmente dedicaram seu tempo e conhecimento para avaliar este trabalho. Ronaldo Garcia, Ralph Teixeira, Débora Lopes, Marcelo Saia e Ady Cambraia, obrigada pela disponibilidade e paciência.

Agradeço também à parte administrativa da PUC, que funcionou como a espinha dorsal de toda esta jornada. Um agradecimento especial à Secretária da pós-graduação, Creuza, que sempre esteve disponível com uma ajuda e suporte inestimável.

Gostaria de destacar a orientação incansável do Prof. Marcos Craizer. Sua disponibilidade e acessibilidade para tirar dúvidas, ajudando-me de todas as formas possíveis e imagináveis, foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Nesta jornada, a presença e o apoio da minha família foram vitais. Ao meu marido, Leonardo Cabral, que esteve ao meu lado desde o início desta jornada, quando ainda éramos namorados, e que me acompanhou até este momento, agora como marido, meu mais sincero agradecimento pela parceria e apoio essencial. Agradeço também à minha mãe, Sônia Py, que nunca deixou de acreditar em mim e sempre esteve torcendo por mim.

Quero dedicar este trabalho ao meu pai, Paulo Cesar. Na minha defesa de mestrado, ele não pôde conter as lágrimas, evidenciando o seu orgulho e a sua felicidade por mim. Infelizmente, ele não está aqui para compartilhar este momento comigo, mas sei que sua presença e amor continuam a me guiar e inspirar.

Por fim, gostaria de agradecer à agência de fomento CNPq, que proporcionou o suporte financeiro necessário para a realização deste projeto. A sua ajuda foi crucial para alcançar este marco.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Obrigado a todos que fizeram parte desta jornada, pelas lições aprendidas e pelas memórias criadas. Este é o fruto de um esforço coletivo e eu sou eternamente grata por isso.

Resumo

Cordeiro, Fernanda Py Silva; Craizer, Marcos. **Quádricas de Moutard em Superfícies**. Rio de Janeiro, 2023. 49p. Tese de Doutorado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O contato com modelos geométricos tais como planos, esferas ou quádricas é uma importante ferramenta para entender a geometria diferencial de uma superfície. Nesta tese, estudamos o contato de superfícies com quádricas, e mais particularmente, com as quádricas de Moutard. Estendemos os resultados conhecidos para o caso de pontos parabólicos e curvas flecnodais em superfícies genéricas. Consideramos também o contato de hipersuperfícies com hiperquádricas de Moutard.

Palavras-chave

Contato de quádricas com uma superfície; Quádricas de Moutard; Direções de Darboux; Hiperquádricas de Moutard.

Abstract

Cordeiro, Fernanda Py Silva; Craizer, Marcos (Advisor). **Moutard Quadrics on Surfaces**. Rio de Janeiro, 2023. 49p. Tese de Doutorado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The contact with generic models like planes, spheres or quadrics is an important tool to understand the differential geometry of a surface. In this thesis, we study the contact of surfaces with quadrics, more specifically, with Moutard quadrics. We extend the known results for the case of parabolic points and flecnodal curves in generic surfaces. We consider also the contact of hypersurfaces with Moutard hyperquadrics.

Keywords

Contact of quadrics with a surface; Moutard quadrics; Darboux directions; Moutard hyperquadric.

Sumário

1	Introdução	10
2	Definições preliminares	12
2.1	Contato com cônicas e quádricas	12
2.2	Direções de Darboux e forma cúbica	13
2.2.1	Estrutura de Blaschke	15
2.2.2	Forma cúbica	16
2.2.3	Normal afim de Blaschke de um gráfico	16
2.3	Quádricas de Moutard	18
2.4	Quádricas em pontos quadráticos	19
2.5	Quádricas de melhor contato	20
3	Propriedades da quádrica de Moutard	22
3.1	Feixe de Moutard	22
3.1.1	Contato de ordem 3: Feixe de Moutard e direções de Darboux	23
3.1.2	Contato de ordem 4: Quádricas de Moutard	24
3.1.3	Contato de ordem 5 de uma quádrica de Moutard	25
3.2	Curvas de interseção em uma direção não-Darboux	25
3.3	Curvas de interseção em uma direção de Darboux	28
3.4	Contato de seções contendo a direção $y = \mu x$ do plano tangente	30
3.4.1	Projeção da seção da superfície	30
3.4.2	Projeção da seção da quádrica	30
3.5	Pontos flecnodais	31
3.6	Pontos quadráticos	31
3.7	Quádricas de Segre-Darboux	32
4	Pontos parabólicos	34
4.1	Forma normal em pontos parabólicos	34
4.2	Feixe de Moutard	35
4.2.1	Função contato de ordem 3: Feixe de Moutard e direções de Darboux	36
4.2.2	Contato de ordem 4: Quádrica de Moutard	37
4.2.3	Contato de ordem 5 de uma quádrica de Moutard	38
4.3	Curvas de interseção em uma direção não-Darboux	39
4.4	Curvas de interseção em uma direção de Darboux	40
4.5	Contato de seções que contém a reta $y = \mu x$ no plano tangente	41
4.5.1	Projeção da seção da superfície	41
4.5.2	Projeção da seção da quádrica	41
5	Hiperquádricas de Moutard	43
5.1	Caso $n = 3$	43
5.1.1	Contato seccional e hiperquádrica de Moutard	43
5.1.2	Interseção entre a hipersuperfície e a hiperquádrica de Moutard	44
5.1.3	Propriedade seccional	45
5.1.4	Forma cúbica	45

5.2	Caso geral	48
	Referências bibliográficas	49

Lista de figuras

Figura 2.1	Quádrica de Moutard	19
Figura 3.1	Contato entre uma superfície e uma quádrca de Moutard em um ponto hiperbólico	25
Figura 3.2	Curva de interseção entre a superfície e uma quádrca do feixe de Moutard diferente da quádrca de Darboux	27
Figura 3.3	Curva de interseção entre a superfície e a quádrca de Moutard	27
Figura 4.1	Contato entre uma superfície e uma quádrca de Moutard em um ponto parabólico	39

1

Introdução

O estudo da interseção entre superfícies e quádricas na geometria diferencial proporciona o entendimento das conexões entre as propriedades geométricas e algébricas desses objetos.

Ao iniciar nosso trabalho, exploramos a busca por uma quádrica no feixe de quádricas osculadoras que estabelece um contato mais pronunciado com a superfície no ponto em análise. Para atingir esse objetivo, empregamos uma das direções de Darboux, que faz com que o contato de ordem 3 da quádrica osculadora com a superfície seja um cubo perfeito.

Investigamos a função contato entre a superfície e a quádrica, examinando o tipo de singularidade que ela apresenta. Dessa forma, descobrimos a quádrica que possui o contato mais forte com a superfície. Notavelmente, a quádrica identificada coincide com a quádrica de Moutard quando considerada na mesma direção de Darboux. Essa constatação despertou um interesse nas quádricas de Moutard.

No seguimento deste estudo, no capítulo 3, abordamos o artigo [1] sobre quádricas de Moutard, oferecendo uma perspectiva atualizada sobre suas descobertas. Neste contexto, ampliamos a análise para pontos quadráticos e pontos flecnodais. Um ponto tacnodal é um ponto de inflexão de uma linha assintótica. Neste capítulo mostramos que, em pontos tacnodais, as três direções de Darboux coincidem com a direção assintótica correspondente.

No capítulo 4 analisamos as quádricas de Moutard e as direções de Darboux em pontos parabólicos. Nesse cenário, as quádricas de Moutard podem se degenerar. Mesmo assim, demonstramos que várias propriedades essenciais dessas quádricas são preservadas em pontos parabólicos genéricos. O resultado mais interessante deste capítulo afirma que, assim como ocorre em pontos hiperbólicos e elípticos, as direções de Darboux em pontos parabólicos genéricos coincidem com as direções de anulamento da forma cúbica.

No capítulo 5 estudamos as hiperquádricas de Moutard [8]. Demonstramos que a quádrica de Moutard da interseção de um k -plano com a hipersuperfície coincide com a interseção da hiperquádrica de Moutard com o mesmo k -plano. Além disso, obtivemos uma generalização para dimensões arbitrárias do resultado mencionado acima, que diz que as direções de Darboux coincidem

com as direções de anulamento da forma cúbica. Esta generalização nos parece o resultado mais interessante obtido nesta tese.

2

Definições preliminares

2.1

Contato com cônicas e quádricas

Definição 2.1 Considere M uma superfície suave definida por $\alpha(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$, com $\alpha(u_0, v_0) = P$, e N outra superfície suave definida pela pré-imagem do zero de $F(x, y, z)$. Definimos a função de contato entre M e N como $g(u, v) := F(\alpha(u, v))$. Dizemos que as superfícies têm um contato de ordem k em P se as seguintes condições forem satisfeitas:

- $g(u_0, v_0) = 0$.
- Todas as derivadas de g de ordem menor ou igual a k em P são nulas.
- g possui alguma derivada de ordem $k + 1$ não nula em P .

Podemos estender esta definição de forma análoga para variedades de dimensão n .

Definição 2.2 Dizemos que uma cônica é osculadora a uma curva em um ponto P se a cônica e a curva têm um contato de ordem 4 neste ponto.

Definição 2.3 Dizemos que uma quádrica é osculadora à uma superfície em um ponto P se a quádrica e a superfície têm um contato de ordem 2 neste ponto. A quádrica é considerada hiperosculadora se o contato for de ordem 3, e nesse caso, chamamos P de ponto quadrático.

Lema 2.4 Seja $z = a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + O(5)$ uma curva planar, com $a \neq 0$. Sua cônica osculadora, na origem, é dada por

$$x^2 + \left(-\frac{a_3^2}{a_2^4} + \frac{a_4}{a_2^3} \right) z^2 + \frac{a_3}{a_2^2} xz - \frac{1}{a_2} z = 0$$

Prova. Considerando a cônica

$$Ax^2 + Bz^2 + Cxz + Dx + Ez + F = 0 \quad (2-1)$$

A função contato da curva $z = a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + O(5)$ com a cônica é

$$g(x) = Ax^2 + Ba_2^2x^4 + Ca_2x^3 + Ca_3x^4 + Dx + Ea_2x^2 + Ea_3x^3 + Ea_4x^4 + F + O(5)$$

Para que (2-1) seja uma cônica osculadora, devemos ter:

$$g(0) = F = 0, \quad g'(0) = D = 0, \quad g''(0) = 2(A + Ea_2) = 0,$$

$$g'''(0) = 6(Ca_2 + Ea_3) = 0 \quad \text{e} \quad g''''(0) = 24(Ba_2^2 + Ca_3 + Ea_4) = 0$$

Sendo assim,

$$E = -\frac{A}{a_2} \quad C = \frac{Aa_3}{a_2^2} \quad B = -\frac{Aa_3^2}{a_2^4} + \frac{Aa_4}{a_2^3}$$

Portanto, a cônica osculadora tem a seguinte forma:

$$Ax^2 + \left(-\frac{Aa_3^2}{a_2^4} + \frac{Aa_4}{a_2^3} \right) z^2 + \frac{Aa_3}{a_2^2} xz - \frac{A}{a_2} z = 0$$

$$x^2 + \left(-\frac{a_3^2}{a_2^4} + \frac{a_4}{a_2^3} \right) z^2 + \frac{a_3}{a_2^2} xz - \frac{1}{a_2} z = 0$$

■

2.2

Direções de Darboux e forma cúbica

Definição 2.5 *Definimos um ponto como um ponto triplo quando a curva atravessa o ponto em questão três vezes, considerando as multiplicidades envolvidas.*

Definição 2.6 *A curva de interseção entre uma superfície e uma quádrlica osculadora apresenta um ponto triplo no ponto de interseção, resultando em três direções tangentes nesse ponto. Quando essas três direções tangentes coincidem, elas são denominadas direções de Darboux. Essas direções podem ser reais ou complexas.*

Definição 2.7 *Um ponto em uma superfície é chamado de ponto quádrático quando existe uma quádrlica que apresenta um contato de terceira ordem com a superfície nesse ponto.*

Proposição 2.8 *Um ponto hiperbólico, não quádrático, de uma superfície S possui três direções de Darboux, sendo duas delas complexas e uma real. Em um ponto elíptico, não quádrático, as três direções de Darboux são reais.*

Prova.

