



**Paulo Soares Alves Cunha**

**Modelos de otimização estocástica para o controle de  
reposição e estoques em sistemas de duas camadas sob  
incerteza**

**TESE DE DOUTORADO**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Fabrício Oliveira

Co-orientadora: Prof. Fernanda Maria Pereira Raupp

Rio de Janeiro

junho de 2017



**Paulo Soares Alves Cunha**

**Modelos de otimização estocástica para o controle de  
reposição e estoques em sistemas de duas camadas sob  
incerteza**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Adriana Leiras**

Presidente

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

**Prof. Fabricio Oliveira**

Orientador

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

**Prof. Fernanda Maria Pereira Raupp**

Co-orientadora

Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC

**Prof. Leonardo Junqueira Lustosa**

Consultor Autônomo

**Prof. Eduardo Uchoa Barboza**

Universidade Federal Fluminense - UFF

**Prof. Rafael Martinelli Pinto**

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

**Prof. Márcio da Silveira Carvalho**

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 02 de junho de 2017

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

## Paulo Soares Alves Cunha

Graduou-se em Engenharia Civil pela PUC-Rio, em 1986. Obteve o título de Mestre em Engenharia de Produção pela PUC-Rio, em 1991. É Professor do Departamento de Engenharia Industrial da PUC-Rio desde 2004.

### Ficha Catalográfica

Cunha, Paulo Soares Alves

Modelos de otimização estocástica para o controle de reposição e estoques em sistemas de duas camadas sob incerteza / Paulo Soares Alves Cunha ; orientador: Fabrício Oliveira; co-orientadora: Fernanda Maria Pereira Raupp. – 2017.

131 f. : il. color. ; 30 cm

Tese (doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Industrial, 2017.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Industrial – Teses. 2. Gestão de estoques. 3. Política de reposição e controle de estoques. 4. Demanda incerta. 5. Programação estocástica. 6. Rede logística de duas camadas. I. Oliveira, Fabrício. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Industrial. III. Título.

CDD: 658.5

Essa dissertação é dedicada aos meus pais.

## Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, aos meus orientadores, professora Fernanda Raupp e professor Fabrício de Oliveira, por todo apoio, pelas revisões, pelo tempo que investiram em nossas discussões e principalmente pela confiança depositada na minha capacidade.

Agradeço a PUC-Rio pela bolsa de isenção de pagamento oferecida e a FAPERJ (Fundação de Amparo a Pesquisa do Rio de Janeiro) pelo suporte financeiro oferecido sob o número da concessão E26/200.254/2015.

Agradeço à minha família, meus filhos e minha esposa, que sempre me apoiaram nas minhas decisões de carreira, em especial nesse momento de transição para a área acadêmica.

## Resumo

Cunha, Paulo Soares Alves; Oliveira, Fabrício (Orientador); Raupp, Fernanda Maria Pereira (Co-orientadora). **Modelos de otimização estocástica para o controle de reposição e estoques em sistemas de duas camadas sob incerteza**. Rio de Janeiro, 2017. 131p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Apesar de existir na literatura modelos propostos para gestão de estoques, as premissas consideradas por tais modelos podem inviabilizar suas aplicações. Este trabalho propõe uma metodologia de programação estocástica para reposição e controle de estoques de produto único numa rede logística de duas camadas. O enfoque revisão periódica proposto pode considerar tanto atendimentos à demanda em atraso (*backorders*) como vendas perdidas (*lost sales*) sem restrição de pedidos pendentes. Além disso, a fim de alcançar um melhor nível de serviço para o cliente, é introduzida uma regra de rateio proporcional a quantidade faltante do item em estoque no centro de distribuição para atender simultaneamente a demanda de todos os varejistas, a qual é capaz de lidar com as alocações negativas da falta. A periodicidade e o nível alvo da posição dos estoques são determinados através de modelos de programação estocástica de dois estágios e de uma técnica baseada em simulação de Monte Carlo, conhecida como *Sample Average Approximation*, que levam em conta a natureza incerta dos níveis de demanda pelo item por meio da geração de conjuntos finitos de cenários. Os equivalentes determinísticos são apresentados como modelos de programação não-linear inteira mista e em seguida linearizados. Experimentos numéricos com a metodologia proposta para instâncias do problema geradas aleatoriamente demonstram seu potencial ao obter resultados com erros de aproximadamente 1%.

## Palavras-chave

Gestão de estoques; Política de reposição e controle de estoques; Demanda incerta; Programação estocástica; Rede logística de duas camadas.

## Abstract

Cunha, Paulo Soares Alves; Oliveira, Fabrício (Advisor); Raupp, Fernanda Maria Pereira (Co-advisor). **A two-stage stochastic programming model for a two-echelon replenishment and control system under demand uncertainty.** Rio de Janeiro, 2017. 131p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Although several methods for inventory management are proposed in the literature, the required assumptions can hinder their application in practice. This work proposes a methodology for stock replenishment in two-echelon logistic networks through stochastic programming, considering a single item, periodic review and uncertain demands. The proposed approach is flexible enough to consider backlogs and lost sales cases without limitations on the number of outstanding orders. Also, in order to achieve better customer service, we introduce a variable rationing rule for quantities of the item in short at the distribution center to meet simultaneously all the demands of the retailers, dealing with imbalances or negative allocations of quantities of the item in short. The optimal review periodicity and the target level for inventory position are determined through two-stage stochastic programming models and a Monte Carlo simulation based-technique, known as Sample Average Approximation, which takes into account the uncertain nature of the item demand levels through the generation of finite sets of scenarios. The deterministic equivalent models are presented as mixed-integer non-linear programming models, which are then linearized. Numerical experiments with the proposed approach for instances of the problem randomly generated shows its potential, as the errors of the obtained results are around 1%.

## Keywords

Inventory management; Replenishment and control policy; Uncertain demand; Stochastic programming; Two-echelon logistics network.

## Sumário

1	Introdução	14
1.1.	Objetivo	23
1.2.	Contribuições	24
1.3.	Metodologia	25
1.4.	Organização do texto	27
2	Revisão Bibliográfica	28
2.1.	Abordagens por estoques de segurança	29
2.2.	Gestão de estoques em sistemas de uma camada	30
2.2.1.	Método de Hadley e Whitin (HW)	36
2.3.	Gestão de estoques em sistemas multicamadas	39
2.3.1.	Modelos para sistemas de duas camadas e regras de rateio	42
2.3.2.	Método de Axsäter (AX)	44
2.4.	Uso da programação estocástica em controle de reposição e estoque	48
2.5.	Aproximação por média amostral (SAA)	50
3	Modelagem do problema para sistema de uma camada	55
3.1.	Modelo proposto para sistema de uma camada (PE): Modelo $PE - B_2$	55
3.1.1.	Vendas perdidas	56
3.1.2.	Considerando <i>backorder</i>	62
3.2.	Modelo proposto para sistema de uma camada: Modelo $PE - P_2$	63
4	Modelagem do problema considerando um sistema de duas camadas	65
4.1.	Modelo proposto para um sistema de duas camadas em série - $B_3$	66
4.1.1.	Modelo proposto para um sistema de duas camadas em série restrito (SR): Modelo $SR - B_3$	66
4.1.2.	Modelo proposto para um sistema de duas camadas em série geral (SG): Modelo $SG - B_3$	70

4.1.3. Modelo proposto para um sistema de duas camadas em série geral linear (SL): Modelo $SL - B_3$	78
4.2. Modelo proposto para sistema de duas camadas arborescente - $B_3$	81
4.2.1. Rateio das faltas fixo (AF): Modelo $AF-B_3$	82
4.2.2. Rateio das faltas variável (AV): modelo $AV - B_3$	91
4.3. Modelo proposto para sistema de duas camadas arborescente – $P_2$	94
5 Experimentos numéricos preliminares	95
5.1. Sistema de uma camada e estacionariedade: Modelo $PE - B_2$	95
5.2. Sistema de uma camada e não estacionariedade: Modelo $PE - B_2$	107
5.3. Sistemas de duas camadas em série: Modelos $SR - B_3$ e $SG - B_3$	109
5.3.1. Ganho computacional do modelo $SL - B_3$	111
5.4. Sistemas de duas camadas arborescentes	113
5.4.1. Experimento numérico considerando o modelo $AF - B_3$	113
5.4.2. Comparativo dos modelos $AF - P_2$ e $AV - P_2$	115
5.4.3. Comparativo dos modelos $AF - B_3$ e $AV - B_3$	118
6 Conclusão	121
7 Referências bibliográficas	124

## Lista de figuras

Figura 1 – Esquema da dinâmica de execução de pedidos	19
Figura 2 – Esquema da dinâmica de execução de pedidos	22
Figura 3 – Tipos de sistemas	39
Figura 4 – Fluxo de materiais entre 2 e 1	44
Figura 5 - Erro percentual absoluto médio dos custos totais mínimos	104
Figura 6 - Erro percentual absoluto médio do S	105

## Lista de tabelas

Tabela 1 – Visão geral dos modelos de estoque com revisão periódica e vendas perdidas	35
Tabela 2 – Dados do modelo equivalente determinístico $PE - B_2$	96
Tabela 3 –resumo dos resultados obtidos por PE	97
Tabela 4 – Custo mínimo total obtido por HW, PE e a análise de sensibilidade baseada em simulação	98
Tabela 5 - Dados das variantes do modelo equivalente determinístico $PE - B_2$	99
Tabela 6 – Solução ótima aproximada obtida por HW ( $HW$ ), limite inferior obtido por PE ( $LI$ ) e EPA	101
Tabela 7 – Resultados dos Níveis alvos obtidos por HW ( $S^*(HW)$ ), PE ( $S^*(PE)$ ) e EPA	102
Tabela 8 – Resultado do período de revisão obtidos por HW ( $R^*(HW)$ ) e por PE ( $R^*(PE)$ )	102
Tabela 9 – Dados do modelo equivalente determinístico $PE - B_2$	107
Tabela 10 –limites superior e inferior usando PE	108
Tabela 11 – Custos totais para distintos valores de R e S	109
Tabela 12 - Dados do modelo equivalente determinístico $SR - B_3$ e $SG - B_3$	110
Tabela 13 - Resultados obtidos por $SR - B_3$ e $SG - B_3$ e AX	111
Tabela 14 - Dados do modelo equivalente determinístico $SG - B_3$ e $SL - B_3$	112
Tabela 15 - CM, $S_0$ , $S_1$ e $R_0$ para cada valor $C_{F_0}^p$ no CD	112
Tabela 16 - Dados do modelo equivalente determinístico $AF - B_3$	114
Tabela 17 - Resultados com o modelo $AF - B_3$	114
Tabela 18 - Dados do modelo equivalente determinístico $AF - P_2$ e $AV - P_2$	116
Tabela 19 - Resultados comparativos para instância I1	117
Tabela 20 - Resultados comparativos para instância I2	117
Tabela 21 - Resultados numéricos comparativos para instância I3	117

Tabela 22 - Resultados numéricos comparativos para instância I4	117
Tabela 23 - Resultados comparativos para instância I5	119
Tabela 24 - Resultados comparativos para instância I6	119
Tabela 25 - Resultados comparativos para instância I7	120
Tabela 26 - Resultados comparativos para instância I8	120

## Lista de Siglas

HW – Modelo proposto por Hadley-Whitin

AX – Modelo proposto por Axsäter

PE - Modelo proposto usando Programação Estocástica para sistemas de uma camada

SR - Modelo proposto usando Programação Estocástica para sistemas de duas camadas em série restrito (caso restrito)

SG - Modelo proposto usando Programação Estocástica para sistemas de duas camadas em série geral (caso geral)

SL - Modelo proposto usando Programação Estocástica para sistemas de duas camadas em série linear (caso geral)

AF - Modelo proposto usando Programação Estocástica para sistemas de duas camadas arborescentes e rateio fixo

AV - Modelo proposto usando Programação Estocástica para sistemas de duas camadas arborescentes e rateio variável

# 1 Introdução

Esquemáticamente, uma cadeia de suprimentos (CS) ou rede logística consiste em instalações, fluxos de materiais e de informações. As instalações são caracterizadas por fornecedores, centros de manufatura, armazéns, centros de distribuição (CDs) ou pontos de varejo, enquanto que o fluxo de materiais corresponde a matérias-primas, produtos em processo e produtos acabados que percorrem essas instalações (Simchi-Levi et al., 2004). O desempenho ótimo de uma CS requer a execução de um conjunto de ações precisas, envolvendo todos os seus membros, mas que não necessariamente são benéficas para todos os membros isoladamente. Se, por outro lado, cada instalação buscar seu desempenho ótimo, então o resultado pode não ser ótimo para a CS como um todo. O melhor desempenho de uma CS é obtido se suas instalações coordenarem a contratação de um conjunto de regras de troca (transferências de itens, pagamentos e informação), de forma que o objetivo de cada membro esteja alinhado com os objetivos da CS (Cachon, 2003).

A gestão de estoques em CSs permeia a tomada de decisão em distintas empresas, sendo este um tema bastante explorado no meio acadêmico e empresarial (Lambert, 2004). As perguntas-chave que a gestão de estoques se propõe a responder são: quando pedir, quanto pedir e quanto manter em estoques de segurança no caso de incertezas como demanda probabilística (Namit e Chen, 1999; Silva, 2009). Devido às interações entre os componentes da cadeia, a manutenção de estoques de segurança numa CS leva ainda a outras questões, como por exemplo, quanto de estoque manter em cada instalação (Axsäter, 2006). De acordo com Wanke (2011), a gestão de estoques abrange, portanto, um conjunto de decisões com o intuito de coordenar, no tempo e no espaço, a demanda existente com a oferta de produtos e insumos, de modo que sejam atingidos os objetivos especificados de custo e de nível de serviço.