Faremos a demonstração para o caso hiperbólico e usaremos a forma normal de Pick para expressar a superfície S numa vizinhança de um ponto hiperbólico. Mais detalhes podem ser encontrados em [2].

Considere a superfície S descrita por:

$$z = xy + \frac{\alpha\sqrt{2}}{6}(x^3 + y^3) + \frac{a_{40}x^4}{24} + \frac{a_{31}x^3y}{6} + \frac{a_{22}x^2y^2}{2} + \frac{a_{13}xy^3}{6} + \frac{a_{04}y^4}{24} + O(5), \quad (2-2)$$

onde $\alpha, a_{ij} \in \mathbb{R}$. Considere também a quádrlica genérica

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0. \quad (2-3)$$

A função contato entre a superfície dada pela equação (2-2) e a quádrlica (2-3) é determinada por

$$g(x, y) = J + Gx + Hy + Ax^2 + By^2 + (D + I)xy + \frac{I\alpha\sqrt{2}}{6}x^3 + \frac{I\alpha\sqrt{2}}{6}y^3 + Ex^2y + Fxy^2 + \left(\frac{E\alpha\sqrt{2}}{6} + \frac{Ia_{40}}{24}\right)x^4 + \left(\frac{F\alpha\sqrt{2}}{6} + \frac{Ia_{04}}{24}\right)y^4 + \left(\frac{F\alpha\sqrt{2}}{6} + \frac{Ia_{31}}{6}\right)x^3y + \left(\frac{E\alpha\sqrt{2}}{6} + \frac{Ia_{13}}{6}\right)xy^3 + \left(C + \frac{Ia_{22}}{2}\right)x^2y^2 + O(5).$$

Portanto a quádrlica (2-3) é uma quádrlica osculadora à Superfície S , na origem, se nesse ponto, temos

$$J = G = H = 2A = 2B = D + I = 0.$$

Se $I \neq 0$, assumimos $I = 1$. A função contato entre a superfície S e a família de quádrlicas osculadoras $-xy + Exz + Fyz + Cz^2 + z = 0$ se torna

$$g(x, y) = \frac{\alpha\sqrt{2}}{6}x^3 + \frac{\alpha\sqrt{2}}{6}y^3 + Ex^2y + Fxy^2 + O(4).$$

Na origem, a curva de interseção entre a superfície e a quádrlica é representada por $g(x, y) = 0$. As direções tangentes nesse ponto coincidem se o 3-jato de $g(x, y)$ for equivalente a um cubo perfeito. Isso nos leva a considerar a expressão

$$\frac{\alpha\sqrt{2}}{6} \left(x^3 + y^3 + E \frac{6}{\alpha\sqrt{2}} x^2y + F \frac{6}{\alpha\sqrt{2}} xy^2 \right),$$

na forma canônica

$$\frac{\alpha\sqrt{2}}{6} (ax + by)^3.$$

Estabelecendo $a^3 = 1$ e $b^3 = 1$, é possível determinar os coeficientes E e F das quádrlicas osculadoras que determinam as direções de Darboux.

$$E = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$$

$$F = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$$

Considerando os possíveis valores de a e b na equação $\frac{\alpha\sqrt{2}}{6}(ax + by)^3 = 0$, encontramos as 3 direções de Darboux, sendo elas $(1, -1)$, $(\omega, -1)$ e $(\omega^2, -1)$, onde ω é uma raiz cúbica da unidade.

Se $I = 0$, temos também $D = 0$ e nesse caso, a função contato entre a superfície S e a família de quádricas osculadoras é dada pela equação $g(x, y) = Ex^2y + Fxy^2 + O(4)$ e não temos uma direção tripla na origem.

Em um ponto elíptico a forma normal de Pick é da forma

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2} + \alpha \frac{x^3 - 3xy^2}{6} + O(4)$$

e neste caso, a função contato da superfície com uma quádrica osculadora na origem é

$$g(x, y) = \frac{3E + \alpha}{6}x^3 + \frac{F}{2}y^3 + \frac{F}{2}x^2y + \frac{E - \alpha}{2}xy^2 + O(4).$$

Para que a parte cúbica de $g(x, y)$ seja um cubo perfeito, devemos ter $F = 0, E = \alpha$ ou $F = \frac{\sqrt{3}\alpha}{2}, E = \frac{-\alpha}{2}$ ou $F = \frac{-\sqrt{3}\alpha}{2}, E = \frac{-\alpha}{2}$. Portanto, temos as direções $(0, 1), (\sqrt{3}, 1)$ e $(\sqrt{3}, 1)$. ■

2.2.1

Estrutura de Blaschke

Para uma imersão $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ no espaço tridimensional, denotamos por $\mathfrak{X}(U)$ o espaço de campos vetoriais em U . Dado um campo vetorial ξ arbitrário transversal a f , escrevemos, para $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$,

$$D_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi, \quad (2-4)$$

onde h é uma forma bilinear e ∇ uma conexão. Vamos assumir que h é não degenerado, o que é independente da escolha de ξ . Escreva também

$$D_X \xi = f_*(SX) + \tau(X)\xi, \quad (2-5)$$

onde τ é uma 1-forma e S um operador linear. É bem conhecido que existe um campo vetorial ξ , único a menos de sinal, tal que $\tau = 0$ e as formas de área determinadas por h e por ξ coincidem. Esse campo vetorial é chamado de normal afim de Blaschke, a métrica correspondente e a conexão também são chamadas de Blaschke.

2.2.2

Forma cúbica

Considere a estrutura de Blaschke da imersão não degenerada f . A forma cúbica é definida por

$$C(X, Y, Z) = Xh(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z). \quad (2-6)$$

É bem conhecido que C é simétrica em (X, Y, Z) . Além disso, a condição de apolaridade se mantém:

$$\sum_{i,j} h^{ij} C_{kij} = 0, \quad (2-7)$$

para qualquer k , onde $C_{kij} = C(X_k, X_i, X_j)$ e (h^{ij}) é o inverso de (h_{ij}) .

2.2.3

Normal afim de Blaschke de um gráfico

Assuma que f é dado como o gráfico de uma função $g(x, y)$. Então podemos calcular o normal afim ξ pelo seguinte procedimento. Denote $\xi_0 = (0, 0, 1)$ e escreva $\xi = \phi\xi_0 + Z_1 f_x + Z_2 f_y$. Então temos que

$$\phi^4 = |\det(D^2 g)|$$

e (Z_1, Z_2) satisfaz a equação

$$\begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix}.$$

Considere a imersão $f(x, y) = (x, y, z(x, y))$, onde z é dado pela equação (2-2). Escolhemos um campo vetorial transversal de tentativa $\xi_0 = (0, 0, 1)$. Aplicando a fórmula de Gauss

$$D_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h(x, y)\xi,$$

aos campos $X = \frac{\partial}{\partial x}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial y}$, obtemos a forma fundamental afim de Blaschke h_0 de ξ_0 ,

$$h_0 = D^2 z = \begin{bmatrix} \alpha\sqrt{2}x & 1 \\ 1 & \alpha\sqrt{2}y \end{bmatrix}.$$

O campo normal afim é dado por $\xi = \phi\xi_0 + Z$ onde $\phi = |\det[h_0]|^{1/4}$. Como estamos considerando (x, y) perto da origem, neste caso, $|\det[h_0]| = (1 - 2\alpha^2 xy) > 0$, portanto

$$\phi = (1 - 2\alpha^2 xy)^{1/4},$$

$$\phi_x = \frac{\alpha^2 y}{2(1 - 2\alpha^2 xy)^{3/4}},$$

$$\phi_y = \frac{\alpha^2 x}{2(1 - 2\alpha^2 xy)^{3/4}},$$

e Z é determinado por

$$\begin{bmatrix} \alpha\sqrt{2}x & 1 \\ 1 & \alpha\sqrt{2}y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix}.$$

Logo

$$Z_1 = -\frac{\alpha^2(\alpha\sqrt{2}y^2 - x)}{2(1 - 2\alpha^2 xy)^{7/4}},$$

$$Z_2 = -\frac{\alpha^2(\alpha\sqrt{2}x^2 - y)}{2(1 - 2\alpha^2 xy)^{7/4}} \text{ e}$$

$$\xi = \left(-\frac{\alpha^2(\alpha\sqrt{2}y^2 - x)}{2(1 - 2\alpha^2 xy)^{7/4}}, -\frac{\alpha^2(\alpha\sqrt{2}x^2 - y)}{2(1 - 2\alpha^2 xy)^{7/4}}, (1 - 2\alpha^2 xy)^{1/4} \right).$$

A métrica de Blaschke ou métrica afim é determinada por $h = \frac{h_0}{\phi}$.
Portanto, a conexão induzida é

$$\nabla_X X = -\frac{Z_1 z_{xx}}{\phi} X - \frac{Z_2 z_{xx}}{\phi} Y,$$

$$\nabla_X Y = -\frac{Z_1 z_{xy}}{\phi} X - \frac{Z_2 z_{xy}}{\phi} Y,$$

$$\nabla_Y Y = -\frac{Z_1 z_{yy}}{\phi} X - \frac{Z_2 z_{yy}}{\phi} Y.$$

Na origem, observamos que $\nabla_X X = \nabla_X Y = \nabla_Y Y = 0$. Com isso, determinamos a forma cúbica da superfície S neste ponto,

$$C(X, X, X) = Xh(X, X) - 2h(\nabla_X X, X) = -\alpha\sqrt{2},$$

$$C(X, X, Y) = Xh(X, X) - 2h(\nabla_Y X, X) = 0,$$

$$C(X, Y, Y) = Xh(Y, Y) - 2h(\nabla_X Y, Y) = 0 \text{ e}$$

$$C(Y, Y, Y) = Xh(Y, Y) - 2h(\nabla_Y Y, Y) = -\alpha\sqrt{2}.$$

A forma cúbica se resume a:

$$C = -\alpha\sqrt{2}(dx^3 + dy^3).$$

Dessa observação, podemos concluir:

Proposição 2.9 *As direções de Darboux coincidem com as direções de anulamento da forma cúbica.*

2.3

Quádricas de Moutard

Proposição 2.10 *Considere S uma superfície e T uma direção tangente à superfície S no ponto P . A união das cônicas osculadoras de todas as seções planares em S que contêm a direção T forma uma quádrlica, veja a figura 2.1. Essa quádrlica é chamada de quádrlica de Moutard de tangente T no ponto P .*

Prova.

Vamos demonstrar o caso onde P é um ponto hiperbólico. Para o caso elíptico, veja a referência [3].

Seja S a superfície definida pela equação (2-2) e considere a direção $y = \mu x$, com $\mu \neq 0$. Um plano arbitrário que contém essa direção é dado por

$$\lambda z = y - \mu x. \quad (2-8)$$

A projeção da interseção de S com o plano (2-8) no plano xz é

$$z = x(\lambda z + \mu x) + \frac{\alpha\sqrt{2}}{6}(x^3 + (\lambda z + \mu x)^3) + O(4).$$

Aplicando a expansão de Taylor nesta curva, obtemos:

$$z = \mu x^2 + \frac{\sqrt{2}\alpha\mu^3 + 6\lambda\mu + \alpha\sqrt{2}}{6}x^3 + \beta x^4 + O(5), \quad (2-9)$$

onde

$$\beta = \frac{16\mu^2\sqrt{2}\alpha\lambda + 4\lambda\alpha\sqrt{2} + 24\lambda^2\mu + a_{40} + 4a_{31}\mu + 12a_{22}\mu^2 + 4a_{13}\mu^3 + a_{04}\mu^4}{24}.$$

Segue do lema 2.4 que a cônica osculadora à curva (2-9), na origem, tem a seguinte forma

$$x^2 - \beta_1 z^2 + \frac{\sqrt{2}\alpha\mu^3 + \alpha\sqrt{2} + 6\lambda\mu}{6\mu^2}xz - \frac{1}{\mu}z = 0,$$

onde

$$\beta_1 = \frac{-4\alpha^2\mu^6 + 24\sqrt{2}\alpha\lambda\mu^4 + 3a_{40}\mu + 12a_{31}\mu^2 + 36a_{22}\mu^3 + 12a_{13}\mu^4 + 3a_{04}\mu^5}{72\mu^3}.$$

Ao substituir λ por $\frac{y - \mu x}{z}$ na cônica osculadora, encontramos a quádrlica de Moutard:

$$-xy + \frac{\alpha(\mu^3 - 2)\sqrt{2}}{6\mu}xz - \frac{\alpha(2\mu^3 - 1)\sqrt{2}}{6\mu^2}yz + \beta_2z^2 + z = 0, \quad (2-10)$$

com

$$\beta_2 = \frac{4\alpha^2\mu^6 + 8\alpha^2\mu^3 + 4\alpha^2 + 3a_{40}\mu + 12a_{31}\mu^2 + 36a_{22}\mu^3 + 12a_{13}\mu^4 + 3a_{04}\mu^5}{72\mu^3}.$$

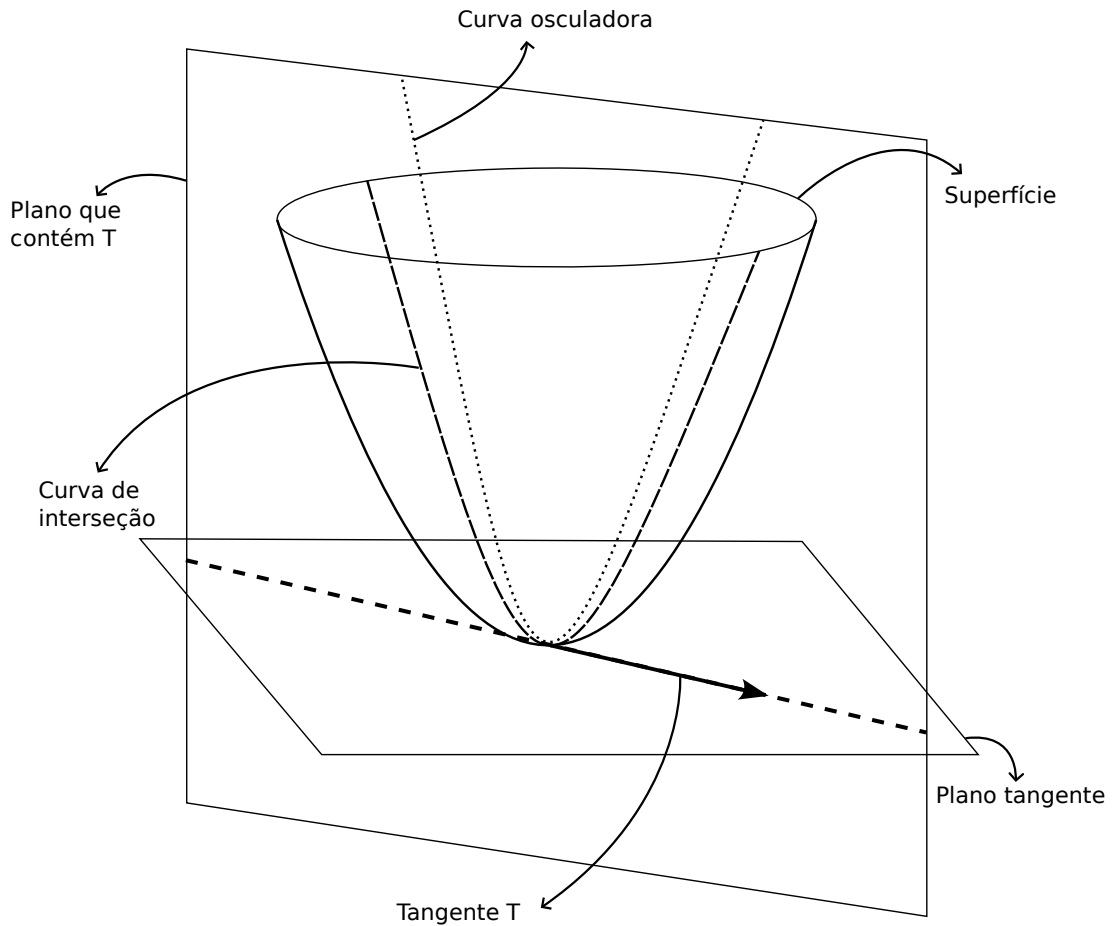


Figura 2.1: Quádrica de Moutard

2.4 Quádricas em pontos quadráticos

Considere a superfície S determinada por (2-2). Como vimos anteriormente, a família de quádricas osculadoras a essa superfície é dada por $-xy + Exz + Fyz + Cz^2 + z = 0$ e a função contato entre a superfície e

uma quádrlica osculadora é a seguinte:

$$g(x, y) = \frac{\alpha\sqrt{2}}{6}x^3 + \frac{\alpha\sqrt{2}}{6}y^3 + Ex^2y + Fxy^2 + O(4).$$

Acrescentamos as seguintes condições para um contato de ordem 3:

$$\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}(0, 0) = \alpha\sqrt{2} = 0, \quad \frac{\partial^3 g}{\partial y^3}(0, 0) = \alpha\sqrt{2} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y}(0, 0) = 2E = 0, \quad \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2}(0, 0) = 2F = 0.$$

Concluimos que a origem é um ponto quadrático, ou seja, a superfície tem um contato de terceira ordem com uma quádrlica (não degenerada) neste ponto, se $\alpha = 0$. A família de quádrlicas hiperosculadoras, neste caso, é determinada por $-xy + Cz^2 + z = 0$.

2.5

Quádrlicas de melhor contato

Em pontos onde $\alpha \neq 0$, o melhor contato que conseguimos é o de segunda ordem. A família de quádrlicas osculadoras é determinada por $-xy + Exz + Fyz + Cz^2 + z = 0$ e a função contato é:

$$\begin{aligned} g(x, y) = & \frac{\alpha\sqrt{2}}{6}x^3 + \frac{\alpha\sqrt{2}}{6}y^3 + Ex^2y + Fxy^2 + \\ & + \left(\frac{E\alpha\sqrt{2}}{6} + \frac{a_{40}}{24}\right)x^4 + \left(\frac{F\alpha\sqrt{2}}{6} + \frac{a_{04}}{24}\right)y^4 + \left(\frac{F\alpha\sqrt{2}}{6} + \frac{a_{31}}{6}\right)x^3y + \\ & + \left(\frac{E\alpha\sqrt{2}}{6} + \frac{a_{13}}{6}\right)xy^3 + \left(C + \frac{a_{22}}{2}\right)x^2y^2 + O(5). \end{aligned}$$

Com a intenção de encontrar quádrlicas com um contato mais forte, consideramos as quádrlicas que determinam as direções de Darboux. Temos que um ponto hiperbólico possui apenas uma direção real de Darboux $(1, -1)$. A família de quádrlicas que determinam essa direção é dada por

$$-xy + \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}xz + \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}yz + Cz^2 + z = 0,$$

e a função contato entre essa quádrlica e a superfície é

$$\begin{aligned} g(x, y) = & \frac{\alpha\sqrt{2}}{6}(x + y)^3 + \left(\frac{\alpha^2}{6} + \frac{a_{40}}{24}\right)x^4 + \left(\frac{\alpha^2}{6} + \frac{a_{04}}{24}\right)y^4 + \\ & \left(\frac{\alpha^2}{6} + \frac{a_{31}}{6}\right)x^3y + \left(\frac{\alpha^2}{6} + \frac{a_{13}}{6}\right)xy^3 + \left(C + \frac{a_{22}}{2}\right)x^2y^2 + O(5). \end{aligned}$$

Com o objetivo de selecionar apenas uma quádrlica osculadora em cada ponto, vamos estudar o tipo de singularidade da função contato e escolher

uma quádrlica que apresente um contato mais forte com a superfície. Para isso, consideramos o difeomorfismo $H(x, y) = (x - y + \bar{A}x^2 + \bar{B}xy + \bar{C}y^2, y)$ e observamos que a função $\bar{g}(u, v) = g(H(u, v))$, que é R-equivalente à $g(x, y)$, possui a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{g}(u, v) = & \frac{\alpha\sqrt{2}}{6}u^3 + \left(3\bar{A} + \frac{\alpha^2}{6} + \frac{a_{40}}{24}\right)u^4 + \left(\frac{a_{40}+a_{04}-4a_{31}-4a_{13}+12a_{22}}{24} + C\right)v^4 + \\ & \left(3\bar{B} + \frac{-3\alpha^2-a_{40}+a_{31}}{6}\right)u^3v + \left(\frac{-a_{40}+3a_{31}+a_{13}-6a_{22}}{6} - 2C\right)uv^3 + \\ & \left(3\bar{C} + \frac{2\alpha^2+a_{40}-2a_{31}+2a_{22}}{4} + C\right)u^2v^2 + O(5). \end{aligned}$$

Escolhemos $\bar{A} = -\frac{\alpha^2}{18} - \frac{a_{40}}{72}$, $\bar{B} = -\frac{-3\alpha^2-a_{40}+a_{31}}{18}$ e $\bar{C} = -\frac{2\alpha^2+a_{40}-2a_{31}+2a_{22}}{12} - \frac{C}{3}$ e zeramos os coeficientes de u^4 , u^3v e u^2v^2 respectivamente. Se o coeficiente de v^4 não for nulo, a singularidade de g é do tipo E_6 . Para obtermos um contato mais forte com a quádrlica, escolhemos $C = -\frac{a_{40}+a_{04}-4a_{31}-4a_{13}+12a_{22}}{24}$, dessa forma g terá uma singularidade do tipo $E_{\geq 7}$. Mais detalhes sobre singularidades podem ser encontrados em [9].

A quádrlica que possui o melhor contato com a superfície, na origem, tem a seguinte equação

$$-xy + \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}xz + \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}yz - \left(\frac{a_{40} + a_{04} - 4a_{31} - 4a_{13} + 12a_{22}}{24}\right)z^2 + z = 0.$$

Proposição 2.11 *A quádrlica de melhor contato encontrada anteriormente é igual a quádrlica de Moutard quando considerada na mesma direção de Darboux.*

Prova. Para verificar a igualdade basta substituir μ por -1 na quádrlica (2-10) encontrada anteriormente. ■

3

Propriedades da quádrlica de Moutard

3.1

Feixe de Moutard

Considere a superfície S em uma vizinhança de um ponto hiperbólico P . A partir de algumas transformações afins, consideramos o ponto P como a origem e o plano tangente à superfície como o plano xy . A equação da superfície pode ser escrita da seguinte forma:

$$z = xy + \alpha x^3 + \beta y^3 + f_4(x, y) + f_5(x, y) + O(6), \quad (3-1)$$

onde

$$f_4(x, y) = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4,$$

$$f_5(x, y) = a_{50}x^5 + a_{41}x^4y + a_{32}x^3y^2 + a_{23}x^2y^3 + a_{14}xy^4 + a_{05}y^5.$$

Estamos usando a referência [1] como base. No entanto, com o objetivo de alcançar um resultado mais abrangente, usamos os coeficiente α e β como coeficientes de x^3 e y^3 respectivamente. Isso nos permite verificar os resultados encontrados por L. Green em pontos flecnodais e quadráticos.

Definição 3.1 *Uma superfície não degenerada S , numa vizinhança de um ponto hiperbólico, é dita ser genérica se:*

1. *Os conjuntos $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ são curvas suaves, imersas em S , com interseções transversais;*
2. *Em cada ponto de interseção $(\alpha = 0) \cap (\beta = 0)$, ambas as curvas $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ são transversais às direções assintóticas.*

Nesse contexto, as curvas $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ são denominadas flecnodais.