Políticas de controle de estoque estabelecem regras e ações para responder às perguntas-chave. Podem gerenciar estoques de segurança de diferentes

maneiras. Numa delas, por exemplo, a decisão sobre o ressuprimento em cada instalação de uma CS é baseada diretamente na posição do estoque (estoque em mão mais as encomendas pendentes menos *backorder*). Em outra política, o ressuprimento pode estar baseado no estoque de camada de cada instalação (soma da posição do estoque da instalação e de todas as posições do estoque das instalações a jusante). No entanto, pode-se observar que cada política tem como objetivo determinar o melhor nível de investimento em estoques para atingir o nível de serviço desejado, ou seja, proporcionar uma dada medida de atendimento à demanda.

Alguns tipos de políticas são mais frequentes, conforme segue. Estoques podem ser revistos (i.e., inventariados) continuamente ou periodicamente em intervalos regulares de tamanho  $R$  (Silver et al., 1998). A quantidade encomendada pode ser fixa (uma quantidade  $Q$ ) ou variável (quando a quantidade a ser encomendada é tal que a posição de estoque após a encomenda atinja um nível alvo  $S$ ). Quando não se considera o custo de encomendar, as encomendas são feitas em cada ocasião de revisão. No entanto, quando é considerado, tal custo influencia a decisão de se colocar ou não uma encomenda. A literatura contém várias propostas de políticas de controle de estoque que orientam a decisão em termos de colocação de encomendas para a gestão de estoques, muitas vezes referidas como sistemas de controle de estoque. No caso de demanda probabilística, os sistemas de controle de estoque mais comuns são: sistemas de revisão contínua  $(s, Q)$  e  $(s, S)$  e, sistemas de revisão periódica  $(R, S)$  e  $(R, s, S)$ , onde  $s$  indica o ponto de pedido (Hadley e Whitin, 1963; Silver et al, 1998; Zipkin, 2000).

Políticas de reposição e estoques com revisão periódica são amplamente utilizadas por exigir menos esforço transacional, ter maior facilidade de planejamento para o cálculo de necessidade de carga de trabalho, facilitar atendimento de clientes e recebimento dos fornecedores, permitir melhor coordenação das reposições, principalmente quando envolve vários itens, bem como gerar mais estabilidade para o sistema. Além disso, quando se lida com demanda estacionária numa organização com um único item, a revisão periódica retorna os melhores resultados, e, no caso de um sistema multicamadas, essa política tem a vantagem de ser implementada com mais facilidade (Federgruen e Zipkin, 1984).

De acordo com Axsäter (2006), sistemas de distribuição de CSs são, em geral, divergentes, já que o número de instalações paralelas cresce com o aumento do fluxo dos materiais. Num sistema de distribuição pura, ou arborescente, cada instalação tem no máximo um predecessor imediato. Um caso especial, em que cada instalação tem também no máximo um sucessor imediato, é chamado de sistema em série. Os modelos de gestão de políticas de estoque encontrados na literatura em geral consideram uma CS de duas camadas com informações centralizadas, ou seja, todas as informações sobre níveis de demanda e de estoques nos varejistas são compartilhadas com o centro de distribuição (CD).

Idealmente, um modelo de política de controle de estoques deve ser capaz de considerar a maioria das características da sua CS, incluindo atendimento à demanda em atraso (*backorder*) ou venda perdida (*lost sale*). No entanto, de acordo com Bijvank e Vis (2011), existem poucos modelos de estoque considerando vendas perdidas na literatura. Mesmo que muitas vezes seja mais adequado modelar o comportamento do cliente como vendas perdidas em comparação com modelos baseados em *backorder*, modelos de estoque que incluem vendas perdidas são tipicamente mais complexos, uma vez que a consideração de mais um de pedido pendente pode levar a modelos computacionalmente intratáveis. Por outro lado, quando um modelo considerando vendas perdidas é aproximado por um modelo considerando atendimento em atraso, as diferenças de custo não podem ser negligenciadas (Zipkin, 2008a).

Em se tratando de mais de uma camada, por exemplo, um CD atendendo a vários varejistas, além das considerações feitas anteriormente, é necessário definir qual a regra de rateio a ser usada quando o CD não possuir estoque suficiente para atender a todos os pedidos dos varejistas. A regra de rateio mais conhecida é a *Fair Share* (FS). Segundo Jonsson et al. (1987), a ideia central de FS é minimizar a quantidade do item em *backorder* impondo probabilidade de falta iguais nos varejistas. Para superar esta limitação, De Kok (1990) propôs uma nova regra de rateio, o *Consistent Appropriate Share* (CAS). CAS é uma generalização de FS, em que as frações de rateio são efetivamente fixadas em função das demandas durante o tempo de reposição dos varejistas. No entanto, este tipo de rateio pode causar desbalanceamentos (*imbalances*) ou alocações negativas de falta, quando o rateio for feito de tal maneira que o volume alocado de faltas em um varejista for maior que o pedido realizado ao CD. Este inconveniente é mais frequente quando

a meta desejada de falta nos varejistas é pequena. Uma importante contribuição no desenvolvimento de regras de rateio foi desenvolvida por Van der Heijden (1997), que propôs determinar frações de rateio de modo a minimizar uma medida de desbalanceamento médio, introduzindo a regra de rateio *balanced stock* (BS).

Modelos que tratam de sistemas de duas camadas considerando regras de rateio geralmente supõem que a distribuição da demanda segue uma distribuição de probabilidade do tipo Normal, Erlang ou Gama. Isto afeta diretamente o modelo desenvolvido. Estudos relacionados desenvolvem modelos analíticos detalhados e, em alguns casos, estudos mais gerais, exigindo tanto integração numérica como técnicas especiais de aproximação (Lagodimos et al., 2008).

A maioria das pesquisas sobre CSs assumem que suas características operacionais sejam determinísticas. Porém, alguns parâmetros, tais como demanda dos clientes, preços e capacidades de recursos, estão sujeitos à incerteza. Estas incertezas geram impactos, como atrasos e incapacidade de atendimento ao cliente ou desatendimentos. A importância da incerteza levou vários autores a tratarem como problemas estocásticos a distribuição de matérias-primas e produtos no planejamento de uma CS em um nível tático e localização de instalações em um nível estratégico (Santoso et al., 2005).

Enquanto o caso determinístico é bem desenvolvido, a literatura científica existente aborda políticas de controle de estoques sob incerteza considerando parâmetros incertos de forma aproximada e requerendo suposições restritivas. Por exemplo, o método estocástico de Hadley-Whitin (Hadley e Whitin, 1963), que determina aproximadamente os parâmetros ótimos  $(R,S)$  de um sistema de uma camada considerando um único item, e o método estocástico de Axsäter (Axsäter, 2006) que determina os parâmetros ótimos  $(R,S)$  de um sistema de duas camadas em série considerando também um único item, requerem que sejam assumidas hipóteses simplificadoras com respeito à estocasticidade da demanda do item, incluindo estacionariedade.

Modelos que tratam políticas de reposição e estoques quando a demanda é estocástica consideram como parâmetros determinísticos custos de encomendar, preço dos itens, taxas de investimento e custos de falta. Na representação da demanda estocástica são utilizadas aproximações para modelos de distribuição discretas (Poisson, Logarítmico e Geométrico) para os casos em que a demanda é pequena, e aproximações para modelos de distribuição contínuas (Normal e

Gamma) para os casos em que a demanda é grande (Archibald, 1981; Love, 1985; Chen e Zheng, 1993; Johansen e Thorstenson, 1996; Giri e Dohi, 2009; Axsäter, 1996; Nahmias, 1997; Hadley e Whitin, 1963; Silver et al., 1998; Zipkin, 2000 e Axsäter, 2006).

A maioria dos modelos da literatura considera a gestão de estoques e projeto de redes logísticas separadamente. Nos modelos que tratam esses temas de forma conjunta, o foco é o projeto, sendo as questões relativas aos estoques tratadas sem a otimização das decisões próprias de estoques, tais como em Minner (2001) e You e Grossmann (2008). Em muitos casos, estoques de segurança são tratados de maneira simplificada como limites inferiores para os níveis dos estoques ou como metas.

Utilizando programação estocástica, alguns trabalhos consideram problemas multicamadas, como são os casos de Gupta e Maranas (2000), Santoso et al. (2005), Oliveira e Hamacher (2012) e Oliveira et al. (2013). Porém, apesar de considerarem a gestão de estoques e o projeto de cadeias de suprimentos de forma conjunta, não trataram diretamente da política de controle de estoques.

No problema tratado, inicialmente considera-se apenas um CD, que faz seu pedido para um fornecedor externo, armazena um único produto e atende varejistas que demandam o produto. Não serão considerados custos, retardos e capacidades dos arcos de transporte entre o fornecedor externo e o CD, nem entre o CD e os varejistas.

O CD utiliza o sistema de reposição e controle de estoques  $(R, S)$  para o item considerado, onde  $R$  denota o intervalo entre encomendas e  $S$  denota o nível alvo de estoque do item. Particularmente, o problema é determinar o nível alvo  $S$  ótimo e a periodicidade  $R$  ótima no CD, relativo a um único item cuja demanda dos varejistas em cada período é descrita através de uma função densidade de probabilidade conhecida.

Para este tipo de problema será considerado um horizonte de planejamento finito, com um número discreto de períodos uniformes  $N_p$ . Períodos podem ser, por exemplo, dias, semanas ou meses. O tempo entre encomendas  $R$  (ciclo) a ser determinado é modelado como um múltiplo do período  $p$  considerado. Por sua vez, o tempo de reposição  $L$  de cada pedido é definido como um múltiplo do período, sendo fixo e conhecido a priori. A cada encomenda, a quantidade do item

a ser solicitada é dada pela diferença entre o nível alvo  $S$  e a posição do estoque no momento do pedido. Nesse sistema, o primeiro pedido será feito no início do primeiro período do primeiro ciclo  $R$  e será entregue no tempo  $p + L$ . Considera-se que os pedidos recebidos no início de um período podem ser consumidos já no mesmo período. A Figura 1 ilustra esquematicamente a relação entre os elementos que compõem a política de gestão do estoque.

Os custos relevantes para a determinação dos parâmetros ótimos do sistema  $(R, S)$  são: o custo  $h$  de manter uma unidade do item no estoque por período e o custo fixo  $C_F$  de fazer um pedido, que são conhecidos, e independem da quantidade pedida. Uma demanda não atendida plenamente será penalizada com um custo de falta  $b$  proporcional à quantidade faltante, independentemente do tempo de falta.

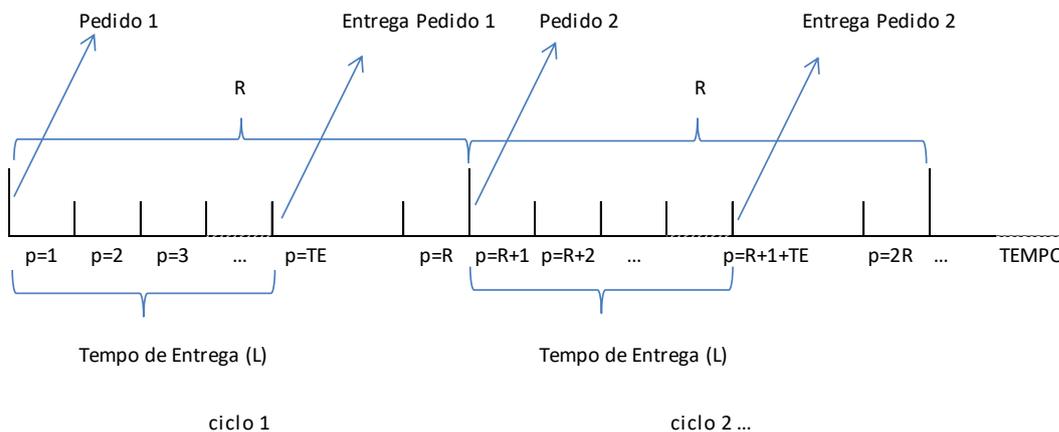


Figura 1 – Esquema da dinâmica de execução de pedidos

Posteriormente, busca-se determinar uma política de reposição e estoques de um único item numa rede logística de duas camadas com revisão periódica, a qual é muito utilizada em operações, tanto no varejo como na manufatura. Em tal política, é necessário determinar o melhor nível de investimento em estoque para atender o nível de serviço desejado. No problema em questão, considera-se um sistema de distribuição do tipo arborescente com um CD e um conjunto de varejistas. O CD faz seu pedido para um fornecedor, armazena um único produto e atende aos pedidos dos varejistas. Cada varejista faz seu pedido ao CD, armazena o produto e atende seus clientes que demandam o produto. Não serão considerados custos, retardos ou capacidades dos arcos de transporte entre o fornecedor externo e o CD, entre o CD e os varejistas nem entre os varejistas e os clientes.

Tanto o CD quanto os varejistas utilizam o sistema de controle de reposição e estoques  $(R_0, S_0)$  e  $(R_i, S_i), i = 1, \dots, N_I$ , onde  $N_I$  representa o número total de varejistas no sistema de distribuição, para o item considerado, onde  $R_0$  e  $R_i$  denotam respectivamente o intervalo entre encomendas no CD e no varejista  $i$ , e  $S_0$  e  $S_i$  denotam respectivamente o nível alvo de estoque de camada do item no CD e no varejista  $i$ . Cabe ressaltar que o estoque de camada referente a um varejista é igual a posição do estoque, uma vez que não existe nenhuma instalação a sua jusante. Desse modo, o problema consiste em determinar os níveis alvo  $S_0$  e  $S_i, i = 1, \dots, N_I$ , ótimos e as periodicidades  $R_0$  e  $R_i, i = 1, \dots, N_I$ , ótimas no CD e nos varejistas relativos a um único item, cuja demanda é descrita probabilisticamente através de sua função densidade de probabilidade conhecida, ao longo de um horizonte de planejamento com um número finito de períodos.