3.1.1

Contato de ordem 3: Feixe de Moutard e direções de Darboux

Considere uma quádrlica da forma

$$z = xy + pxz + qyz + Kz^2. \quad (3-2)$$

A função contato da superfície (3-1) e uma quádrlica da forma (3-2), até ordem 3, é dada por

$$\phi_3(x, y) = px^2y + qxy^2 - \alpha x^3 - \beta y^3.$$

Em termos de (x, v) , $v = y - \mu x$, temos

$$\phi_3(x, v) = px^2(v + \mu x) + qx(v + \mu x)^2 - \alpha x^3 - \beta(v + \mu x)^3.$$

Lema 3.2 *A direção $v = 0$ é uma raiz dupla de ϕ_3 se e somente se*

$$p = \frac{2\alpha}{\mu} - \beta\mu^2, \quad q = 2\beta\mu - \frac{\alpha}{\mu^2}. \quad (3-3)$$

Prova. Para $\phi_3(x, v)$ ter $v = 0$ como raiz dupla, os coeficientes de x^3 e x^2v devem zerar. Logo

$$(p + q\mu)\mu = \alpha + \beta\mu^3, \quad p + 2q\mu = 3\beta\mu^2.$$

Resolvendo este sistema linear 2×2 em (p, q) completamos a prova do lema.

■

Definição 3.3 *Defina o feixe de Moutard da superfície (3-1) na direção $y = \mu x$ pela equação (3-2) com p e q dados pelas equações (3-3).*

Para uma quádrlica no feixe de Moutard, temos que

$$\phi_3(x, v) = c_{12}xv^2 + c_{03}v^3,$$

onde

$$c_{12} = -\beta\mu - \frac{\alpha}{\mu^2}, \quad c_{03} = -\beta.$$

Definição 3.4 *As direções de Darboux são definidas pela condição de contato de ordem 3 na direção $y = \mu x$ ser um cubo perfeito. No nosso caso, essa condição é equivalente a*

$$\alpha + \beta\mu^3 = 0. \quad (3-4)$$

3.1.2

Contato de ordem 4: Quádricas de Moutard

O contato de uma quádrlica no feixe de Moutard com a superfície, até ordem 4, é dada por

$$\phi_4(x, y) = (px + qy)(\alpha x^3 + \beta y^3) + Kx^2y^2 - f_4(x, y).$$

Em termos de (x, v) ,

$$\phi_4(x, v) = c_{40}x^4 + c_{31}x^3v + \dots$$

Então

$$c_{40} = (p + q\mu)(\alpha + \beta\mu^3) + K\mu^2 - f_4(1, \mu)$$

o que implica em

$$c_{40} = \frac{1}{\mu} \left((\alpha + \beta\mu^3)^2 + K\mu^3 - \mu f_4(1, \mu) \right).$$

Definição 3.5 *Dentre as quádrlicas do feixe de Moutard, podemos distinguir a quádrlica de Moutard, obtida para $c_{40} = 0$, ou equivalentemente,*

$$K\mu^3 = \mu f_4(1, \mu) - (\alpha + \beta\mu^3)^2. \quad (3-5)$$

Para a quádrlica de Moutard temos que

$$c_{31} = \frac{3(\alpha^2 - \beta^2\mu^6)}{\mu^2} + \frac{2f_4(1, \mu)}{\mu} - \frac{d}{d\mu} f_4(1, \mu). \quad (3-6)$$

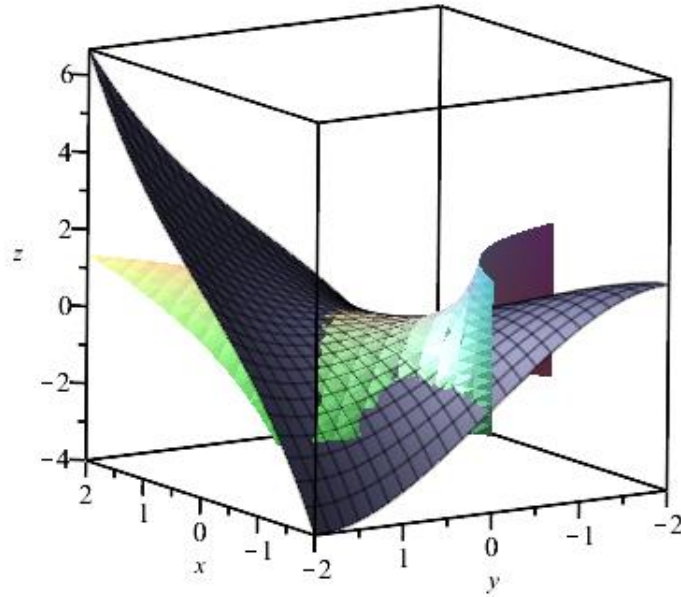


Figura 3.1: Contato entre uma superfície e uma quádrlica de Moutard em um ponto hiperbólico

3.1.3

Contato de ordem 5 de uma quádrlica de Moutard

Para uso posterior, calcularemos o coeficiente c_{50} do contato $\phi_5(x, v)$ de uma quádrlica de Moutard com a superfície. O contato de ordem 5 é dado por

$$\phi_5(x, y) = (px + qy)f_4(x, y) + 2Kxy(\alpha x^3 + \beta y^3) - f_5(x, y).$$

Obtemos então

$$c_{50} = (p + q\mu)f_4(1, \mu) + 2K\mu(\alpha + \beta\mu^3) - f_5(1, \mu)$$

Usando os valores de p, q e K obtemos

$$c_{50} = -\frac{2(\alpha + \beta\mu^3)^3}{\mu^2} + \frac{3(\alpha + \beta\mu^3)f_4(1, \mu)}{\mu} - f_5(1, \mu). \quad (3-7)$$

3.2

Curvas de interseção em uma direção não-Darboux

Definição 3.6 Considere uma curva plana $\alpha(t)$. Uma cúspide é um ponto no qual $\alpha'(t) = 0$, e os vetores $\alpha''(t)$ e $\alpha'''(t)$ são linearmente independentes.

Um exemplo de cúspide é a origem da curva $y^2 - x^3 = 0$.

Definição 3.7 *Tacnode é um ponto singular de uma curva, definido como um ponto onde duas partes da curva têm a mesma direção tangente no ponto duplo.*

Um exemplo de tacnode é a origem da curva $y^2 - x^4 = 0$.

Proposição 3.8 *Assuma que μ não é uma direção de Darboux:*

1. *Se a quádrlica do feixe de Moutard não é a quádrlica de Moutard, a interseção da quádrlica com a superfície consiste de um ramo regular e um ramo cuspidal. Figura 3.2.*
2. *Se a quádrlica é Moutard, a interseção da quádrlica com a superfície consiste de um ramo regular e um ramo tacnodal. Figura 3.3.*

Prova. Como μ não é uma direção de Darboux, $c_{12} \neq 0$. Para o primeiro item, $c_{40} \neq 0$. Então

$$\phi_4(x, v) = c_{12}xv^2 + c_{03}v^3 + c_{40}x^4 + c_{31}x^3v + c_{50}x^5 + \dots$$

Usamos o polinômio de Newton, para obter os ramos da curva de interseção perto da origem.

Sendo eles $c_{03}v^3 + c_{12}xv^2 = 0$, onde obtemos um ramo regular e $c_{12}xv^2 + c_{40}x^4 = 0$, onde obtemos a cúspide.

Para o segundo item, $c_{40} = 0$, $c_{31} \neq 0$. Temos o ramo tacnodal $v = \sigma x^2$, onde

$$c_{12}\sigma^2 + c_{31}\sigma + c_{50} = 0$$

■

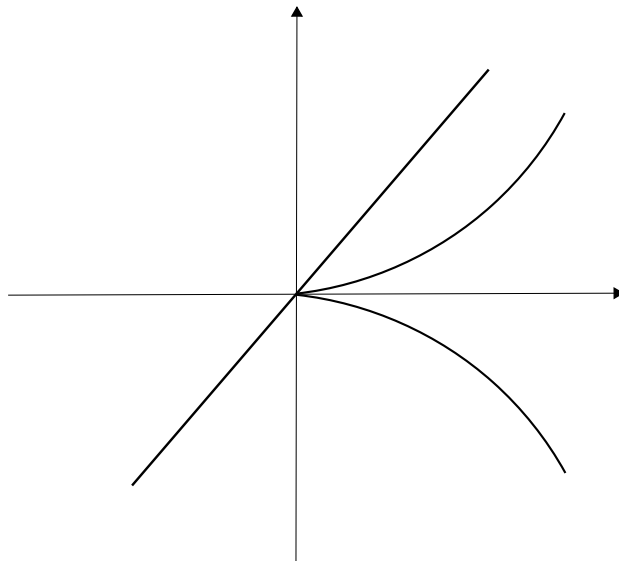


Figura 3.2: Curva de interseção entre a superfície e uma quádrlica do feixe de Moutard diferente da quádrlica de Darboux

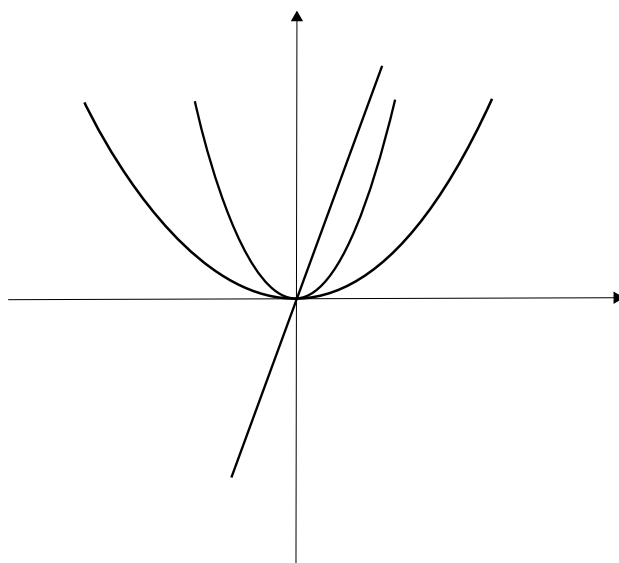


Figura 3.3: Curva de interseção entre a superfície e a quádrlica de Moutard

Proposição 3.9 *Assuma que μ não é uma direção de Darboux:*

1. *Se a quádrlica do feixe de Moutard não é a quádrlica de Moutard, então os planos osculadores das curvas de interseção coincidem com o plano tangente.*

2. No caso da quádrlica de Moutard, os planos osculadores dos ramos tacnodais σ_i , $i = 1, 2$, são

$$z = \frac{\mu}{\sigma_i}(y - \mu x) \quad (3-8)$$

Prova. Considere $r = \frac{c_{40}}{c_{12}}$. Quando $r \neq 0$, temos $(y - \mu x)^2 = r^2 x^3$. Então a curva de interseção pode ser parametrizada por

$$\gamma(t) = (t^2, \mu t^2 + rt^3, \mu t^4 + O(t^5)).$$

Então

$$\gamma'(t) = t(2, 2\mu + 3rt, 4\mu t^2).$$

$$\gamma''(t) = (2, 2\mu + 6rt, 12\mu t^2).$$

$$N = t(16\mu^2 t, -16\mu t, 6r),$$

provando o primeiro item.

No caso $r = 0$, escreva $v = \sigma_i x^2$. Então a curva interseção pode ser parametrizada por

$$\gamma(t) = (t, \mu t + \sigma_i t^2, \mu t^2 + O(t^3)).$$

Então

$$\gamma'(t) = (1, \mu + 2\sigma_i t, 2\mu t).$$

$$\gamma''(t) = (0, 2\sigma_i, 2\mu).$$

Em $t = 0$,

$$N = (\mu^2, -\mu, \sigma_i).$$

provando o lemma. ■

3.3

Curvas de interseção em uma direção de Darboux

No caso de uma direção de Darboux, vamos assumir que $\beta \neq 0$. O contato ϕ_3 se torna

$$\phi_3(x, v) = c_{03}v^3.$$

com $c_{03} = -\beta \neq 0$.