Seja  $N_p$  o número de períodos uniformes no horizonte de planejamento, como, por exemplo, dias, semanas ou meses. O tempo entre encomendas  $R_0$  e  $R_i, i = 1, \dots, N_I$ , a serem determinados, são modelados como múltiplos da unidade do período  $p$ . Por sua vez, o tempo de reposição ou espera de cada pedido no CD e no varejista, representados respectivamente por  $L_0$  e  $L_i, i = 1, \dots, N_I$ , são definidos como um múltiplo do período, sendo fixos e conhecidos a priori. A cada encomenda, a quantidade do item a ser solicitada pelo CD ao fornecedor externo é dada pela diferença entre o nível alvo  $S_0$  e a posição do estoque de camada do CD no momento do pedido. Assim como, a cada encomenda feita pelo varejista  $i$ , a quantidade do item a ser solicitada ao CD é dada pela diferença entre o nível alvo  $S_i, i = 1, \dots, N_I$ , e a sua posição do estoque no momento do pedido. Nesse sistema, os primeiros pedidos do CD e dos varejistas são feitos no início do primeiro período do primeiro ciclo  $R$  e serão entregues respectivamente nos tempos  $1 + L_0$  e  $1 + L_i$ . Considera-se que pedidos recebidos no início de um período podem ser consumidos já no mesmo período. Além disso, o fornecedor externo sempre tem estoque disponível para atender o CD, condição conhecida como capacidade de atendimento infinita. Em todas as instalações é permitido estocar o item e não há restrições de capacidade de estocagem e transporte. Já os pedidos realizados pelos varejistas ao CD, bem como as demandas dos clientes, podem ser atendidos parcialmente e a parcela não atendida é enviada assim que houver estoque disponível.

Como está se considerando um sistema de distribuição de duas camadas arborescente, a quantidade de estoque disponível no CD nem sempre será suficiente para atender integralmente aos pedidos de todos os varejistas simultaneamente num dado período. Neste caso, é preciso definir uma estratégia de rateio das faltas no atendimento aos varejistas. Para contornar esta questão, foram modelados duas propostas de rateio da falta. Na primeira proposta, assume-se um percentual fixo de rateio para todo o horizonte de planejamento. Na segunda, assume-se que o rateio é variável e proporcional a necessidade de cada varejista (pedido do período mais quantidades não atendidas de períodos anteriores).

Os custos relevantes para a determinação dos parâmetros ótimos dos sistemas  $(R_0, S_0)$  e  $(R_i, S_i)$  são: os custos  $h_0^p$  e  $h_i^p$  de manter uma unidade do item no estoque por período, respectivamente no CD e em cada varejista, e os custos fixos  $C_{F0}^p$  e  $C_{Fi}^p$ , respectivamente no CD e em cada varejista, dos pedidos por ocasião do pedido, que independem da quantidade pedida. Uma demanda não atendida plenamente por um varejista  $i$  será penalizada com um custo de falta  $b_i^p$  proporcional à quantidade faltante para cada período (neste caso considerou-se o critério de custo  $B_3$ ). Não será atribuído um custo de falta caso o CD não atenda prontamente o varejista. Este custo é indiretamente avaliado através da falta de atendimento ao varejista. É bom ressaltar que para todos os modelos propostos para sistemas de duas camadas será utilizado o conceito do *backorder*.

A Figura 2 ilustra esquematicamente a relação entre os elementos que compõem a política de reposição e controle de estoques, considerando, em particular, um item, um CD e um varejista. Os tempos de reposição e os intervalos entre reposições são  $L_0 = L_i = 1$  período,  $R_0 = 2$  períodos e  $R_i = 1$  período.

Nesse esquema, os pedidos feitos pelo CD ao fornecedor externo no início do período  $p$  e  $p + 2$ , representados por  $P(\xi)_0^p$  e  $P(\xi)_0^{p+2}$ , são integralmente atendidos, uma vez que este tem capacidade infinita, no início dos períodos  $p + 1$  e  $p + 3$ , respectivamente. Já os pedidos feitos pelo varejista  $i$  ao CD no início dos períodos  $p$ ,  $p + 1$  e  $p + 2$  são representados por  $P(\xi)_i^p$ ,  $P(\xi)_i^{p+1}$  e  $P(\xi)_i^{p+2}$ . Neste caso, os dois primeiros pedidos são integralmente atendidos pelo CD no início dos períodos  $p + 1$  e  $p + 2$ , nas quantidades representadas por  $A(\xi)_0^p$  e  $A(\xi)_0^{p+1}$ , respectivamente. Já o pedido feito pelo varejista ao CD em  $p + 2$  é atendido

parcialmente pelo CD no início do período  $p+3$ , na quantidade representada por  $A(\xi)_0^{p+2}$ , ficando o CD com uma pendência de atendimento ao varejista igual a  $F(\xi)_0^{p+2}$ . Essa quantidade em atraso será atendida no início do período  $p + 3$ .

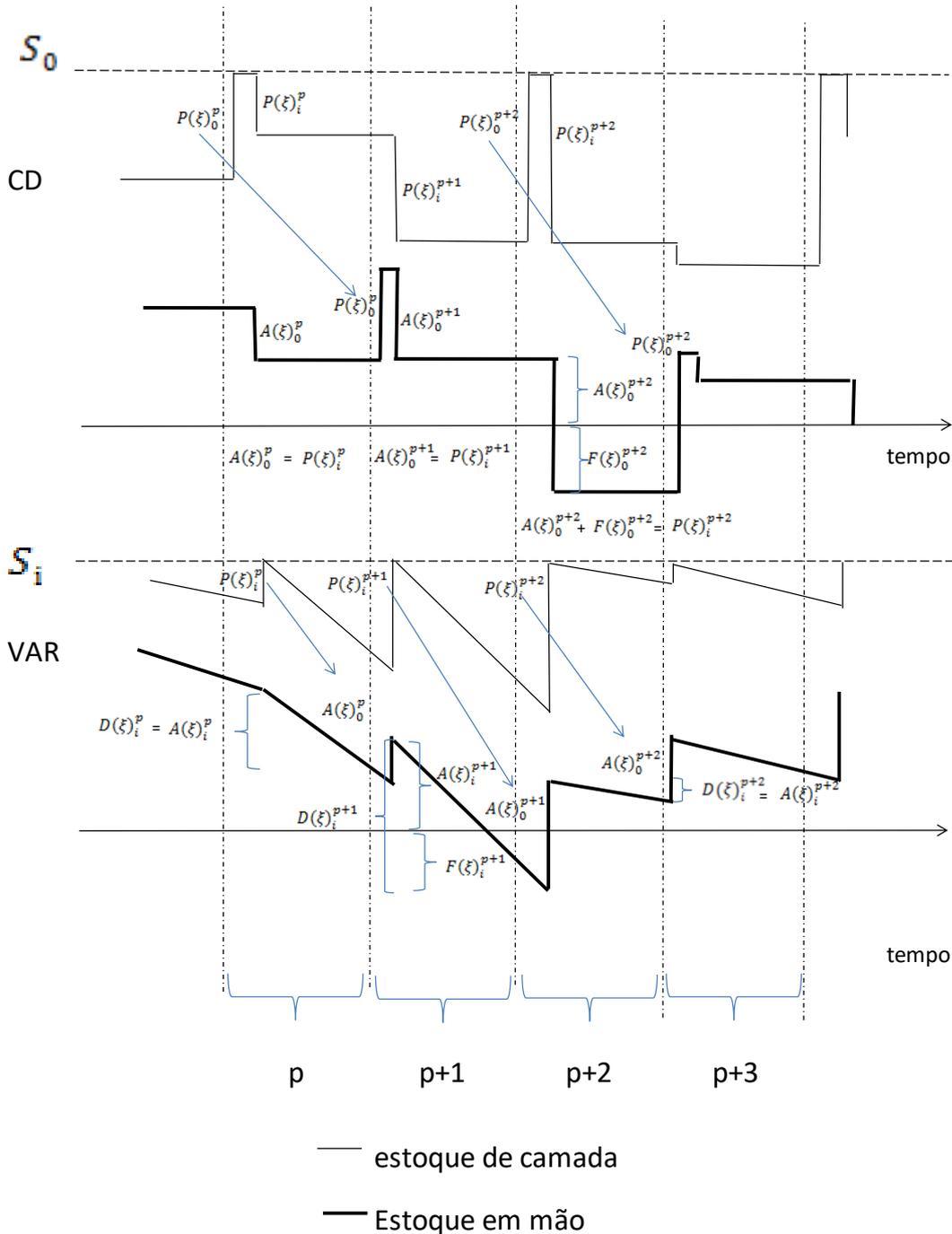


Figura 2 – Esquema da dinâmica de execução de pedidos

As demandas no varejista  $i$  dos períodos  $p, p + 1$  e  $p + 2$  são representadas por  $D(\xi)_i^p, D(\xi)_i^{p+1}$  e  $D(\xi)_i^{p+2}$  e são integralmente atendidas nos períodos  $p$  e  $p + 2$

e parcialmente atendida no período  $p + 1$ . Ficando o varejista, neste período, com uma pendência de atendimento da demanda igual a  $F(\xi)_i^{p+1}$ . Esta pendência é atendida no período  $p + 2$ .

Buscou-se com este trabalho propor uma metodologia que, além de ser uma grande contribuição para o meio acadêmico, é também uma contribuição para o meio empresarial, na medida em que se permite moldar de forma mais abrangente as características de uma CS com seus respectivos problemas. Seja considerando *backorder* ou *lost sale* (sem restrição de pedidos pendentes), seja considerando informação centralizada (permitindo um ganho global), seja permitindo que a demanda seja representada por qualquer processo estocástico. Considerando uma política de revisão periódica estamos alinhados com as facilidades decorrentes da mesma, tais como: melhor planejamento em todas as etapas da cadeia de suprimento, desde o fornecedor, passando pelo distribuidor até chegar no varejista. Devido a grande gama de variáveis, este problema não pode ser resolvido utilizando modelos analíticos existentes na literatura ou, pelo menos, não foi encontrado na literatura nenhuma outra técnica capaz lidar com o problema estudado com todas as considerações listadas.

### **1.1. Objetivo**

Visando a construção de um modelo de programação estocástica do problema de determinação dos parâmetros ótimos  $(R, S)$  de um sistema de controle e reposição para uma CS de duas camadas arborescente com incerteza na demanda como objetivo principal, foram propostos, nesta pesquisa, vários modelos. Partiu-se da construção de um modelo para o caso mais simples, considerando uma CS de uma camada, passando pelo caso intermediário, considerando uma CS de duas camadas em série, constituída de um CD e um varejista, até o caso mais geral, considerando uma CS de duas camadas arborescente, constituída de um CD e vários varejistas.

Quando se lida com demandas incertas em CSs, uma alternativa usual é considerar estoques de segurança para atender a demanda. Desta forma, foram consideradas duas abordagens bem frequentes (Silver et al., 1998) baseadas em

estoques de segurança para determinar os parâmetros ótimos da política de reposição e estoques. A primeira leva em conta a minimização de custos relevantes (custo de encomendar, de manter o estoque e de falta). A segunda, adequada para os casos em que quantificar custo de falta é complicado, se estabelece com base no julgamento da gerência uma condição relativa ao atendimento da demanda diretamente de estoques, tal como definir o nível de serviço através da fração da demanda atendida prontamente (*fill rate*). Esta condição, então, é inserida como restrição no problema de minimização dos custos relevantes.

Para tal, foram propostos modelos de custos para encontrar os parâmetros ótimos do sistema de controle e reposição do tipo  $(R,S)$ , i.e, com revisão periódica e nível-alvo. Nos modelos, os custos foram considerados determinísticos, podendo variar ao longo do horizonte de planejamento e, para o atendimento da demanda, foram considerados os casos em que demandas podem ser postergadas (*backorders*) ou vendas podem ser perdidas (*lost sales*) para o caso de uma camada, e somente a consideração de *backorders* para o caso de duas camadas.

## 1.2. Contribuições

As principais contribuições oferecidas por esta tese são:

1- A utilização da programação estocástica para modelar o problema da determinação dos parâmetros ótimos  $(R,S)$  de uma política de controle de estoque para um único item de uma CS de uma camada, considerando revisão periódica e quantidade variável de encomenda que minimiza os custos relevantes num ambiente mais flexível, pois permite considerar tanto *backordes* quanto *lost sales* sem comprometer a tratabilidade computacional, uma questão recorrente e enfrentada por abordagens alternativas na literatura. Em particular, o modelo proposto é capaz de considerar o caso de vendas perdidas sem limitações quanto ao número de encomendas pendentes, bem como tempos de reposição

independentes da periodicidade de revisão, que são, características muitas vezes inerentes aos modelos disponíveis na literatura.

2- Adicionalmente, para uma CS de uma camada é proposto um modelo de programação não-linear inteira mista, sendo o equivalente determinístico do modelo de programação estocástica de dois estágios, o qual é reformulado em seguida de maneira exata em um modelo de programação linear inteira mista.

3- A utilização da programação estocástica para modelar o problema da determinação dos parâmetros ótimos  $(R, S)$  de uma política de controle de estoque considerando um único item em uma CS de duas camadas arborescente, com revisão periódica e quantidade variável de encomenda que minimiza custos relevantes, introduzindo uma regra de rateio proporcional a quantidade faltante do item em estoque para atender simultaneamente diversos varejistas, a qual é capaz de lidar com as alocações negativas da falta, uma dificuldade muitas vezes observada na aplicação das regras existentes.

4- Similarmente ao caso de uma CS de uma camada, é proposto adicionalmente, para o caso de uma CS de duas camadas, um modelo de programação não linear inteira mista que se refere ao equivalente determinístico do modelo de programação estocástica de dois estágios, que em seguida é reformulado de forma aproximada em um modelo de programação linear inteira mista.

5- Para os casos de CSs de uma e duas camadas, os valores ótimos dos parâmetros do sistema  $(R, S)$  são obtidos através de uma abordagem baseada em simulação de Monte Carlo, que permite que fenômenos estocásticos (contínuos ou discretos) sejam considerados de forma mais aderente, sem depender de qualquer método de geração de cenário específico para obtenção de uma representação discreta dos fenômenos aleatórios.

### **1.3. Metodologia**

Para alcançar o objetivo principal, os parâmetros ótimos das políticas de estoques de CSs de uma e duas camadas são determinados através da resolução dos modelos de programação linear inteira mista obtidos juntamente com a abordagem baseada em simulação de Monte Carlo, conhecida como Aproximação

por Média Amostral (*Sample Average Approximation* (SAA)), que gera amostras independentes de cenários discretos e finitos para representar a demanda probabilística pelo item ao longo de um horizonte de tempo finito e obter arbitrariamente boas soluções para o problema.

De forma a validar a abordagem proposta são geradas aleatoriamente várias instâncias do problema. Os resultados numéricos obtidos são comparados com os resultados dos métodos de Hadley e Whitin (1963), para o caso de uma camada e, com os resultados do método de Axsäter (2006), para o caso de duas camadas em série. O método estocástico de Hadley-Whitin foi escolhido como referência para comparação dos resultados numéricos uma vez que o mesmo também aborda um sistema de revisão periódica considerando vendas perdidas, é de simples implementação e é conhecido por ser capaz de fornecer soluções ótimas aproximadas quando são considerados determinados intervalo de valores de custos de manter e de falta. Ademais, mostra-se, através de exemplos numéricos, que a abordagem proposta é válida também nos casos onde os métodos citados não podem ser aplicados, por exemplo, considerando uma CS de duas camadas arborescente e demanda probabilística não é estacionária.

Vale a pena ressaltar que a aplicação da metodologia de programação estocástica proposta não se limita às premissas impostas pelos métodos estocásticos existentes na literatura. Além disso, considerando uma camada, a abordagem proposta não foi encontrada em outro trabalho de pesquisa atualmente disponível na literatura, que visa determinar os valores dos parâmetros ótimos de uma política de revisão periódica do estoque, considerando vendas perdidas (embora ambos os casos - vendas perdidas e atendimento em atraso - sejam possíveis de serem considerados no modelo proposto, esta tese concentrou-se no caso considerando vendas perdidas devido ao número reduzido de trabalhos existentes na literatura, tal como reconhecido por Bijvank e Vis (2011)). Considerando o caso de uma CS de duas camadas, da mesma forma para o caso de uma camada, não foi encontrado na literatura nenhum trabalho considerando o uso da programação estocástica de dois estágios, no auxílio de tomadas de decisão, no tratamento do controle de reposição e estoques em sistemas arborescentes para um único item com reposição periódica e incerteza na demanda com regra de rateio.

Além disso, uma vez que a metodologia proposta não requer suposições restritivas referentes ao comportamento dos parâmetros incertos, em particular

com relação a natureza do processo estocástico dos níveis das demandas do item, a mesma pode, portanto, ser aplicada a uma ampla gama de problemas.

#### **1.4. Organização do texto**

No que segue, são apresentados uma revisão bibliográfica e o referencial teórico em gestão de estoques no Capítulo 2. A modelagem do problema, as formulações matemáticas e a metodologia proposta para determinação dos parâmetros ótimos do sistema  $(R, S)$  são apresentados nos Capítulos 3 e 4, respectivamente, para sistemas de uma camada e duas camadas arborescente. No Capítulo 5, são apresentados os resultados numéricos para instâncias geradas aleatoriamente com base em instâncias disponíveis na literatura. Conclusão e desenvolvimentos futuros são apresentados no Capítulo 6.

## 2 Revisão Bibliográfica

Sob o ponto de vista de planejamento da produção, Glock (2012) e Glock et al. (2014) fizeram revisões de trabalhos sobre problemas de determinação de tamanho de lote, classificando-os em duas dimensões: a primeira com respeito à influência da natureza do produto e da demanda sobre os processos de estoque, e a segunda com respeito ao conteúdo ou número de parâmetros de custo incluídos no modelo. Com relação à primeira dimensão, os modelos podem ser diferenciados pela forma que consideram a variação dos parâmetros no tempo (estacionários e dinâmicos ou não estacionários) e se a incerteza é considerada no modelo ou não (determinístico ou estocástico). Com relação à segunda dimensão, os modelos podem ser clássicos ou estendidos. Os modelos clássicos têm como objetivo a definição das quantidades ótimas de produção, pedidos e envios, e consideram na sua formulação os custos de encomendar, custo de preparação, custo de manter o estoque e custo de transporte. Estes modelos são variantes do modelo básico do tamanho do lote econômico (*Economic Order Quantity* - EOQ) com uma estrutura similar. Já os trabalhos estendidos consideram componentes adicionais de custos relevantes, tais como tempo de reposição, desconto de quantidade, ganho de produtividade, custos de falta entre outros. A estrutura de custo destes modelos é significativamente diferente se comparadas com a do modelo EOQ. Além disso, Quanto à forma da CS os modelos clássicos podem ser subdivididos em modelos de uma camada, duas camadas, multi-camadas e integrados. Os modelos estendidos são os que consideram, além das quantidades ótimas, programação da produção, sistemas de incentivo (*incentivy system*), produtividade, falta do item em estoque, tempo de vida do item, entre outros. Modelos estendidos são tipicamente baseados em modelos clássicos, de tal forma que a respectiva extensão é estudada em configuração de uma camada, duas camadas, multi-camadas e integrados. Sendo assim, segundo esta classificação, esta revisão bibliográfica focou nos trabalhos que consideram modelos estocásticos estacionários e dinâmicos, ambos estendidos e considerando uma e duas camadas.

Além desta classificação, estudos de modelos de sistemas de controle e reposição de estoques podem ser divididos em dois grandes grupos: modelos de custo e modelos que abordam o nível de serviço. Nos modelos de custo o objetivo é encontrar os parâmetros ótimos de uma política de estoques para minimizar os custos relevantes totais, incluindo o de falta (Jha e Shanker, 2009; Bijvank e Vis, 2011). Já nos modelos que abordam o nível de serviço se introduz uma restrição de atendimento no modelo no lugar do custo de falta (Sobel, 2004), que pode ter duas naturezas distintas, chamadas *stochastic-service approach* (SSA) e *guaranteed service approach* (GSA). As duas abordagens diferem na forma como tratam a demanda e na caracterização do tempo de serviço (definida como o tempo entre a colocação do pedido por um cliente e a entrega da encomenda correspondente). No SSA, cada instalação mantém certo nível de estoque de segurança para lidar com a variação da demanda estocástica. Quando o estoque disponível não é suficiente, a demanda não atendida é postergada. No GSA, frequentemente utilizado na otimização de políticas de estoque para os sistemas multicamadas, estipula-se um limite superior para a demanda durante o período de espera em cada instalação e, qualquer valor acima deste limite, a demanda é atendida por “aceleração” ou horas extras. No GSA, o tempo de serviço de cada instalação é uma variável de decisão determinística (Chen e Li, 2015).

## **2.1. Abordagens por estoques de segurança**

Segundo Silver et al. (1998), quando se lida com demandas incertas, pode-se considerar estoques de segurança para controlar o nível de serviço. Silver et al. (1998) consideram quatro abordagens baseadas em estoque de segurança para determinar os parâmetros ótimos de sistemas de controle e reposição de estoques:

- 1) Uso de fatores comuns na determinação do estoque de segurança (abordagem simples). Por exemplo: um item é encomendado quando sua posição do estoque menos a previsão da demanda durante o tempo de reposição é menor que o equivalente a 2 meses de reposição.
- 2) Minimização de custos relevantes com inclusão do custo de falta, ou seja, custo por não atender plenamente a demanda por um ou conjunto de itens.

O custo de falta pode se apresentar como um custo fixo por ocasião de falta ( $B_1$ ) (uma empresa o estabelece como forma de evitar falta), como um custo fracionário por unidade em falta ( $B_2$ ), como um custo fracionário por unidade em falta por unidade de tempo ( $B_3$ ) (tipicamente aplicado para falta de peças de reposição que deixam equipamentos parados) ou como custo fracionário por item faltante de uma lista do cliente (usado como penalização ou multa na impossibilidade de atender uma lista de itens de um cliente integralmente).

3) Nível de Serviço – em situações em que quantificar custo de falta é difícil, estabelece-se um parâmetro relativo ao atendimento da demanda diretamente do estoque, introduzindo uma restrição no modelo de minimização de custos relevantes. Por exemplo: 95% de todas as demandas devem ser atendidas diretamente com itens estocados. Dentre as medidas mais comuns para medição do nível de serviço, podem ser citadas: probabilidade de não faltar por tempo de reposição ( $P_1$ ) (*cycle level service*), fração da demanda atendida com itens da prateleira rotineiramente ( $P_2$ ) (*fill rate*), fração do tempo durante o qual o nível de estoque líquido (estoque em mão menos *backorder*) é positivo ( $P_3$ ) (*ready rate*), e tempo médio entre ocasiões de falta (*time between stockout-TBS*).

4) Abordagem agregada – para um conjunto de itens, a seleção de estoque de segurança individual para cada item é feita de maneira a manter o total de investimento em estoques o mínimo possível ao passo que um nível de serviço agregado é alcançado.

Nesta tese, serão abordados os critérios  $B_2, B_3$  e  $P_2$  por serem usualmente usados na prática.

## 2.2.

### Gestão de estoques em sistemas de uma camada

No que tange a gestão de estoques, a maior preocupação das empresas pode ser atribuída, primeiramente, à necessidade de se garantir a maior disponibilidade de produto ao cliente final ao menor custo possível, dada a pressão competitiva dos mercados (Eaves, 2002). Além disso, outros aspectos são fonte de preocupação, tais como: a diversidade crescente do número de produtos, que torna o comportamento ou padrão da demanda mais irregular (Rego e Mesquita, 2011),

e o elevado custo de oportunidade de capital, impactando os indicadores financeiros pelos quais as empresas são avaliadas (Wanke, 2011). Para superar tais dificuldades as empresas adotam, conforme suas peculiaridades, diferentes políticas de controle e reposição de estoques.

Para o caso de demanda determinística variando no tempo, o problema em questão pode ser resolvido com programação dinâmica através do algoritmo de Wagner-Whitin (Wagner e Whitin, 1958). Na prática, para responder as principais questões sobre quando e quanto repor um item, considerando variabilidades na demanda e no suprimento, obtém-se soluções aproximadas em duas etapas, (Axsäter, 1996; Nahmias, 1997). Na primeira etapa, a demanda probabilística é representada por sua média, e a periodicidade de revisão dos estoques e o tamanho do lote a ser encomendado são obtidos pela fórmula de EOQ. Na segunda etapa, para se obter o ponto de pedido e o nível alvo dos estoques são estabelecidos níveis de serviços desejáveis. No caso de revisão contínua, o ponto de pedido deve cobrir a demanda durante o tempo de reposição ou ressuprimento com o nível de serviço desejado, enquanto que, no caso de revisão periódica, o nível alvo deve cobrir a demanda durante o intervalo de tempo composto pelo tempo de ressuprimento e o tempo entre revisões. Em geral, os níveis de serviço fazem parte das premissas do modelo e são usualmente modelados como um percentual da demanda a ser atendida.

Axsäter (2006), Hadley e Whitin (1963) e Zipkin (2000), dentre outras referências, propõem vários modelos para tratar políticas de reposição e estoque quando a demanda é estocástica. Na sua maioria, consideram-se como parâmetros fixos custos de encomendar, preços dos itens, taxas de investimento e custos de falta. Na representação da demanda estocástica são utilizadas aproximações para modelos de distribuição discretas e contínuas. Para os casos em que a função de distribuição não possui uma forma fechada é possível obtê-la tabulando seus valores e interpolando ou usando aproximações (Axsäter, 2006). Porém, nestes casos, a solução do modelo nem sempre é trivial.

Considerando a abordagem dos custos relevantes e revisão contínua, Archibald (1981) desenvolveu um método para calcular os parâmetros da política  $(s, S)$  que minimiza os custos, considerando: tempo de reposição constante, custo da encomendar fixo, custo de manter o estoque linear por unidade de tempo, custo de falta linear por unidade de falta, demanda sendo representada por uma

distribuição de Poisson e vendas perdidas. Buchanan e Love (1985) desenvolveram uma expressão exata para os custos relevantes de um modelo de controle de estoque com revisão contínua considerando: vendas perdidas, demanda representada por uma distribuição de Poisson, tempos de reposição representados pela distribuição Erlang, custo de encomendar fixo, custo fixo por unidade de venda perdida, custo de manter o estoque linear por unidade de tempo e um máximo de uma ordem pendente. Chen e Zheng (1993) estudaram os modelos estocásticos de estoque considerando custos de manter o estoque e de *backorder* lineares. Johansen e Thorstenson (1996) consideraram um sistema de controle de estoque com revisão contínua  $(s, Q)$ , com a demanda sendo representada pela distribuição de Poisson e, no máximo, uma ordem pendente. Nesse modelo, o tempo de reposição é constante ou distribuído exponencialmente, as demandas não atendidas prontamente são perdidas e os custos incluem: custo de encomendar linear com um custo fixo por pedido e um custo fixo por unidade de venda perdida. Giri e Dohi (2009) implementaram o critério de custo-eficácia, o que proporcionou um equilíbrio entre as necessidades econômicas e confiabilidade para os modelos de controle de estoque com revisão contínua e periódica. Os autores propuseram uma política de estoques de baixo custo a partir da confiabilidade, juntamente com a perspectiva de minimização de custos.