Proposição 3.10 *Assuma que μ é uma direção de Darboux.*

1. Se a quádrlica do feixe de Moutard não é a quádrlica de Moutard, a interseção da quádrlica com a superfície consiste de um ramo superlinear de ordem 3, ver [1].

2. Se a quádrlica é Moutard, a interseção da quádrlica com a superfície consiste de um ramo cuspidal e um ramo regular.

Prova. Como μ é uma direção de Darboux,

$$\phi_5(x, v) = c_{03}v^3 + c_{40}x^4 + c_{31}x^3v + c_{50}x^5 + \dots$$

com $c_{03} \neq 0$. Para o primeiro item, $c_{40} \neq 0$, e obtemos um ramo superlinear de ordem 3.

Para o segundo item, $c_{40} = 0$, $c_{31} \neq 0$, e obtemos um ramo regular e um ramo cuspidal dado por $c_{03}v^2 + c_{31}x^3 = 0$. O ramo regular é dado por $v = \sigma x^2$, onde

$$c_{31}\sigma + c_{50} = 0. \tag{3-9}$$

■

Proposição 3.11 *Assuma que μ é uma direção de Darboux.*

1. Se a quádrlica do feixe de Moutard não é a quádrlica de Moutard, então os planos osculadores das curvas de interseção coincidem com o plano tangente.
2. No caso da quádrlica de Moutard, os planos osculadores do ramo cuspidal coincidem com o plano tangente, enquanto que o plano osculador do ramo regular é dado por

$$z = \frac{\mu}{\sigma}(y - \mu x),$$

com σ dado pela equação (3-9).

Prova. No primeiro caso, a curva interseção pode ser parametrizada por

$$\gamma(t) = (t^3, t^4 + \mu t^3, t^6 \mu).$$

Dessa forma

$$\gamma'(t) = (3t^2, 4t^3 + 3\mu t^2, 6\mu t^5).$$

$$\gamma''(t) = (6t, 12t^2 + 6\mu t, 30\mu t^4).$$

$$N = t^4 (c_1 t^2, c_2 t^2, 12),$$

provando o primeiro item.

Para o segundo item, considere o ramo cuspidal. A mesma prova do primeiro item da proposição 3.9 mostra que os planos osculadores coincidem

com o plano tangente. Para o ramo regular, a mesma prova do segundo item da proposição 3.9 mostra que

$$N = (\mu^2, -\mu, \sigma).$$

é normal ao plano osculador, onde σ é dado pela equação (3-9), provando o lema. ■

3.4

Contato de seções contendo a direção $y = \mu x$ do plano tangente

Considere planos contendo a reta $z = 0, y - \mu x = 0$. Um tal plano tem equação

$$z = \lambda(y - \mu x) = \lambda v,$$

para certo $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.4.1

Projeção da seção da superfície

Considere a superfície dada pela equação (3-1).

Lema 3.12 *A projeção da seção da superfície pelo plano $z = \lambda v$ no plano (x, v) é dada por*

$$v = a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + O(6),$$

onde

$$a_2 = \frac{\mu}{\lambda}, \quad a_3 = \frac{\alpha + \beta\mu^3 + a_2}{\lambda}, \quad a_4 = \frac{a_3 + 3\beta\mu^2 a_2 + f_4(1, \mu)}{\lambda},$$

$$a_5 = \frac{a_4 + 3\beta\mu a_2^2 + 3\beta\mu^2 a_3 + a_2 \frac{d}{d\mu} f_4(1, \mu) + f_5(1, \mu)}{\lambda}.$$

Prova. Cálculos diretos. ■

3.4.2

Projeção da seção da quádrlica

Lema 3.13 *A projeção da seção de uma quádrlica no feixe de Moutard pelo plano $z = \lambda v$ no plano (x, v) é dada por*

$$v = a_2 x^2 + a_3 x^3 + b_4 x^4 + O(5), \quad (3-10)$$

onde

$$\lambda b_4 = a_3 + \frac{(\alpha + \beta\mu^3)^2}{\mu} + K\mu^2 + \frac{3\beta\mu^3}{\lambda}.$$

Além disso, $b_4 = a_4$ se e somente se a quádrlica é Moutard.

Prova. Cálculos diretos. ■

Lema 3.14 *A projeção da seção da quádrlica de Moutard pelo plano $z = \lambda v$ no plano (x, v) é dada por*

$$v = a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + b_5x^5 + O(6), \quad (3-11)$$

onde

$$\lambda b_5 = a_4 + \left(\frac{\lambda(\alpha + \beta\mu^3)}{\mu} \right) a_4 + 2a_2a_3 (q\lambda + K\lambda^2).$$

Além disso, $a_5 = b_5$ se e somente se

$$\lambda^2 c_{50} + \lambda\mu c_{31} + \mu^2 c_{12} = 0.$$

Logo existem dois planos, chamados planos sextáticos, tais que o contato seccional é de ordem superior. Os valores de λ para estes planos são $\lambda_i = \frac{1+\alpha\mu^2}{\sigma_i}$, $i = 1, 2$, e portanto os planos sextáticos coincidem com os planos osculadores dos ramos tacnodais.

Prova. Cálculos diretos. ■

3.5

Pontos flecnodais

Em um ponto flecnodal temos $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$. Temos então:

$$p = -\beta\mu^2, \quad q = 2\beta\mu, \quad K\mu^3 = \mu f_4(1, \mu) - \beta^2\mu^6.$$

As três direções de Darboux coincidem com uma direção assintótica, $\mu = 0$.

A quádrlica de Moutard se torna

$$z = xy - \beta\mu^2xz + 2\beta\mu yz + \frac{1}{\mu^2} (f_4(1, \mu) - \beta^2\mu^5) z^2.$$

Na direção de Darboux ela degenera para $z^2 = 0$.

3.6

Pontos quadráticos

Em um ponto quadrático, $\alpha = \beta = 0$. Temos então:

$$p = q = 0, \quad K\mu^2 = f_4(1, \mu).$$

As direções de Darboux não estão definidas. A quádrlica de Moutard se torna

$$z = xy + \frac{1}{\mu^2} f_4(1, \mu) z^2,$$

para $\mu \neq 0$. Para uma direção assintótica, $\mu = 0$ ou $\mu = \infty$, a quádrlica de Moutard degenera para $z^2 = 0$.

3.7

Quádrlicas de Segre-Darboux

Nesta seção, fazemos uma revisão da seção 3 de [1]. O objetivo é comentar sobre outros feixes de quádrlicas osculadoras diferentes do feixe de Moutard.

Consideramos a superfície definida por

$$z = xy + x^3 + y^3 + O(4). \quad (3-12)$$

A equação geral de uma quádrlica que possui contato de segunda ordem com a superfície na origem é dada por

$$xy - z + k_2xz + k_3yz + k_4z^2 = 0. \quad (3-13)$$

A curva de interseção C apresenta um ponto triplo na origem. As três direções tangentes a esta curva na origem satisfazem a relação

$$x^3 - k_2x^2y - k_3xy^2 + y^3 = 0. \quad (3-14)$$

Para quaisquer duas direções tangentes arbitrárias à superfície S que não sejam assintóticas, um feixe de quádrlicas é determinado. Essas quádrlicas possuem um contato de segunda ordem com S na origem e intersectam S em uma família de curvas a um parâmetro. Essas curvas compartilham as duas direções tangentes escolhidas como parte de suas três direções tangentes na origem. A tangente restante na origem é comum a todas as curvas da família.

Dadas duas soluções $\mu_i = \frac{y}{x}$, $i = 1, 2$, da equação (3-14), a terceira solução μ_3 é determinada pela relação $\mu_1\mu_2\mu_3 = -1$. Embora as soluções (μ_1, μ_2) determinem k_2 e k_3 , o valor de k_4 permanece livre. Portanto, existe uma família de quádrlicas que satisfaz essas condições.

Exemplo 3.15 *Suponha que duas das direções tangentes estejam ao longo das direções de Darboux distintas na origem. Podemos escolher $\mu_1 = -\omega$ e $\mu_2 = -\omega^2$, onde ω é uma raiz cúbica da unidade. Isso implica em $\mu_3 = -1$, o que estabelece que a terceira direção tangente deve ser a direção de Darboux residual. O feixe resultante é chamado de feixe de Darboux.*

Definição 3.16 *Chamamos de direções de Segre as direções conjugadas das direções de Darboux.*

Exemplo 3.17 *Se duas das direções tangentes coincidem com uma direção não assintótica μ , então a terceira direção deve estar na direção $-\frac{1}{\mu^2}$. As quádrlicas determinadas por essas direções formam o feixe de Moutard na*

direção μ . Quando $\mu = -1$, as tangentes do ponto triplo coincidem com uma das direções de Darboux. Quando $\mu = 1$, duas das tangentes coincidem com a direção de Segre, e a terceira direção está na direção de Darboux conjugada.

Observação 3.18 A métrica na origem é dada por $h_{11} = h_{22} = 0$ e $h_{12} = 1$. Nessa métrica, duas direções μ_1 e μ_2 são ortogonais se e somente se $\mu_1 = -\mu_2$, pois $h((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_2y_1 + x_1y_2$. Assim, $h = 0$ se e somente se $\mu_1 + \mu_2 = 0$. Concluimos que a direção de Segre (h -ortogonal à direção de Darboux) deve satisfazer $\mu^3 = 1$.

Exemplo 3.19 Se duas das tangentes estão em direções Segre distintas μ_1 e μ_2 , a terceira tangente está na direção de Darboux conjugada à direção Segre residual. Assumindo $\mu_1 = \omega$ e $\mu_2 = \omega^2$, temos $\mu_3 = -1$, que corresponde à direção de Darboux conjugada à direção Segre $\mu = 1$. Assim, cada direção de Darboux determina um conjunto diferente de quádrlicas. Cada um dos três conjuntos é denominado feixe de Darboux-Segre de quádrlicas na direção de Darboux específica considerada.

As quádrlicas de Darboux e os três feixes de quádrlicas de Darboux-Segre são casos especiais do feixe

$$xy - z - \frac{\mu^3 + 1}{\mu}xz - \frac{\mu^3 + 1}{\mu^2}yz + k_4z^2 = 0, \quad (3-15)$$

que é determinado pelas tangentes nas direções $\mu\omega$, $\mu\omega^2$ e $-\frac{1}{\mu^2}$. De fato, essas são as raízes da equação (3-14) com $k_2 = -\frac{\mu^3+1}{\mu}$ e $k_3 = -\frac{\mu^3+1}{\mu^2}$. Quando $\mu = -1$, obtemos o feixe de Darboux. Quando $\mu = 1$, obtemos o feixe de Darboux-Segre.

4

Pontos parabólicos

4.1

Forma normal em pontos parabólicos

Considere a superfície

$$z = \frac{x^2}{2} + \alpha \frac{y^2}{2} + f_3(x, y) + O(4). \quad (4-1)$$

onde

$$f_3(x, y) = \frac{ax^3}{3} + bx^2y + cxy^2 + \frac{dy^3}{3}.$$

Observe que quando $\alpha = 0$ temos um ponto parabólico. Nesta seção, mostramos como reduzir f_3 usando uma mudança projetiva de coordenadas. As técnicas utilizadas podem ser encontradas em [7].

Os seguintes campos vetoriais preservam o 2-jato de z :

$$\{V_1 = z \frac{\partial}{\partial x}, V_2 = -\alpha y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, V_3 = y\mathcal{E}\},$$

onde

$$\mathcal{E} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

A ação dos campos vetoriais na equação (4-1) é dada por

$$\dot{V}_i = -\dot{z} + x\dot{x} + \alpha y\dot{y} + (ax^2 + 2bxy + xy^2)\dot{x} + (bx^2 + 2cxy + dy^2)\dot{y},$$

Portanto a ação de V_1 no 3-jato é

$$xz + (ax^2 + 2bxy + cy^2)z = \frac{1}{2}x^3 + \frac{\alpha}{2}xy^2,$$

a ação de V_2 no 3-jato é

$$bx^3 + (2c - \alpha a)x^2y + (d - 2\alpha b)xy^2 - \alpha cy^3,$$

e a ação de V_3 no 3-jato é

$$-yz + x^2y + \alpha y^3 = \frac{1}{2}x^2y + \frac{\alpha}{2}y^3.$$

Assim, a ação de $t_1V_1 + t_2V_2 + t_3V_3$ no 3-jato de z resulta no novo 3-jato

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{3} + \frac{t_1}{2} + bt_2\right)x^3 + \left(b + (2c - \alpha a)t_2 + \frac{t_3}{2}\right)x^2y + \\ & \left(c + \frac{\alpha t_1}{2} + (d - 2\alpha b)t_2\right)xy^2 + \left(\frac{d}{3} - \alpha ct_2 + \frac{\alpha t_3}{2}\right)y^3. \end{aligned}$$

Proposição 4.1 *Assuma que $d \neq 0$. Então, pela ação de um campo vetorial da forma $t_1V_1 + t_2V_2 + t_3V_3$, podemos fazer $a = b = c = 0$.*

Prova. Se $d \neq 0$ e α é pequeno, o sistema

$$\frac{t_1}{2} + bt_2 = -\frac{a}{3}, (2c - \alpha a)t_2 + \frac{t_3}{2} = -b, \frac{\alpha t_1}{2} + (d - 2\alpha b)t_2 = -c,$$

pode ser resolvido para (t_1, t_2, t_3) . ■

Proposição 4.2 *Assuma que $d = 0$. Então, escolhendo $t_2 = 0$, $t_1 = -\frac{2a}{3}$, $t_3 = -2b$, obtemos um 3-jato com $a = b = 0$ e $d = \bar{d}\alpha$.*

É bem conhecido que, genericamente, o conjunto dos pontos parabólicos de uma superfície é uma curva suave, ver [5]. Para a maioria dos pontos desta curva, o núcleo de D^2z é transversal à curva parabólica, e esses pontos são chamados de pontos de dobra. Para alguns pontos isolados, o núcleo de D^2z é tangente à curva parabólica, e tais pontos são chamados de cúspides de Gauss [5]. Em um ponto de dobra, temos que $d \neq 0$, enquanto em um ponto de cúspide de Gauss, $d = 0$.

4.2

Feixe de Moutard

Considere uma superfície definida por

$$z = x^2 + \alpha y^2 + Axy^2 + By^3 + f_4(x, y) + f_5(x, y) + O(6), \quad (4-2)$$

onde

$$f_4(x, y) = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4,$$

$$f_5(x, y) = a_{50}x^5 + a_{41}x^4y + a_{32}x^3y^2 + a_{23}x^2y^3 + a_{14}xy^4 + a_{05}y^5.$$

Visto que o conjunto de pontos parabólicos é genericamente uma curva que divide as regiões hiperbólica e elíptica, para obter a continuidade das quádricas precisamos considerar o parâmetro α próximo de zero, negativo na região hiperbólica, positivo na região elíptica e zero na curva parabólica.

Em um ponto de dobra, podemos assumir $A = 0$. Em uma cúspide de Gauss, podemos assumir que $B = \bar{B}\alpha$.

4.2.1

Função contato de ordem 3: Feixe de Moutard e direções de Darboux

Considere uma quádrlica da forma

$$z = x^2 + \alpha y^2 + pxz + qyz + Kz^2. \quad (4-3)$$

A função de contato da superfície (4-2) e uma quádrlica da forma (4-3), até a ordem 3, é dada por

$$\phi_3(x, y) = px(x^2 + \alpha y^2) + qy(x^2 + \alpha y^2) - Axy^2 - By^3.$$

Em termos de (x, v) , $v = y - \mu x$, temos

$$\phi_3(x, v) = (px + q(v + \mu x))(x^2 + \alpha(v + \mu x)^2) - (Ax + B(v + \mu x))(v + \mu x)^2.$$

Lema 4.3 *A direção $v = 0$ é uma raiz dupla de ϕ_3 se, e somente se,*

$$p = \frac{\mu^2(A(-1 + \alpha\mu^2) - 2B\mu)}{(1 + \alpha\mu^2)^2}, \quad q = \frac{\mu(2A + B\mu(3 + \alpha\mu^2))}{(1 + \alpha\mu^2)^2}. \quad (4-4)$$

Prova. Para que $\phi_3(x, v)$ tenha $v = 0$ como uma raiz dupla, os coeficientes de x^3 e x^2v devem ser nulos. Assim, temos

$$(p + q\mu)(1 + \alpha\mu^2) = \mu^2(A + B\mu),$$

$$2\alpha\mu(p + q\mu) + (1 + \alpha\mu^2)q = 2A\mu + 3B\mu^2.$$

Resolvendo esse sistema linear 2×2 em (p, q) , completamos a prova do lema.

■

Definição 4.4 *Definimos o Feixe de Moutard da superfície (4-2) na direção $y = \mu x$ pela equação (4-3) com p e q dados pelas equações (4-4).*

Para uma quádrlica no feixe Moutard, temos que

$$\phi_3(x, v) = c_{12}xv^2 + c_{03}v^3,$$

onde

$$c_{12} = \frac{A(3\alpha\mu^2 - 1) + B(\alpha\mu^3 - 3\mu)}{(1 + \alpha\mu^2)^2}, \quad c_{03} = \frac{2\alpha\mu A + (\alpha\mu^2 - 1)B}{(1 + \alpha\mu^2)^2}.$$

Definição 4.5 *As direções de Darboux são definidas pela condição de contato de ordem 3 na direção $y = \mu x$ entre a superfície e a quádrlica de Moutard. Em nosso caso, essa condição ocorre se, e somente se,*

$$A(3\alpha\mu^2 - 1) + B(\alpha\mu^3 - 3\mu) = 0. \quad (4-5)$$

Pontos parabólicos. Observe que, em um ponto de dobra da curva parabólica, a equação (4-5) reduz-se a $\alpha\mu^3 - 3\mu = 0$. Assim, para $\alpha = 0$, esta equação tem $\mu = 0$ como uma raiz simples e $\mu = \infty$ como uma raiz dupla. Em uma cúspide de Gauss, a equação (4-5) reduz-se a $A(3\alpha\mu^2 - 1) + \bar{B}\alpha(\alpha\mu^3 - 3\mu) = 0$. Assim, para $\alpha = 0$, esta equação tem uma raiz tripla em $\mu = \infty$. Essas direções coincidem com o anulamento da forma cúbica obtida em [6].

Proposição 4.6 *Em pontos parabólicos genéricos, as direções de Darboux coincidem com as direções de anulamento da forma cúbica. Em pontos de dobra, existe uma direção de Darboux simples tangente à curva parabólica e uma direção de Darboux dupla no núcleo de D_2z . Em uma cúspide de Gauss, a direção tangente à curva parabólica é uma direção de Darboux tripla no núcleo de D_2z .*

Prova. Em um ponto de dobra, a tangente à curva parabólica é $y = 0$ e o núcleo de D^2z é $x = 0$. Em uma cúspide de Gauss, a tangente à curva parabólica é $x = 0$ e coincide com o núcleo de D^2z . ■

Proposição 4.7 *Se $B = 0$ e consideramos a direção de Darboux $\mu = \infty$, a quádrlica de Moutard tem um contato de ordem 4 com a superfície.*

Prova. Se $\alpha = 0$ e $B = 0$, obtemos $c_{03} = 0$. ■

4.2.2

Contato de ordem 4: Quádrlica de Moutard

A função de contato de uma quádrlica do feixe de Moutard com a superfície, até a ordem 4, é dada por

$$\phi_4(x, y) = (px + qy)(Axy^2 + By^3) + K(x^2 + \alpha y^2)^2 - f_4(x, y).$$

Em termos de (x, v) , escrevemos

$$\phi_4(x, v) = c_{40}x^4 + c_{31}x^3v + \dots$$

Então,

$$c_{40} = (p + q\mu)\mu^2(A + B\mu) + K(1 + \alpha\mu^2)^2 - f_4(1, \mu)$$

o que implica que

$$c_{40} = \frac{\mu^4(A + B\mu)^2}{1 + \alpha\mu^2} + K(1 + \alpha\mu^2)^2 - f_4(1, \mu).$$

Definição 4.8 *Entre as quádricas do feixe de Moutard, podemos distinguir a quádrica de Moutard, obtida para $c_{40} = 0$, ou equivalentemente*

$$K(1 + \alpha\mu^2)^3 = (1 + \alpha\mu^2)f_4(1, \mu) - \mu^4(A + B\mu)^2. \quad (4-6)$$

Para a quádrica de Moutard, temos que

$$c_{31} = \frac{2\mu^3(A + B\mu)(A(2 - \alpha\mu^2) + 3B\mu)}{(1 + \alpha\mu^2)^2} + \frac{4\alpha\mu f_4(1, \mu)}{1 + \alpha\mu^2} - \frac{d}{d\mu}f_4(1, \mu). \quad (4-7)$$

Pontos parabólicos. No caso $\alpha = 0$, obtemos

$$p = -\mu^2(A + 2B\mu), \quad q = \mu(2A + 3B\mu), \quad K = f_4(1, \mu) - \mu^4(A + B\mu)^2.$$

Assim, a quádrica de Moutard torna-se

$$z = x^2 - \mu^2(A + 2B\mu)xz + \mu(2A + 3B\mu)yz + (f_4(1, \mu) - \mu^4(A + B\mu)^2)z^2,$$

que é um cone.

Supondo que $B \neq 0$, podemos assumir que $A = 0$. Para a direção de Darboux $\mu = 0$, a quádrica de Moutard é dada por

$$z = x^2 + a_{40}z^2,$$

que é um cilindro.

Para a direção de Darboux $\mu = \infty$, a quádrica de Moutard é $z^2 = 0$. Se $B = 0$, para a direção de Darboux $\mu = \infty$, a quádrica de Moutard é novamente $z^2 = 0$.

4.2.3

Contato de ordem 5 de uma quádrica de Moutard

Para uso futuro, calcularemos o coeficiente c_{50} da função de contato $\phi_5(x, v)$ de uma quádrica de Moutard. A função de contato de ordem 5 é dada por

$$\phi_5(x, y) = (px + qy)f_4(x, y) + K(x^2 + \alpha y^2 + Axy^2 + By^3)^2 - f_5(x, y).$$

Assim, obtemos

$$c_{50} = (p + q\mu)f_4(1, \mu) + 2K(1 + \alpha\mu^2)\mu^2(A + B\mu) - f_5(1, \mu)$$

Usando os valores de p , q e K obtemos

$$c_{50} = -\frac{2\mu^6(A + B\mu)^3}{(1 + \alpha\mu^2)^2} + \frac{3\mu^2(A + B\mu)f_4(1, \mu)}{1 + \alpha\mu^2} - f_5(1, \mu). \quad (4-8)$$

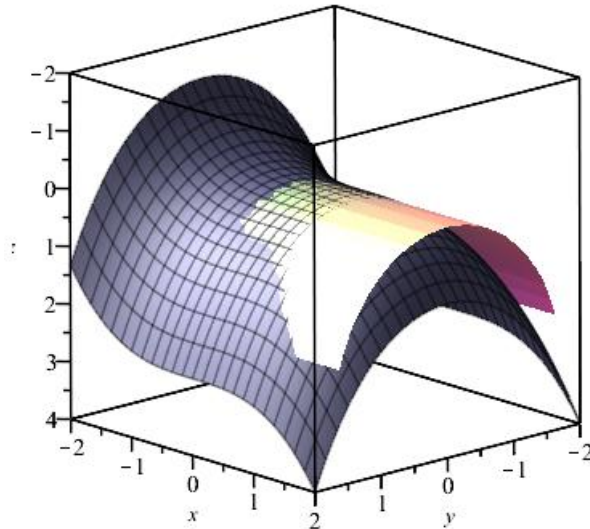


Figura 4.1: Contato entre uma superfície e uma quádrlica de Moutard em um ponto parabólico

4.3

Curvas de interseção em uma direção não-Darboux

Os resultados desta seção foram provados em uma seção anterior no caso de pontos hiperbólicos. Nesta seção, provamos que eles permanecem verdadeiros para pontos parabólicos genéricos. Os resultados dessa seção são análogos à seção 3.2 e omitiremos as provas.