Sistemas de controle e reposição de estoque com demanda estocástica que consideram *backorder* são mais fáceis de serem modelados do que sistemas que consideram *lost sales*. De fato, modelos baseados em *backorder*, tempo de reposição constante, custo de encomendar linear e demandas aleatórias e independentes possibilitam abordagens mais simples para obtenção das políticas ótimas (Zipkin, 2008a).

De acordo com Bijvank e Vis (2011), os modelos de revisão periódica com *lost sales* consideram o tempo de reposição igual ao período de revisão ( $L = R$ ) ou a um múltiplo inteiro do período de revisão ( $L = nR$ ) o que geralmente leva a políticas de reposição próximas do ótimo e conseqüentemente podem ser usadas para prover limites para as quantidades ótimas a serem pedidas.

O trabalho pioneiro de Bellman et al. (1955) abordou um sistema de controle de estoque, considerando revisão periódica, *lost sales* e tempo de reposição igual a zero, sem custo de encomendar. Gaver (1959) e Morse (1959) abordaram o problema de um sistema de revisão periódica com *lost sales* e

consideraram o tempo de reposição igual ao período de revisão, já Karlin e Scarf (1958) abordaram o problema considerando o tempo de reposição como um número fixo do período de revisão, assim como Morton (1969) que desenvolveu equações para obtenção da política ótima através de programação dinâmica. Considerando tempo de reposição igual a um número fixo de períodos, Pressman (1977) provou que o valor esperado da demanda não atendida e o estoque em mão são funções convexas do nível alvo  $S$ , quando os tempos de reposição são fixos. Zipkin (2008b) reformulou o problema original de Karlin e Scarf (1958) e Morton (1969) para considerar somas parciais das quantidades dos pedidos pendentes e incluir restrições de capacidade, demandas correlacionadas, tempo de reposição estocástico e várias classes de demanda, derivando assim limites adicionais para a política ótima.

Morton (1971) propôs ainda uma política míope para determinar o tamanho do lote do pedido, impondo que este não pudesse exceder um percentil da demanda esperada em um período de revisão. Johansen (2001) propôs uma política de estoque base em que se especifica o um número mínimo de períodos de revisão entre dois pedidos subsequentes para amortecer o processo de pedido ao longo do tempo. Baseado na política de estoque base apresentada por Morton (1971), Johansen e Thorstenson (2008) propuseram uma aproximação da política ótima de estoque base. Bijvank e Johansen (2012) estenderam esta política considerando o tempo de reposição e o período de revisão como quaisquer, ao invés de um múltiplo inteiro. Além disso, consideraram que o custo e a demanda ocorrem continuamente no tempo ao invés de considerarem apenas no início de cada período de revisão após a demanda ter acontecido.

Nahmias (1979) considerou um modelo com custo de encomendar fixo e tempo de reposição determinístico e aleatório. Considerou também, que apenas uma encomenda pendente pudesse acontecer. Hill e Johansen (2006) propuseram um algoritmo para o cálculo aproximado das quantidades ótimas a serem encomendadas, mostrando através de um exemplo que a política ótima correspondente não é nem  $(R, s, S)$  nem  $(R, s, Q)$ , mas de fácil implementação em aplicações reais. Em contraste com sistemas de revisão contínua, ambas as políticas mencionadas não são equivalentes quando a demanda é unitária.

Levi et al. (2008) propuseram uma política considerando vendas perdidas “*dual-balancing*”, em que os riscos de se encomendar pouco ou muito são

equilibrados. Os autores provaram que os custos totais esperados desta política são, no máximo, duas vezes o custo esperado da política ótima. Bijvank et al. (2010) desenvolveram modelos para diferentes políticas de reposição periódica (considerando tamanho fixo e variável de encomenda) sem limitação de pedidos pendentes e realizaram uma comparação numérica. Eles também propuseram uma política de revisão periódica modificada, em que o tamanho máximo do pedido é restrito a um limite superior. Esta política gera pedidos próximos do ótimo e um aumento médio de custo de menos de 1% em relação ao custo da política ótima.

A Tabela 1 mostra diferentes características dos modelos probabilísticos considerando revisão periódica e *lost sales* baseado na extensa revisão da literatura feita por Bijvank e Vis (2011). As referências foram classificadas considerando a distribuição de probabilidade da demanda (coluna “Distribuição da demanda”), se a demanda requer a hipótese de estacionariedade (coluna “Hipótese estacionariedade”), como os tempos de reposição são modelados (coluna “Tempo de reposição”) e se existe hipótese específica para tempo de reposição (coluna “Hipótese tempo de reposição”), se custos fixos de encomendar são considerados (coluna “Custo fixo de encomendar”) e se o modelo permite pedidos pendentes (coluna “Pedidos pendentes”).

Na Tabela 1, (T) denota todos os tamanhos, (CP) compound Poisson, (D) Determinístico, (G) Geral, (N) Não, (P) Poisson, (E) Estocástico e (S) Sim. A expressão  $L = R$  significa que o tempo de reposição ( $L$ ) deve ser igual ao período de revisão ( $R$ ), quando  $L = nR$  significa que  $L$  deve ser um inteiro múltiplo de  $R$ . A última linha da Tabela 1 indica as características da metodologia baseada em programação estocástica proposta nesta tese.

Como pode ser observado na Tabela 1, o método proposto permite relaxar algumas premissas necessárias se comparado com outros métodos. Em particular, a utilização do modelo proposto permite considerar as incertezas do problema de uma forma mais ampla (como, considerar a demanda não estacionária ou tendo outra natureza) e observar os efeitos dos pedidos pendentes. Ainda, a metodologia proposta não impõe qualquer suposição sobre a relação entre  $L$  e  $R$ , exceto pelo fato de que ambos são considerados múltiplos da unidade do período de tempo no modelo de programação estocástica. Além disso, a abordagem proposta permite que, além da demanda, outros parâmetros, que foram anteriormente tratados como fixos ao longo do horizonte de tempo, sejam considerados incertos. De fato, para

os métodos da literatura revistos nesta tese, é necessário supor que as demandas são variáveis aleatórias independentes entre períodos e que o processo estocástico seja estacionário. Observa-se que, para a metodologia proposta, esta hipótese não é necessária.

Tabela 1 – Visão geral dos modelos de estoque com revisão periódica e vendas perdidas

Referência	Distribuição da demanda	Hipótese de estacionariedade	Tempo de reposição	Hipótese sobre Tempo de reposição	Custo fixo de encomendar	Pedidos pendentes
Bellman et al. (1955)	G	S	D	L=R	N	N
Karlin & Scarf (1958)	G	S	D	L=R	N	N
Gaver (1959)	G	S	D	L=R	N	N
Morse (1959)	G	S	D	L=R	N	N
Morton (1969)	G	S	D	L=nR	N	S
Zipkin (2008b)	G	S	D	L=nR	N	S
Pressmam (1977)	G	S	D	L=nR	N	S
Nahmias (1979)	G	S	E	L=nR	S	S ( $\leq 1$ )
Johansen (2001)	P	S	D	L=nR	N	S
Bijvank & Johansen (2012)	CP	S	D	T	N	S
Hill & Johansen (2006)	G	S	D	T	S	S
Bijvank et al. (2010)	G	S	D	T	S	S
<b>Autor</b>	<b>G</b>	<b>N</b>	<b>D</b>	<b>T</b>	<b>S</b>	<b>S</b>

Adaptado de Bijvank et al. (2011)

### 2.2.1. Método de Hadley e Whitin (HW)

Nesta seção é descrito brevemente o método proposto por Hadley e Whitin (1963) para determinar os valores ótimos aproximados dos parâmetros da política de reposição de estoques  $(R, S)$ , tanto para o caso em que as demandas não atendidas prontamente são atendidas assim que houver estoque disponível (*backorder*), como para o caso em que as demandas não atendidas prontamente são consideradas vendas perdidas (*lost sales*). O não atendimento incorrerá num custo de falta. Este custo pode ser interpretado como: a) um desconto no preço do item para que o cliente aceite receber em atraso (*backorder*) (uma multa ou perda de boa imagem face ao mercado), ou como b) redução no ganho por venda perdida. Porém, neste último caso, os valores faltantes não serão considerados para atendimento futuro.

O método HW será usado para validar os experimentos numéricos com a metodologia proposta aplicada ao caso de um sistema de uma camada.

#### 2.2.1.1. Considerando *backorder*

Além de considerar as notações  $R$  e  $S$  já sendo usadas (retomada por conveniência), considere ainda a seguinte notação adicional:

$D$	taxa média anual de demanda pelo item;
$L$	tempo de reposição;
$b$	custo de falta por unidade em falta do item;
$C_F$	custo fixo de encomendar o item;
$h$	custo de manter uma unidade do item por período;
$X$	variável aleatória que representa a demanda durante $L + R$ ;
$f(x, R)$	função densidade de probabilidade da demanda durante $L + R$ ;
$\sigma_{L+R}$	desvio-padrão da demanda durante $L + R$ .

O modelo HW com *backorder* considera como válidas as seguintes premissas:

- 1) O custo de se fazer um pedido é fixo e conhecido;
- 2) O custo de manter em estoque uma unidade do item por período também é constante e conhecido;
- 3) O custo de cada *backorder* é proporcional a  $b$  e independe do tempo que a falta ocorreu;
- 4) O tempo de reposição  $L$  é constante e conhecido, o que implica não haver sobreposição entre reposições.
- 5) Demandas não atendidas prontamente (*backorder*) acontecem em pequenas quantidades e as mesmas serão atendidas na íntegra num próximo pedido. Para isso, se considera  $b$  muito maior que  $h$ .
- 6) As demandas apresentam a mesma média e o mesmo desvio-padrão em todos os períodos e ainda admite-se que não existe correlação entre as demandas.

Para o caso de vendas pendentes (*backorders*), os custos anuais relevantes do problema em questão são: custo de encomendar ( $C_E$ ), custo de manter em estoque ( $C_M$ ) e custo de falta ( $C_S$ ), cujas equações são descritas a seguir:

$$C_E = \frac{C_F}{R} \quad (2.1)$$

$$C_M = h \left[ S - DL - \frac{DR}{2} \right], \quad (2.2)$$

$$C_S = \frac{b}{R} E(S, R), \quad (2.3)$$

onde o número esperado de faltas por ciclo é dado por

$$E(S, R) = \int_S^{\infty} (x - S) f(x, R) dx. \quad (2.4)$$

Portanto, o custo total relevante para o problema em questão é modelado por

$$C_T(S, R) = \frac{C_F}{R} + h \left[ S - DL - \frac{DR}{2} \right] + \frac{b}{R} E(S, R). \quad (2.5)$$

Conforme demonstrado por Hadley e Whitin (1963), no caso de demanda com distribuição normal, para um certo valor de  $R$  especificado, o valor do nível alvo ótimo  $S^*$  que minimiza os custos relevantes totais deve satisfazer:

$$\Phi(z) = \frac{hR}{b} \quad (2.6)$$

$$S^* = (R + L)D + z\sigma_{L+R}, \quad (2.7)$$

onde  $\Phi(z)$  é a distribuição de probabilidade normal padronizada acumulada da demanda. Para obter aproximadamente o valor ótimo  $R^*$ , um número finito de valores de  $R$  num intervalo são escolhidos para buscar aquele que minimiza o custo total relevante.

### 2.2.1.2.

#### Considerando vendas perdidas

Para o caso de vendas perdidas, a seguinte alteração deve ser feita no custo de manter o estoque:

$$C_M = h \left[ S - DL - \frac{DR}{2} + \int_S^\infty (x - S)f(x, R)dx \right]. \quad (2.8)$$

Portanto, o custo total relevante do problema em questão é modelado por:

$$C_T(S, R) = \frac{C_F}{R} + h \left[ S - DL - \frac{DR}{2} \right] + \left[ h + \frac{b}{R} \right] E(S, R). \quad (2.9)$$

Da mesma forma, no caso de demanda com distribuição normal, para um valor de  $R$  dado, o valor do nível alvo ótimo  $S^*$  que minimiza os custos relevantes totais deve satisfazer:

$$\Phi(z) = \frac{hR}{b + hR} \quad (2.10)$$

$$S^* = (R + L)D + z\sigma_{L+R}, \quad (2.11)$$

onde  $\Phi(z)$  é a distribuição de probabilidade normal padronizada acumulada da demanda. Novamente, para obter aproximadamente o valor ótimo  $R^*$ , um número finito de valores de  $R$  num intervalo são escolhidos para buscar aquele que minimiza o custo total relevante.

### 2.3. Gestão de estoques em sistemas multicamadas

A complexidade dos processos de gestão de estoques em redes logísticas aumenta consideravelmente quando comparada à complexidade dos processos em um único depósito. Quando estoques são tratados separadamente numa rede logística, não se garante a otimização do sistema logístico. Quando tratados conjuntamente, tem-se como dificuldade determinar o melhor balanço entre os estoques em cada instalação da rede. Isto se deve ao fato de que, em um sistema de uma camada, por exemplo, as quantidades a serem atendidas referentes a um pedido podem ser tratadas como parâmetros conhecidos. Já no caso de um sistema multicamadas, as quantidades a serem atendidas dependem da disponibilidade de atendimento da outra camada, que neste caso é variável (You e Grossmann, 2010 e Axsäter, 2006).