Proposição 4.9 *Suponha que μ não seja uma direção de Darboux:*

1. *Se a quádrlica do feixe de Moutard não for a quádrlica de Moutard, a interseção da quádrlica com a superfície consiste de um ramo regular e um ramo cuspidal.*
2. *Se a quádrlica for de Moutard, a interseção da quádrlica com a superfície consiste de um ramo regular e um ramo tacnodal.*

Proposição 4.10 *Suponha que μ não seja uma direção de Darboux:*

1. Se a quádrlica do feixe de Moutard não for a quádrlica de Moutard, então os planos osculadores das curvas de interseção coincidem com o plano tangente.
2. No caso da quádrlica de Moutard, os planos osculadores do ramo tacnodal σ_i , $i = 1, 2$, são

$$z = \frac{1 + \alpha\mu^2}{\sigma_i}(y - \mu x) \quad (4-9)$$

4.4

Curvas de interseção em uma direção de Darboux

No caso de uma direção Darboux e $B = 0$, pela Proposição 4.7, o contato é de ordem 4 e, portanto, não consideraremos este caso nesta seção.

No caso de uma direção Darboux e $B \neq 0$, a função de contato ϕ_3 se torna

$$\phi_3(x, v) = -Bv^3.$$

Os resultados desta seção são análogos à seção 3.3, e omitiremos as provas.

Proposição 4.11 *Suponha que μ seja uma direção Darboux.*

1. Se a quádrlica do feixe de Moutard não for a quádrlica de Moutard, a interseção da quádrlica com a superfície consiste em um ramo superlinear de ordem 3.
2. Se a quádrlica for de Moutard, a interseção da quádrlica com a superfície consiste em dois ramos cuspidais e um ramo linear. O ramo linear é dado por $v = \sigma x^2$, onde

$$c_{31}\sigma + c_{50} = 0. \quad (4-10)$$

Proposição 4.12 *Suponha que μ seja uma direção Darboux:*

1. Se a quádrlica do feixe de Moutard não for a quádrlica de Moutard, então os planos osculadores das curvas de interseção coincidem com o plano tangente.
2. No caso da quádrlica de Moutard, os planos osculadores dos ramos cuspidados coincidem com o plano tangente, enquanto o plano osculador do ramo linear é dado por

$$z = \frac{1 + \alpha\mu^2}{\sigma}(y - \mu x),$$

com σ dado pela equação (4-10).

4.5

Contato de seções que contém a reta $y = \mu x$ no plano tangente

Considere planos que contém a reta $z = 0$, $y - \mu x = 0$. Cada um desses planos pode ser escrito como $z = \lambda(y - \mu x)$. Escreva $v = y - \mu x$.

4.5.1

Projeção da seção da superfície

Considere a superfície dada pela equação (4-2).

Lema 4.13 *A projeção da seção da superfície pelo plano $z = \lambda v$ no plano (x, v) é*

$$v = a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + O(6),$$

onde

$$\lambda a_2 = 1 + \alpha\mu^2, \quad \lambda a_3 = \mu^2(A + B\mu) + 2\alpha\mu a_2,$$

$$\lambda a_4 = \alpha a_2^2 + 2\alpha\mu a_3 + \mu a_2(2A + 3B\mu) + f_4(1, \mu),$$

$$\lambda a_5 = 2\alpha a_2 a_3 + 2\alpha\mu a_4 + a_3\mu(2A + 3B\mu) + Aa_2^2 + 3B\mu a_2^2 + a_2 \frac{d}{d\mu} f_4(1, \mu) + f_5(1, \mu).$$

Prova. Cálculos diretos. ■

4.5.2

Projeção da seção da quádrlica

Lema 4.14 *A projeção da seção de uma quádrlica do feixe de Moutard pelo plano $z = \lambda v$ no plano (x, v) é dada por*

$$v = a_2x^2 + a_3x^3 + b_4x^4 + O(5), \quad (4-11)$$

onde

$$\lambda b_4 = \left(2\alpha\mu + \frac{\mu^2\lambda(A + B\mu)}{1 + \alpha\mu^2} \right) a_3 + a_2^2 \left(\alpha + K\lambda^2 + \frac{\mu\lambda(2A + 3B\mu + \alpha B\mu^3)}{(1 + \alpha\mu^2)^2} \right).$$

Além disso, $b_4 = a_4$ se e somente se a quádrlica é Moutard.

Prova. Cálculos diretos. ■

Lema 4.15 *A projeção da seção da quádrlica de Moutard pelo plano $z = \lambda v$ no plano (x, v) é dada por*

$$v = a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + b_5x^5 + O(6), \quad (4-12)$$

onde

$$\lambda b_5 = \left(2\alpha\mu + \frac{\mu^2\lambda(A + B\mu)}{1 + \alpha\mu^2} \right) a_4 + 2a_2a_3 \left(\alpha + K\lambda^2 + \frac{\mu\lambda(2A + 3B\mu + \alpha B\mu^3)}{(1 + \alpha\mu^2)^2} \right).$$

Além disso, $a_5 = b_5$ se e somente se

$$\lambda^2 c_{50} + \lambda(1 + \alpha\mu^2)c_{31} + (1 + \alpha\mu^2)^2 c_{12} = 0.$$

Assim, existem dois planos, chamados de planos sextáticos, tal que o contato seccional é de ordem superior. Os valores de λ para esses planos são $\lambda_i = \frac{1+\alpha\mu^2}{\sigma_i}$, $i = 1, 2$, e assim os planos sextáticos coincidem com os planos osculadores dos ramos tacnodais.

Prova. Cálculos diretos. ■

5

Hiperquádricas de Moutard

Considere a hipersuperfície definida por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \sum H_{\sigma\tau} x_\sigma x_\tau + \frac{1}{3} \sum K_{\sigma\tau\rho} x_\sigma x_\tau x_\rho + \frac{1}{12} \sum H_{\sigma\tau\rho\mu} x_\sigma x_\tau x_\rho x_\mu + O(5), \quad (5-1)$$

onde $1 \leq \sigma, \tau, \rho, \mu \leq n$ e os coeficientes são invariantes por permutações de índices, ver [8].

5.1

Caso $n = 3$

5.1.1

Contato seccional e hiperquádrica de Moutard

Definição 5.1 *A hiperquádrica de Moutard é definida de forma que suas seções planares sejam cônicas osculadoras das seções da superfície no ponto em questão.*

Um plano arbitrário que contenha o eixo x_1 , ou seja a reta $x_4 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, pode ser escrito como

$$x_2 = \lambda_2 x_4, \quad x_3 = \lambda_3 x_4. \quad (5-2)$$

Lema 5.2 *A projeção da seção da hipersuperfície (5-1) pelo 2-plano (5-2) no plano (x_1, x_4) é dada por*

$$x_4 = a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + a_4 x_1^4 + O(5), \quad (5-3)$$

onde

$$a_2 = \frac{1}{2} H_{11}, \quad a_3 = \frac{1}{3} K_{111} + \frac{1}{2} H_{11} H_{12} \lambda_2 + \frac{1}{2} H_{11} H_{13} \lambda_3, \quad (5-4)$$

e

$$\begin{aligned} a_4 = & \frac{1}{12} H_{1111} + \left(\frac{H_{12}}{3} K_{111} + \frac{H_{11}}{2} K_{112} \right) \lambda_2 \\ & + \left(\frac{H_{13}}{3} K_{111} + \frac{H_{11}}{2} K_{113} \right) \lambda_3 + \left(\frac{H_{22}}{8} H_{22}^2 + \frac{H_{11}}{2} H_{12}^2 \right) \lambda_2^2 \\ & + \left(\frac{H_{33}}{8} H_{11}^2 + \frac{H_{11}}{2} H_{13}^2 \right) \lambda_3^2 + \left(\frac{H_{23}}{4} H_{11}^2 + H_{11} H_{12} H_{13} \right) \lambda_2 \lambda_3. \end{aligned}$$

Pelo lema 2.4, a cônica osculadora à (5-3) na origem, é dada por

$$x_4 = a_2 x_1^2 + \frac{a_3}{a_2} x_4 x_1 + \left(\frac{a_2 a_4 - a_3^2}{a_2^3} \right) x_4^2. \quad (5-5)$$

Substituindo λ_1 e λ_2 na cônica osculadora (5-5), obtemos a hiperquádrica de Moutard

$$\begin{aligned} x_4 = & \frac{H_{11}}{2} x_1^2 + \frac{H_{22}}{2} x_2^2 + \frac{H_{33}}{2} x_3^2 + H_{12} x_1 x_2 + H_{13} x_1 x_3 + H_{23} x_2 x_3 + \frac{2K_{111}}{3H_{11}} x_1 x_4 + \\ & + \left(\frac{2K_{112}}{H_{11}} - \frac{4H_{12}K_{111}}{3H_{11}^2} \right) x_2 x_4 + \left(\frac{2K_{113}}{H_{11}} - \frac{4H_{13}K_{111}}{3H_{11}^2} \right) x_3 x_4 + \left(\frac{H_{1111}}{3H_{11}^2} - \frac{8K_{111}^2}{9H_{11}^3} \right) x_4^2. \end{aligned}$$

5.1.2

Interseção entre a hipersuperfície e a hiperquádrica de Moutard

Seja $g = 0$ a equação da quádrlica de Moutard,

$$\begin{aligned} g = & -x_4 + \frac{H_{11}}{2} x_1^2 + \frac{H_{22}}{2} x_2^2 + \frac{H_{33}}{2} x_3^2 + H_{12} x_1 x_2 + H_{13} x_1 x_3 + H_{23} x_2 x_3 + \frac{2K_{111}}{3H_{11}} x_1 x_4 + \\ & + \left(\frac{2K_{112}}{H_{11}} - \frac{4H_{12}K_{111}}{3H_{11}^2} \right) x_2 x_4 + \left(\frac{2K_{113}}{H_{11}} - \frac{4H_{13}K_{111}}{3H_{11}^2} \right) x_3 x_4 + \left(\frac{H_{1111}}{3H_{11}^2} - \frac{8K_{111}^2}{9H_{11}^3} \right) x_4^2. \end{aligned}$$

A função contato ϕ é definida como $g(x_1, x_2, x_3, x_4(x_1, x_2, x_3))$, onde $x_4(x_1, x_2, x_3)$ é dado pela equação (5-1). Denotamos a expansão de Taylor de ϕ até ordem 3 por ϕ_3 . Os coeficientes de x_1^3 de ϕ_3 são

$$b_{111} = -\frac{1}{3}K_{111} + \frac{2K_{111}}{3H_{11}} \frac{H_{11}}{2} = 0.$$

Similarmente,

$$b_{112} = -K_{112} + \frac{2K_{111}}{3H_{11}} H_{12} + \left(\frac{2K_{112}}{H_{11}} - \frac{4H_{12}K_{111}}{3H_{11}^2} \right) \frac{H_{11}}{2} = 0,$$

$$b_{113} = -K_{113} + \frac{2K_{111}}{3H_{11}} H_{13} + \left(\frac{2K_{113}}{H_{11}} - \frac{4H_{13}K_{111}}{3H_{11}^2} \right) \frac{H_{11}}{2} = 0.$$

Finalmente,

$$b_{1111} = -\frac{1}{12}H_{1111} + \frac{2K_{111}}{3H_{11}} \frac{K_{111}}{3} + \left(\frac{H_{1111}}{3H_{11}^2} - \frac{8K_{111}^2}{9H_{11}^3} \right) \frac{H_{11}^2}{4} = 0.$$

Podemos calcular também os coeficientes da função contato b_{122} , b_{123} e b_{133} . Para simplificar, podemos assumir, em $x_1 = x_2 = x_3 = 0$,

$$H_{12} = H_{13} = H_{23} = 0, H_{11} = \epsilon_1, H_{22} = \epsilon_2, H_{33} = \epsilon_3, \quad (5-6)$$

onde $\epsilon_i = \pm 1$. Temos que

$$b_{122} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{3} K_{111} - K_{122}, b_{133} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_3}{3} K_{111} - K_{133}, b_{123} = -2K_{123}. \quad (5-7)$$

5.1.3

Propriedade seccional

Seja $x_3 = \lambda_3 x_4$ um hiperplano fixo P_{λ_3} que contém a reta $x_2 = x_3 = x_4 = 0$. A quádrica de Moutard da interseção de P_{λ_3} com a superfície original coincide com a interseção da hiperquádrica de Moutard com P_{λ_3} .

Para um λ_3 fixo, denote por P_{λ_3} o hiperplano $x_3 = \lambda_3 x_4$ contendo a reta $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ e denote por S_{λ_3} a interseção de P_{λ_3} com a hipersuperfície original S.

Proposição 5.3 *A quádrica de Moutard de S_{λ_3} na direção $x_2 = x_4 = 0$ coincide com a interseção da hiperquádrica de Moutard de S na direção $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ com P_{λ_3} .*

Prova. A interseção de seção $x_2 = \lambda_2 x_4$ contendo a reta $x_2 = x_4 = 0$ com a quádrica de Moutard de S_{λ_3} tem um contato de quarta ordem com a seção correspondente de S_{λ_3} . Da mesma forma, a interseção de seção $x_2 = \lambda_2 x_4, x_3 = \lambda_3 x_4$ contendo a reta $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ com a hiperquádrica de Moutard de S tem um contato de quarta ordem com a seção correspondente de S. Assim, ambas as cônicas coincidem e a proposição está provada. ■

5.1.4

Forma cúbica

Nessa subseção calculamos a forma cúbica na origem assumindo que, em $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, as condições (5-6) valem.

Lema 5.4 *A forma cúbica é dada por $C_{\sigma\tau\rho} x_\sigma x_\tau x_\rho$, onde*

$$C_{\sigma\sigma\sigma} = \frac{4\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3}{5} K_{\sigma\sigma\sigma} - \frac{6}{5} (\epsilon_\rho K_{\sigma\tau\tau} + \epsilon_\tau K_{\sigma\rho\rho}), \quad \sigma \neq \tau \neq \rho, \quad (5-8)$$

$$C_{\sigma\sigma\tau} = \frac{8\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3}{5} K_{\sigma\sigma\tau} - \frac{2}{5} (\epsilon_\rho K_{\tau\tau\tau} + \epsilon_\tau K_{\tau\rho\rho}), \quad \sigma \neq \tau \neq \rho, \quad (5-9)$$

$$C_{123} = 2\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 K_{123}. \quad (5-10)$$

Observe a condição de apolaridade

$$\epsilon_2 \epsilon_3 C_{i11} + \epsilon_1 \epsilon_3 C_{i22} + \epsilon_1 \epsilon_2 C_{i33} = 0, \quad (5-11)$$

vale para $i = 1, 2, 3$.

Prova. Considere $\xi_0 = (0, 0, 0, 1)$. Seguindo a referência [4], o vetor normal afim de Blaschke de

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3, x_4(x_1, x_2, x_3))$$

é dado por

$$\xi = \phi\xi_0 + Z_1f_{x_1} + Z_2f_{x_2} + Z_3f_{x_3},$$

onde $\phi^5 = \det(D^2x_4)$ e Z_i é dado por

$$[D^2x_4] \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \phi_{x_1} \\ \phi_{x_2} \\ \phi_{x_3} \end{bmatrix}.$$

Portanto, na origem,

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 Z_1 \\ \epsilon_2 Z_2 \\ \epsilon_3 Z_3 \end{bmatrix} = -\frac{2}{5} \begin{bmatrix} \epsilon_2\epsilon_3 K_{111} + \epsilon_1\epsilon_3 K_{122} + \epsilon_1\epsilon_2 K_{133} \\ \epsilon_2\epsilon_3 K_{112} + \epsilon_1\epsilon_3 K_{222} + \epsilon_1\epsilon_2 K_{233} \\ \epsilon_2\epsilon_3 K_{113} + \epsilon_1\epsilon_3 K_{223} + \epsilon_1\epsilon_2 K_{333} \end{bmatrix}.$$

Além disso, a métrica afim de Blaschke é dada por

$$h_{ij} = \frac{1}{\phi} \cdot \frac{\partial^2 x_4}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Na origem $h_{11} = \epsilon_2\epsilon_3$. A conexão induzida é dada por

$$\nabla_{X_i} X_j = -\frac{1}{\phi} \cdot \frac{\partial^2 x_4}{\partial x_i \partial x_j} (Z_1 X_1 + Z_2 X_2 + Z_3 X_3),$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Portanto, na origem

$$\nabla_{X_1} X_1 = -\epsilon_2\epsilon_3(Z_1 X_1 + Z_2 X_2 + Z_3 X_3), \nabla_{X_i} X_j = 0.$$

$$\begin{aligned} C_{111} &= \frac{\partial h_{11}}{\partial x_1} - 2h(\nabla_{X_1} X_1, X_1) = -\epsilon_1\phi_{x_1} + 2\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 K_{111} + 2Z_1 \\ &= -\frac{6\epsilon_1}{5}(\epsilon_2\epsilon_3 K_{111} + \epsilon_1\epsilon_3 K_{122} + \epsilon_1\epsilon_2 K_{133}) + 2\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 K_{111} \\ &= 4\frac{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}{5} K_{111} - \frac{6}{5}(\epsilon_3 K_{122} + \epsilon_2 K_{133}), \end{aligned}$$

que prova a fórmula (5-8). Mais ainda, na origem

$$C_{122} = \frac{\partial h_{11}}{\partial x_2} - 2h(\nabla_{X_2} X_1, X_1) = -\epsilon_1\phi_{x_2} + 2\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 K_{112}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{2\epsilon_1}{5}(\epsilon_2\epsilon_3K_{112} + \epsilon_1\epsilon_3K_{222} + \epsilon_1\epsilon_2K_{233}) + 2\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3K_{112} \\ &= \frac{8\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}{5}K_{112} - \frac{2}{5}(\epsilon_3K_{222} + \epsilon_2K_{233}), \end{aligned}$$

que prova a fórmula (5-9). Finalmente, na origem

$$C_{123} = \frac{\partial h_{12}}{\partial x_3} - h(\nabla_{X_3}X_1, X_2) - h(\nabla_{X_3}X_2, X_1) = 2\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3K_{123},$$

que prova a fórmula (5-10). ■

Proposição 5.5 *A função contato é a função cúbica de (x_2, x_3) se e somente se $C_{1\sigma\tau} = 0$, para $2 \leq \sigma, \tau \leq 3$.*

Prova. É fácil ver que o coeficiente $b_{123} = -2K_{123}$ é nulo se, e somente se $C_{123} = 2\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3K_{123}$ for nulo.

Da mesma forma, temos que

$$b_{122} = \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{3}K_{111} - K_{122} = 0 \text{ e}$$

$$b_{133} = \frac{\epsilon_1\epsilon_3}{3}K_{111} - K_{133} = 0,$$

se, e somente se

$$C_{122} = \frac{8\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}{5}K_{122} - \frac{2}{5}(\epsilon_3K_{111} + \epsilon_1K_{133}) = 0 \text{ e}$$

$$C_{133} = \frac{8\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}{5}K_{133} - \frac{2}{5}(\epsilon_2K_{111} + \epsilon_1K_{122}) = 0.$$

■

Observação 5.6 *No caso das superfícies, é bem conhecido que as direções de Darboux coincidem com as direções de anulamento da forma cúbica. Assim, $x_2 = 0$ é uma direção de Darboux se, e somente se, $C_{111} = 0$. A Proposição 5.5 pode ser vista como uma generalização dessa propriedade. Na verdade, assumindo que (5-6) seja válida, $C_{111} = 0$ é equivalente por apolaridade a $C_{122} = 0$.*

5.2

Caso geral

Nesta seção, generalizamos os resultados obtidos anteriormente neste capítulo para dimensões arbitrárias. Utilizaremos a notação de [8]. Considere a hipersuperfície definida por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \sum H_{\sigma\tau} x_\sigma x_\tau + \frac{1}{3} \sum K_{\sigma\tau\rho} x_\sigma x_\tau x_\rho + \frac{1}{12} \sum H_{\sigma\tau\rho\mu} x_\sigma x_\tau x_\rho x_\mu + O(5). \quad (5-12)$$

Novamente, os coeficientes são invariantes por permutações de índices.

Analogamente ao caso de dimensão 4, pode-se verificar que a hiperquádrica de Moutard na direção $x_2 = \dots = x_n = x_{n+1} = 0$ é dada por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\tau=1}^n H_{\sigma\tau} x_\sigma x_\tau + \frac{2K_{111}}{3H_{11}} x_1 x_{n+1} + \sum_{\rho=2}^n \left(\frac{2K_{11\rho}}{H_{11}} - \frac{4H_{1\rho}K_{111}}{3H_{11}^2} \right) x_\rho x_{n+1} \\ + \left(\frac{H_{1111}}{3H_{11}^2} - \frac{8K_{111}^2}{9H_{11}^3} \right) x_{n+1}^2.$$

Para um $\bar{\lambda} = (\lambda_{k_0}, \dots, \lambda_n)$ fixo, denotamos por $P_{\bar{\lambda}}$ o $(n - k_0)$ -plano $x_k = \lambda_k x_{n+1}$, $k = k_0, \dots, n$, que contém a reta $x_2 = \dots = x_{n+1} = 0$ e denotamos por $S_{\bar{\lambda}}$ a interseção de $P_{\bar{\lambda}}$ com a hipersuperfície original S .

A prova da seguinte proposição é similar à prova da Proposição 5.3:

Proposição 5.7 *A quádrica de Moutard de $S_{\bar{\lambda}}$ na direção $x_2 = \dots = x_{n+1} = 0$ coincide com a interseção da hiperquádrica de Moutard de S na direção $x_2 = \dots = x_{n+1} = 0$ com $P_{\bar{\lambda}}$.*

A prova da seguinte proposição é semelhante à prova da Proposição 5.5:

Proposição 5.8 *A função de contato é uma função cúbica de (x_2, \dots, x_n) se, e somente se, $C_{1\sigma\tau} = 0$, para $2 \leq \sigma, \tau \leq n$.*

Referências bibliográficas

- [1] L.GREEN. **Systems of quadrics associated with a point of a surface.** American Journal of Mathematics, 60(3):649–666, 1938.
- [2] BUCHIN-SU. **Affine Differential Geometry.** Gordon and Breach, New York, 1st edition, 1983.
- [3] CAMBRAIA, ADY; CRAIZER, M. . **Envelope of mid-planes of a surface and some classical notions of affine differential geometry.** Results in Mathematics, 72(4):1865–1880, 2017.
- [4] K. NOMIZU; T. SASAKI. **Affine Differential Geometry.** Cambridge University Press, New York, 1st edition, 1994.
- [5] S. IZUMIYA; M.C.R. FUSTER; M. A. S. RUAS; F. TARI. **Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint.** World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1st edition, 2015.
- [6] M. CRAIZER; R. GARCIA . **Quadratic points of surfaces in projective 3-space.** Quarterly Journal of Mathematics, 70(3):1105–1134, 2019.
- [7] V.OVSIENKO; S.TABACHNIKOV . **Hyperbolic Carathéodory Conjecture.** Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 258:178–193, 2007.
- [8] BUCHIN-SU . **Moutard-Cech hyperquadrics associated with a point of a hypersurface.** Annals of Math, 44(1):7–20, 1943.
- [9] J. W. BRUCE; P.J. GIBLIN. **Curves and singularities.** Cambridge University Press, New York, 1st edition, 1984.