Segundo Axsäter (2006), sistemas de distribuição de redes logísticas são, em geral, divergentes, já que o número de instalações paralelas cresce com o aumento do fluxo dos materiais. Num sistema de distribuição puro, ou arborescente, cada ponto de estoque tem no máximo um predecessor imediato, conforme ilustrado na Figura 3a. Um caso especial, em que cada instalação tem também no máximo um sucessor imediato, é chamado de sistema em série, conforme Figura 3b.

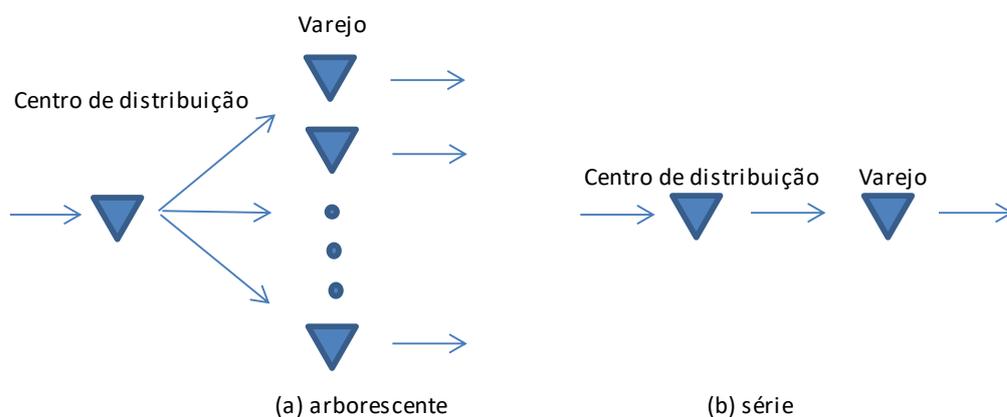


Figura 3 – Tipos de sistemas

A alocação de estoques de segurança pode depender de vários aspectos, sendo um deles o tipo de estrutura do sistema. Em um sistema arborescente, comum em sistemas de distribuição (Figura 1a), há poucas instalações no início da cadeia, (à montante), se comparado a sistemas utilizados em produção e montagem. Em princípio, é mais vantajoso alocar estoques de segurança onde há poucos itens com demandas elevadas e devido ao efeito “pooling” relativamente mais estáveis. Isto indica que pode ser mais conveniente manter estoques de segurança no início da cadeia (estoques recuados) num sistema de distribuição do que num sistema de montagem.

Desta forma, a alocação de estoques de segurança em sistemas multicamadas passa por duas questões: a primeira diz respeito à quantidade necessária de estoques de segurança no sistema todo e a segunda trata de quanto alocar nos diferentes níveis da camada (Axsäter, 2006).

Contudo, outros fatores apontam em direção oposta, como o custo de manter estoques. Em situações de produção e montagem esse custo é frequentemente menor em camadas mais elevadas (a montante), indicando que manter relativamente mais estoques de segurança em vários componentes de um sistema de montagem pode ser uma boa política (Axsäter, 2006).

A alocação de estoques de segurança pode ser afetada também pelo tempo de reposição. Se o tempo de reposição para um depósito à montante (i.e., o CD), for comparativamente maior que o tempo de reposição dos estoques a jusante (i.e., varejistas) uma maior quantidade de estoque de segurança deve ser alocada ao CD.

Em muitos casos, estoques de segurança são tratados de maneira simplificada como limites inferiores para os níveis dos estoques ou como metas. A razão para tal simplificação está associada com o incremento da complexidade de tais modelos, os quais tipicamente possuem natureza não-linear quando consideram questões referentes a gestão de estoques em sua formulação. No entanto, esta simplificação pode resultar em custos e níveis de serviços muito indesejáveis, especialmente quando se considera a incerteza da demanda. Mesmo, esses modelos que fornecem custo ótimo, para cada instalação, podem resultar em custo e níveis de serviços maiores para o conjunto.

Vários modelos disponíveis na literatura se concentram numa CS de duas camadas com informação centralizada, ou seja, todas as informações sobre

demanda e níveis de estoques nos varejistas são compartilhadas com o CD. Clark e Scarf (1960) apresentaram o que se considera o primeiro estudo nesta área. Os autores propuseram um modelo de estoque para um sistema em série de duas camadas e desenvolveram um método eficiente de solução para obtenção da política ótima de reposição. Usando o mesmo conceito, Axsäter (2006) descreve um modelo probabilístico de estoque considerando duas camadas, um CD e vários varejistas, e desenvolve um método de solução aproximado para obtenção da política ótima considerando revisão periódica. Nestes casos, os custos relevantes considerados são os custos de manter o estoque e o de falta. Não são considerados os custos de encomendar, uma vez que são conhecidos e iguais às periodicidades dos pedidos no CD e nos varejistas. Heijden et al. (1997) propuseram um estudo central nesta área, onde são tratadas políticas de alocação dos estoques num sistema de distribuição com  $n$  camadas, em que se permite manter estoques em todos os níveis da estrutura, com o objetivo de atender os níveis de serviço estabelecidos pelos clientes, i.e., o percentual da demanda atendida prontamente. Axsäter e Zhang (1999) consideram uma política de revisão contínua num sistema de duas camadas com um CD e  $n$  varejistas, assumindo que a demanda dos varejistas são independentes entre si, sendo representadas por uma distribuição de Poisson. Chu e Shen (2010) forneceram uma solução aproximada para o estoque de segurança em todas as instalações de um sistema com duas camadas e revisão periódica. Nesse modelo, a razão entre os intervalos de revisão no CD e nos varejistas se restringe a uma potência de dois, os pedidos não são sincronizados e é necessário pré-fixar o nível de serviço em todas as instalações, incluindo o CD.

A superioridade em se considerar políticas centralizadas de reposição e controle de estoques é demonstrada em vários estudos. Considerando um CD e vários varejistas, Abdul-Jalbara et al. (2003) definiram uma política ótima de reposição que minimiza os custos totais de encomendar e manter o estoque, desconsiderando faltas e o tempo de reposição. Gurbuz et al. (2007) consideraram um CD e vários varejistas e desenvolveram uma nova política centralizada de encomendas para os varejistas, em que, ao invés destes pedirem independentemente na medida das suas necessidades, os pedidos são feitos simultaneamente.

### 2.3.1.

#### Modelos para sistemas de duas camadas e regras de rateio

Nas últimas três décadas, cadeias de suprimentos multicamadas têm sido objeto central em pesquisas acadêmicas focadas em gestão de cadeias de suprimento. Como resultado, grande volume de modelos com diferentes objetivos foram apresentados (Inderfurth, 1994; Van Houtum et al., 1996; Diks et al., 1996; De Kok e Fransoo, 2003; Mula et al., 2006).

Nesta tese, foi realizada uma revisão dos modelos que tratam de uma cadeia de suprimentos de duas camadas, controlada por uma política de revisão periódica  $(R, S)$ , onde um centro de distribuição atende a vários varejistas, e as demandas não atendidas prontamente podem ser postergadas (*backorder*). Nos casos em que o CD não pode atender integralmente todos os pedidos dos varejistas, a quantidade do item disponível é rateada para satisfazer parcialmente os pedidos requisitados pelos mesmos.

Segundo Lagodimos et al. (2008) existe uma classe geral de regras de rateio conhecida como rateio linear. Este rateio pode ser visto como um caso especial do chamado problema de alocação quando um CD atende a vários varejistas. Quando o objetivo é minimizar custos, a regra tem impacto sobre o custo de falta nos varejistas. Por outro lado, quando o objetivo é maximizar o atendimento a regra tem impacto sobre o nível de serviço nos varejistas. Quando um horizonte de tempo finito é considerado, a decisão de alocação não precisa ser aplicada a toda quantidade do item disponível. Desta forma, as quantidades alocadas (e o tempo) podem ser tratadas como variáveis de controle (Jonsson e Silver, 1987; McGavin et al., 1993; Cao e Silver, 2005). Por outro lado, quando existe uma regra de rateio, esta impõe que toda a quantidade do item disponível seja distribuída entre os varejistas.

Segundo Lagodimos et al. (2008), quando se considera o estoque de camada no CD (estoque a mão mais estoques de todos os sucessores) disponível para ser alocado, as metas de posição do estoque de todos os varejistas são determinadas após o rateio. Porém, se decisões prévias comprometerem parte deste estoque para um varejista específico, as metas podem não ser mais viáveis. Desta forma, ainda

segundo Lagodimos et al. (2008), foi introduzido o conceito de estoque balanceado que propõe superar tal dificuldade.

A regra de rateio mais conhecida é a *Fair Share* (FS) que foi primeiramente proposta por Clark e Scarf (1960). Quando introduzida, a FS visava equalizar as probabilidades de falta nos varejistas. Considerando custo de manter o estoque e custo de falta lineares, esses autores desenvolveram um método eficiente para determinação do nível alvo para sistemas divergentes com a regra FS. Considerando a estrutura de custo de Clark e Scarf, FS é uma política de rateio ótima. As premissas básicas deste estudo eram que as demandas dos varejistas eram representadas por distribuições Normais, idênticas e tempos de reposição também idênticos. Relaxando esta premissa, Bollapragada et al. (1999) repetiram as análises e mostraram que todos os resultados permaneciam válidos. Dois outros estudos foram desenvolvidos considerando estoque base com FS, porém não considerando custo de manter estoque no CD. Van Donselaar e Wijngaard (1986) consideraram varejistas idênticos, enquanto que Lagodimos (1992) considerou varejistas não idênticos.

Segundo Jonsson et al. (1987), a propriedade chave da FS é minimizar a quantidade do item em *backorder* quando as distribuições da demanda seguem uma distribuição normal, contudo, impondo probabilidade de falta iguais nos varejistas, a FS se torna limitado. Isto motivou De Kok (1990) a propor uma nova regra de rateio, nomeada *Consistent Appropriate Share* (CAS). CAS é uma generalização de FS, onde as frações racionadas são efetivamente fixadas em função das demandas durante o tempo de reposição dos varejistas (De Kok et al., 1994). No entanto, este tipo de rateio pode causar desbalanceamentos (*imbalances*) ou alocações negativas de falta, quando o rateio pode ser feito de tal maneira que o volume alocado de faltas no varejo seja maior que o pedido realizado ao CD. Este problema é mais frequente quando a meta desejada de falta nos varejistas é pequena.

Uma importante contribuição no desenvolvimento de práticas de regras de rateio foi desenvolvida por Van der Heijden (1997). Este autor propôs determinar a fração de rateio de modo a minimizar uma medida de desbalanceamento médio, introduzindo a regra de rateio *balanced stock* (BS).

Lagodimos et al. (2008) enfatizaram que as premissas de modelagem existentes na literatura variam de acordo com a regra de rateio considerada.

Estudos considerando FS geralmente supõem que a demanda é normalmente distribuída enquanto que as regras CAS e BS pressupõem distribuição Erlang ou distribuição Gama, afetando diretamente o modelo desenvolvido. Estudos relacionados a FS apresentam modelos analíticos detalhados, enquanto estudos relacionados a CAS e BS são mais gerais, exigindo tanto integração numérica como técnicas especiais de aproximação.

### 2.3.2. Método de Axsäter (AX)

Como já dito, o modelo desenvolvido por Axsäter (2006) teve como base o modelo de decomposição proposto por Clark e Scarf, sendo exato para redes de duas camadas em série. Analisando-o por etapas, considera-se a instalação mais a jusante atendendo a demanda do cliente. Desta forma, a falta de atendimento aos pedidos pela instalação a montante acarreta atrasos no atendimento ao cliente, o que implica em custos adicionais. Estes custos são avaliados e considerados como custos de falta na determinação da política ótima para a próxima instalação a montante.

Para efeito de simplificação, Axsäter (2006) descreve o caso de um modelo com duas camadas, como na Figura 4, e assume um horizonte infinito de tempo, como Federgruen e Zipkin (1984).

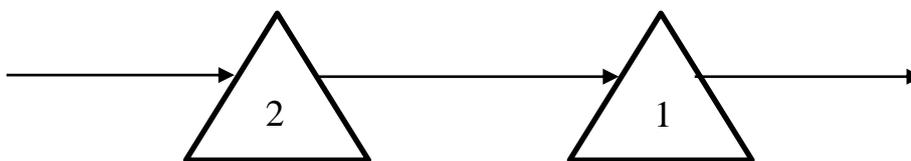


Figura 4 – Fluxo de materiais entre 2 e 1

Neste caso, é considerada revisão periódica. A demanda por período da instalação 1 (varejista) é suposta como normalmente distribuída e independente entre períodos. As demandas dos clientes que não puderem ser atendidas diretamente do estoque da instalação 1 serão posteriormente atendidas a um custo maior, incluindo o custo de falta. Como ilustrado na Figura 2, a instalação 1 é

abastecida pela 2 (CD), que, por sua vez, é abastecida por um fornecedor externo, com capacidade de abastecimento suposta infinita. Além disso, o modelo considera que: tempos entre reposições correspondem a múltiplos inteiros de períodos, custos de manter estoques nas instalações e custos de falta, quando as demandas dos clientes não são atendidas prontamente. O modelo não considera os custos de encomendar, uma vez que as periodicidades entre pedidos, tanto do CD como do varejista, são conhecidas e iguais a um período.

Ainda, considera-se que todos os eventos ocorrem no início de cada período na seguinte ordem:

- 1) A instalação 2 (CD) faz um pedido;
- 2) A reposição periódica do fornecedor externo chega a instalação 2;
- 3) A instalação 1 (varejista) faz seu pedido à instalação 2;
- 4) A reposição periódica da instalação 2 chega a instalação 1;
- 5) A demanda periódica estocástica acontece na instalação 1;
- 6) Avaliam-se os custos de manter em estoque e de falta do item.

No trabalho em referência tem-se como objetivo minimizar os custos esperados de manter estoque e de falta. A análise não considera custos de transporte entre as instalações, uma vez que esses não são afetados pela política de controle.

Este método será usado para validar a metodologia proposta para o caso de um sistema de duas camadas em série.

### **2.3.2.1. Notação do modelo**

Para o entendimento do modelo matemático, a notação utilizada é a seguinte:

- |          |  |
|----------|--|
| $L_j$    | tempo de reposição na instalação $j$ ,   |
| $\mu$    | demanda média por período,   |
| $b$      | custo de falta por unidade por período,  |
| $\sigma$ | desvio-padrão da demanda por período,  |
| $e_j$    | custo de manter em estoque uma unidade do item por período na instalação $j$ , |

$h_j$	custo de manter em estoque de camada uma unidade do item por período da instalação $j$ , $h_1 = e_1 + e_2$ , $h_2 = e_2$ ,
$IL_j^i$	estoque a mão na instalação $j$ no final do período,
$IL_j^e$	estoque a mão na instalação $j$ no final do período,
$D(n)$	demanda estocástica durante $n$ períodos,
$y_2$	estoque de camada da instalação 2 no início do período $t$ ,
$y_1$	estoque de camada da instalação 1 no início do período $t + L_2$ .

Vale ressaltar que a posição do estoque mantido na instalação 1 não inclui os pedidos não atendidos, os quais são repassados para a instalação 2. Além disso, não são considerados os custos das quantidades do item em trânsito entre as instalações 2 e 1, modelado por  $h_2\mu L_1$ , sendo apenas considerado o custo de estocar nas instalações. A demanda dos clientes considera o conceito de horizonte de planejamento infinito. Ainda, os custos desconsiderados não são afetados pela política de controle.

### 2.3.2.2. Resolução do modelo

Após o pedido feito em período arbitrário  $t$ , a instalação 2 passa a ter um estoque de camada  $y_2$ . É possível expressar o estoque de camada da instalação 2 no período  $t + L_2$  como o estoque inicial menos as demandas durante  $L_2$ :

$$IL_2^e = y_2 - D(L_2). \quad (2.12)$$

$D(L_2)$  com média  $\mu'_2 = L_2\mu$  e desvio padrão  $\sigma'_2 = (L_2)^{1/2}\sigma$ .

Em seguida, a instalação 1 faz um pedido para instalação 2 no início do período  $t + L_2$ . Inicialmente, considera-se que este pedido é menor que o estoque de camada na instalação 2, sendo:

$$y_1 \leq IL_2^e = y_2 - D(L_2). \quad (2.13)$$

A posição do estoque a mão da instalação 2 após o pedido da instalação 1 é obtida pela expressão

$$(IL_2^i)^+ = IL_2^e - y_1. \quad (2.14)$$

Repare que este estoque é positivo, o que indica que todo o pedido foi atendido.

Os custos esperados de manter estoque no período  $t + L_2$  são:

$$C_2 = h_2 E(IL_2^e - y_1) = h_2 E(y_2 - D(L_2) - y_1) = h_2(y_2 - \mu'_2) - h_2 y_1 \quad (2.15)$$

para a instalação 2, e

$$C_1 = h_1 E\left((y_1 - D(L_1 + 1))^+\right) + b_1 E\left((y_1 - D(L_1 + 1))^- \right) \quad (2.16)$$

para a instalação 1, com a segunda parcela de  $C_1$  representando o custo de falta na instalação 1.  $D(L_1 + 1)$  com média  $\mu''_1 = (L_1 + 1)\mu$  e desvio padrão  $\sigma''_1 = (L_1 + 1)^{1/2}\sigma$ .

Percebe-se que os custos são determinados por  $y_1$  e  $y_2$ , dispensando a consideração de outras variáveis independentes. Transferindo o último termo da equação (2.15) para a equação (2.16), e usando a relação  $h_1 - h_2 = e_1$ , obtêm-se as seguintes expressões:

$$\tilde{C}_2 = h_2(y_2 - \mu'_2) \quad (2.17)$$

e

$$\tilde{C}_1 = e_1 y_1 - h_1 \mu''_1 + (h_1 + b_1) E\left((y_1 - D(L_1 + 1))^- \right) \quad (2.18)$$

com  $\mu''_2 = D(L_1 + 1)$ . A nova equação de  $C_2$  em (2.17) é independente de  $y_1$  e a nova equação de  $C_1$  em (2.18), mesmo dependente de  $y_2$  pela relação apresentada em (2.13), continua independente da política ótima adotada. Para demonstrar essa relação o autor desconsidera que o inventário realizado de  $y_1$  depende de  $y_2$ , uma vez que se pode escolher qualquer valor para  $y_1$ , obtendo o seguinte resultado a partir de (2.18):

$$\hat{C}_1(\hat{y}_1) = e_1 \hat{y}_1 - h_1 \mu''_1 + (h_1 + b_1) E\left((\hat{y}_1 - D(L_1 + 1))^- \right) \quad (2.19)$$

$$= e_1 \hat{y}_1 - h_1 \mu''_1 + (h_1 + b_1) \int_{\hat{y}_1}^{\infty} (u - \hat{y}_1) \frac{1}{\sigma''_1} \varphi\left(\frac{u - \mu''_1}{\sigma''_1}\right) du \quad (2.20)$$

$$= e_1 \hat{y}_1 - h_1 \mu''_1 + (h_1 + b_1) \sigma''_1 G\left(\frac{\hat{y}_1 - \mu''_1}{\sigma''_1}\right), \quad (2.21)$$

onde  $G'(v) = \Phi(v) - 1$ . Portanto, segue que:

$$\Phi\left(\frac{\hat{y}_1 - \mu''_1}{\sigma''_1}\right) = \frac{e_2 + b_1}{h_1 + b_1}. \quad (2.22)$$

Em seguida, observa-se que, se  $y_2 - D(L_2) \geq \hat{y}_1^*$ , a solução ótima é obtida com  $y_1 = \hat{y}_1^*$ , e se  $y_2 - D(L_2) < \hat{y}_1^*$  e o melhor valor possível de  $y_1$  é obtido com  $y_1 = y_2 - D(L_2)$ . Essa política ótima poderá ser realizada se for aplicado um

estoque de camada com  $S_1^e = \hat{y}_1^*$ , sendo essa política ótima para a instalação 1, independente de  $y_2$ .

Se  $e_1 = 0$  ou  $h_1 = e_2$ , a equação (2.22) implica em  $S_1^e = \hat{y}_1^* \rightarrow \infty$ , de forma que a instalação 2 não terá estoque. De fato, em um sistema em série o consumo é considerado na instalação 1, de forma que, se não houver diferença nos custos para manter estoque, pode-se transferir todo o estoque para a instalação 1. Contudo, num sistema de distribuição arborescente, isto pode não ser a melhor opção, uma vez que pode ser mais vantajoso reter o estoque numa instalação anterior, para posteriormente se ter a opção de transferi-lo para diferentes estabelecimentos.

Por fim, para encontrar a política ótima na instalação 2, o autor em referência obtém  $\hat{C}_2$  como uma função de  $y_2$ . A partir dos custos encontrados em (2.17) e (2.21), obtém a expressão (2.23), que pode ser entendida como a soma do custo de manter estoque na instalação 2 com o custo de estocar e de falta na instalação 1, mais o custo do não atendimento por parte da instalação 2 incorrido com a falta em 1.

$$\hat{C}_2 = h_2(y_2 - \mu'_2) + \hat{C}_1(S_1^e) + \int_{y_2 - S_1^e}^{\infty} [\hat{C}_1(y_2 - \mu) - \hat{C}_1(S_1^e)] \frac{1}{\sigma'_2} \varphi\left(\frac{\mu - \mu'_2}{\sigma'_2}\right) d\mu. \quad (2.23)$$

Como se demonstra que  $\hat{C}_2$  é uma curva convexa em  $y_2$ , é suficiente buscar um mínimo local para obter a solução ótima global  $y_2^*$ . Considerando que não se tem limite no fornecimento externo, a ordem de pedido ótima será  $S_2^e = y_2^*$ .

## 2.4.

### Uso da programação estocástica em controle de reposição e estoque

Modelos de programação estocástica são utilizados quando as soluções dos problemas correspondentes se mostram sensíveis a alterações de seus parâmetros incertos, como, por exemplo, quando a demanda depende das condições do mercado ou o custo da produção e distribuição dependem do preço do combustível (Birge e Louveaux, 1997) e, especialmente, quando as premissas com relação aos fenômenos probabilísticos são restritivas. Programação estocástica permite o relaxamento de premissas como, por exemplo, a independência temporal, estacionariedade, distribuição normal e custos fixos ao longo do

horizonte de tempo. Enquanto que modelos determinísticos permitem que uma solução ótima seja obtida para um único cenário, modelos estocásticos são capazes de considerar o fenômeno estocástico de maneira abrangente ao considerar vários cenários.

De acordo com Higle (2005), o modelo de programação estocástica mais aplicado é o de dois estágios com recurso. Nesta técnica as variáveis de decisão do problema são divididas em dois conjuntos. As variáveis de primeiro estágio, também conhecidas como variáveis de projeto, correspondem àquelas decisões que precisam ser tomadas antes da realização da incerteza, também conhecidas como decisões do tipo aqui-e-agora. Em seguida, baseado nessas decisões e nas realizações dos eventos randômicos, as variáveis de recurso são consideradas no segundo estágio, que por sua vez estão ligadas a decisões de controle, também conhecidas como decisões do tipo espere-e-veja.

Em tais modelos, a incerteza é representada por um conjunto finito de cenários que buscam aproximar o fenômeno estocástico original. O tamanho de tal conjunto está intimamente ligado à qualidade da representação do fenômeno estocástico, mas é importante que seja observado que, quanto maior este conjunto, mais desafiador é o problema em termos de recursos computacionais. Nesse sentido, é importante que sejam usadas técnicas apropriadas que permitam a obtenção soluções boas o bastante em tempos computacionais que sejam aceitáveis na prática.

A pesquisa sobre projetos de redes da cadeia de suprimentos integrados à gestão de estoques estocásticos é relativamente nova. A maior parte da literatura existente concentra-se em redes logísticas de única camada. Utilizando programação estocástica, alguns trabalhos consideram redes multicamadas, como são os casos de Gupta e Maranas (2000), Santoso et al. (2005), Oliveira e Hamacher (2012) e Oliveira et al. (2013). Porém, apesar de considerarem gestão de estoques e projeto de cadeias de suprimentos de forma conjunta, esses trabalhos não trataram diretamente da política de controle de estoques. Contudo, Daskin et al. (2002), Shen et al. (2003) e You e Grossmann (2008) abordaram projetos de cadeias de suprimento e políticas de controle de estoques, sem, no entanto, utilizarem a técnica de programação estocástica. Adotando também a programação estocástica, Fattahi et al. (2014) propõem uma metodologia de controle de reposição e estoques para uma rede logística de duas camadas em série

baseado numa política de revisão contínua  $(s, S)$ , considerando um único item com demanda incerta.

O modelo geral de programação estocástica de dois estágios com recurso pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} \text{minimizar}_x \quad & c^T x + E_{\Omega} [Q(x, \xi)] \\ \text{sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

onde  $x \in R^n$  é o vetor das variáveis de decisão de primeiro estágio,  $c \in R^n$ ,  $b \in R^m$  e  $A \in R^{m \times n}$  são dados associados ao problema de primeiro estágio,  $\xi \in \Omega$  representa as possíveis realizações da incerteza e  $Q(x, \xi)$  é o valor ótimo do problema de segundo estágio dado por:

$$\begin{aligned} \text{minimizar}_y \quad & Q(x, \xi) = q^T y \\ \text{sujeito a} \quad & Wy = h - Tx \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

onde  $y \in R^m$  é o vetor das variáveis de decisão de segundo estágio e  $q, T, W, h$  contém os dados para o problema de segundo estágio que podem ser variáveis aleatórias com distribuições de probabilidade conhecidas, compondo o cenário  $\xi$ , em que  $T \in R^{q \times n}$ ,  $W \in R^{q \times p}$ ,  $q \in R^p$  e  $h \in R^m$ . No primeiro estágio efetua-se a minimização do custo de  $c^T x$  mais o valor esperado do problema de segundo estágio. As decisões tomadas no problema de segundo estágio consistem em uma “correção de rumo”, ou seja, em uma correção das decisões tomadas antes da incerteza ser revelada.

## 2.5. Aproximação por média amostral (SAA)

Nesta seção, descreve-se a técnica utilizada para representação finita e discreta do fenómeno aleatório contínuo, representado pelos níveis de demanda. Essa técnica foi implementada e aplicada a todos os processos estocásticos desta tese.

Parâmetros estocásticos que seguem distribuições contínuas impõem dificuldade na solução de problemas de otimização. Em particular, no problema

estudado, a dificuldade está associada na avaliação do valor esperado da função objetivo referente ao primeiro estágio representada em termos gerais por

$$\varphi(R, S, f) + E_{\Omega} [Q(R, S, f, \xi)], \quad (2.24)$$

onde  $\Omega$  é o conjunto de cenários,  $\xi \in \Omega$ , no total de  $N$  cenários distintos. Por simplificação, as frações de rateio são consideradas fixas para todos os cenários nesta seção. O entendimento completo da função objetivo se dará mais adiante no Capítulo 3 e 4, quando o modelo de programação estocástico é apresentado.

Para contornar tal dificuldade utilizou-se um método baseado em simulação de Monte Carlo, conhecido como *Sample Average Approximation* (SAA), (Santoso et al., 2005). A principal ideia por trás dessa técnica é buscar aproximar o valor da função objetivo, considerando a média das soluções do problema para instâncias compostas por  $M$  subconjuntos independentes de  $N$  cenários amostrados de forma sucessiva e independente.

Desta forma, a função objetivo do modelo do primeiro estágio, para cada subconjunto  $M$ , pode ser aproximada pelo seguinte problema:

$$\hat{g}_N = \text{minimizar} \left\{ \varphi(R, S, f) + \frac{1}{N} \sum_{n=1, \dots, N} Q(R, S, f, \xi^n) \right\}, \quad (2.25)$$

onde  $Q(R, S, \xi^n)$  é a função objetivo do modelo do segundo estágio a ser avaliada em cada subconjunto  $M$  e cenário  $\xi^n$ . Dada uma coleção de conjuntos de cenários gerada de forma independente por amostragem  $(\xi_j^1, \dots, \xi_j^N), j = 1, \dots, M$  tem-se:

$$\hat{g}_N^j = \text{minimizar} \varphi(R, S, f) + \frac{1}{N} \sum_{n=1, \dots, N} Q(R, S, f, \xi_j^n), \quad (2.26)$$

sendo a aproximação do valor da função objetivo do primeiro estágio representada pela expressão:

$$\hat{g}_{N,M} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \hat{g}_N^j \quad (2.27)$$

Para geração dos  $N$  cenários utilizou-se duas hipóteses:

- a) a demanda é representada por um processo estocástico estacionário de segunda ordem:

$$D(\xi)^p = a + \varepsilon^p, \quad \forall p, \forall \xi, \quad (2.28)$$

onde  $a$  é o nível (constante) da demanda e  $\varepsilon^p$  é o erro do modelo a cada período, o qual segue uma distribuição normal com média zero e variância  $\sigma^2$ .

b) a demanda é representada por um processo estocástico não estacionário dado por um passeio aleatório:

$$D(\xi)^p = D(\xi)^{p-1} + \varepsilon^p, \quad \forall p, \forall \xi, \quad (2.29)$$

onde  $\varepsilon^p$  é o erro correspondente a cada período que segue uma distribuição normal com média zero e variância  $\sigma_\varepsilon^2$ . Neste caso, a presença do termo  $D(\xi)^{p-1}$  implica dependência, o que faz com que o processo não seja estacionário.

Para cada cenário  $\xi$  e para cada conjunto de períodos  $p$ , tem-se uma possível curva de demanda.

Segundo Santoso et al. (2005) o valor esperado de  $\hat{g}_N$  é menor ou igual ao valor mínimo ótimo do problema e desde que  $\hat{g}_{N,M}$  seja um estimador não enviesado do valor esperado de  $\hat{g}_N$ , o valor esperado de  $\hat{g}_{N,M}$  também é menor que o valor mínimo ótimo do problema. Desta forma, o valor mínimo obtido por esta técnica, pode assim ser considerado como o limite inferior (*LI*) para o valor ótimo da função objetivo original.

Através da escolha de boas soluções viáveis do primeiro estágio ( $R', S', f'$ ), a solução da função objetivo do modelo do primeiro estágio pode ser aproximada pelo seguinte problema de SAA:

$$\hat{\varphi}_{N'} = \varphi(R', S', f') + \frac{1}{N'} \sum_{n=1, \dots, N'} Q(R', S', f', \xi^n). \quad (2.30)$$

dado  $(\xi_{j'}^1, \dots, \xi_{j'}^{N'})$ ,  $j' = 1, \dots, M'$ , tem-se:

$$\hat{\varphi}_{N'}^{j'} = \varphi(R', S', f') + \frac{1}{N'} \sum_{n=1, \dots, N'} Q(R', S', f', \xi_{j'}^n) \quad (2.31)$$

e, portanto,

$$\hat{\varphi}_{N', M'} = \frac{1}{M'} \sum_{j'=1}^{M'} \hat{\varphi}_{N'}^{j'} \quad (2.32)$$

onde  $N'$  é o tamanho da amostra, independente da amostra de tamanho  $N$ , usada para o cálculo de  $(R', S', f')$ . Pode-se ter  $N'$  muito maior que  $N$ , pois neste caso está se resolvendo  $N'$  subproblemas determinísticos independentes do segundo

estágio. Como o esforço computacional é bem menor, além de  $N' \gg N$ , pode-se ter  $M' \gg M$  numa tentativa de se reduzir os erros das estimativas.

Segundo Santoso et al. (2005),  $\hat{\varphi}_{N'}$  é um estimador não enviesado de  $\hat{\varphi}(R', S', f')$ . Desde que  $(R', S', f')$  sejam soluções viáveis do problema tem-se que  $\hat{\varphi}(R', S', f')$  é maior ou igual ao valor mínimo ótimo do problema. Mais uma vez, desde que  $\hat{\varphi}_{N', M'}$  seja um estimador não enviesado de  $\hat{\varphi}_{N'}$ ,  $\hat{\varphi}_{N', M'}$  também é maior ou igual ao valor mínimo ótimo do problema. Desta forma, o valor obtido para  $\hat{\varphi}_{N', M'}$ , pode assim ser considerado como o Limite Superior (LS) para o valor ótimo da função objetivo original.

Linderoth et al. (2006) mostram que usando esta técnica é possível obter limites inferiores e superiores para o valor ótimo e que tais limites convergem para o valor ótimo na medida em que se aumenta o valor de  $N$ .

Pelo Teorema Central do Limite e considerando um nível de confiança para a distribuição normal com média zero e variância  $\sigma_{LI}^2$  (e  $\sigma_{LS}^2$ ) dado por  $\alpha$ , onde  $P(z \leq z_\alpha) = 1 - \alpha$ , os intervalos de confiança (ICs) para  $LI$  e  $LS$  podem ser expressos respectivamente como:

$$\left[ LI - \frac{z_\alpha \sigma_{LI}}{\sqrt{M}}, LI + \frac{z_\alpha \sigma_{LI}}{\sqrt{M}} \right] \quad \text{e} \quad \left[ LS - \frac{z_\alpha \sigma_{LS}}{\sqrt{M'}}, LS + \frac{z_\alpha \sigma_{LS}}{\sqrt{M'}} \right],$$

onde  $\sigma_{LI}^2$  e  $\sigma_{LS}^2$  são respectivamente estimadores da variância de  $LI$  e  $LS$ . Como resultado da técnica SAA, além dos limites, foram calculados o gap de otimalidade e sua variância ( $\sigma_{gap}^2$ ), tal como:

$$gap = LS - LI \quad \text{e} \quad \sigma_{gap}^2 = \sigma_{LI}^2 + \sigma_{LS}^2.$$

Existem algumas formas de se estimar o número de cenários para se obter um valor que se aproxima do ótimo com uma determinada margem de erro, (Kleywegt et al., 2002, Shapiro e Homem-de-Melo, 1998). Uma delas é a utilização de algumas das ideias da técnica de amostragem, o que dá base estatística para obter o número de cenários.

Para tal, tem-se da equação (2.14), que  $\hat{g}_N$  é o mínimo do valor esperado da função objetivo, a qual é uma variável aleatória. Além disso,  $\hat{g}_N$  também é em si um estimador para o valor mínimo da função objetivo. Assim, pode-se pensar que, para cada um dos cenários  $\{\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^N\}$ , tem-se, para  $n = 1, \dots, N$ , que o valor esperado da função objetivo determinística é:

$$g_N(\xi^j) = \text{minimize } \{\varphi(R, S, f) + Q(R, S, f, \xi^n)\}, \quad (2.33)$$

com variância estimada segundo o estimador

$$\hat{\sigma}_N = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (\hat{g}_N - g_N(\xi^n))^2}{N-1}}. \quad (2.34)$$

E, novamente, usando o Teorema do Limite Central, pode-se definir um intervalo de confiança para o estimador  $\hat{g}_N$  do valor da função objetivo:

$$\left[ \hat{g}_N - \frac{Z_{\alpha/2} \hat{\sigma}_N}{\sqrt{N}}, \hat{g}_N + \frac{Z_{\alpha/2} \hat{\sigma}_N}{\sqrt{N}} \right].$$

Usando este intervalo de confiança de forma “reversa”, uma estimativa para o limite inferior do número de cenários necessários para aproximação da função objetivo é dado por:

$$N \geq \left( \frac{Z_{\alpha/2} \sigma_N}{(\beta/2) \hat{g}_N} \right)^2 \quad (2.35)$$

onde  $\beta \in [0,1]$ . Além do resultado teórico, na prática, a escolha do número de cenários leva em conta a troca entre o esforço computacional e a qualidade desejada da solução.

### 3 Modelagem do problema para sistema de uma camada

Este Capítulo tem como objetivo apresentar uma nova abordagem baseada em programação estocástica de dois estágios que permita determinar uma política de reposição e estoques de uma rede logística de uma camada com revisão periódica, a qual é muito utilizada em operações, tanto no varejo como na manufatura. Em tal política, é necessário determinar o melhor nível de investimento em estoque para atender o nível de serviço desejado e que minimize os custos relevantes totais.

Inicialmente, na Seção 3.1, será considerado o caso em que o objetivo é minimizar custos relevantes com inclusão do custo de falta considerando os casos de vendas perdidas (*lost sales*) e de atendimento com atraso (*backorders*), respectivamente nas Seções 3.1.1 e 3.1.2. Portanto, primeiro, será abordado o caso em que se considera vendas perdidas a um custo proporcional a  $b$ ; e em segundo, a prática de *backorder* será considerada, isto é, a quantidade demandada e não atendida em um ciclo incorrerá num custo proporcional a  $b$ , porém esta quantidade não atendida deverá ser atendida em ciclos subsequentes. Posteriormente, na Seção 3.2, será considerado o caso onde o objetivo é a minimização de custos relevantes com a inclusão de restrição de atendimento. Neste caso será considerada a prática do *backorder*.

Será usada a seguinte notação para diferenciar o objetivo dos modelos descritos a seguir: minimização de custos relevantes incluindo custo de falta ( $B_2$ ) e minimização de custos relevantes com inclusão de restrição de atendimento ( $P_2$ ).

#### 3.1. Modelo proposto para sistema de uma camada (PE): Modelo PE – $B_2$

Para modelar o problema de determinar os parâmetros ótimos do sistema  $(R, S)$ , é proposto um modelo baseado em programação estocástica de dois estágios com o objetivo de minimizar os custos relevantes (custo de encomendar, custo de

manter o estoque e custo de falta), de modo a satisfazer a demanda, quando possível, e considerar o balanço dos estoques ao longo do horizonte de planejamento. O equivalente determinístico (Higle, 2005) do modelo é formulado via programação não-linear inteira mista (PNLIM), o qual é em seguida linearizado de forma exata. A decisão do primeiro estágio diz respeito à determinação propriamente dos parâmetros  $(R, S)$ . A decisão de segundo estágio é relativa aos níveis dos estoques e às quantidades pedidas ao longo do tempo, que é influenciada diretamente pelas decisões do primeiro estágio e pela realização da incerteza na demanda. A incerteza do modelo é relativa aos níveis da demanda pelo único item proveniente dos clientes, que será modelada como uma variável aleatória que segue uma distribuição de probabilidade conhecida.

Quando não for possível atender plenamente a demanda em um período, inicialmente considera-se a venda como perdida no período. Posteriormente será apresentada uma versão do modelo onde são admitidas postergações do atendimento (*backorder*).

### 3.1.1. Vendas perdidas

Neste caso, o não atendimento imediato do pedido incorrerá num custo de falta  $b$ , proporcional à quantidade do item em falta. Este custo pode ser interpretado como uma perda de venda ou um atendimento emergencial de outro fornecedor. Porém, as quantidades do item em falta não serão consideradas nos próximos pedidos. É bom observar que, quando lidamos com *lost sales*, não faz sentido considerar o critério  $B_3$  (custo de falta por unidade por tempo).

#### 3.1.1.1. Notação

Conjuntos e índices

$P$	períodos, $p \in P = \{1, \dots, N_P\}$ ;
$\Omega$	cenários, $\xi \in \Omega$ , no total de $N$ cenários distintos.
$T$	períodos de revisão, $r \in T = \{1, \dots, N_R\}$ ;

## Parâmetros

$b^p$	custo de falta por unidade do item em falta no período $p$ ;
$C_F^p$	custo fixo de encomendar o item no período $p$ ;
$D(\xi)^p$	demanda pelo item no cenário $\xi$ no período $p$ ;
$h^p$	custo de manter em estoque uma unidade do item no período $p$ ;
$\overline{ITI}$	limite superior para a posição do estoque do item;
$\overline{S}$	limite superior para o nível máximo do estoque do item;
$w_p^r$	parâmetro auxiliar que indica o período em que ocorre um pedido; $w_p^r \in \{0,1\}$ $r = 1, \dots, N_R$ , $p = 1, \dots, N_P$ , que é elemento da matriz $W$ com dimensão $N_P \times N_R$ :

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

## Variáveis

$A(\xi)^p$	demanda atendida no cenário $\xi$ no período $p$ ;
$F(\xi)^p$	demanda não atendida no cenário $\xi$ no período $p$ ;
$I(\xi)^p$	estoque em mão no cenário $\xi$ no final do período $p$ ;
$IT(\xi)^p$	posição do estoque (estoque em mão mais pedidos pendentes) no cenário $\xi$ no final do período $p$ ;
$ITI(\xi)^p$	posição do estoque (estoque em mão mais pedidos pendentes) no cenário $\xi$ no início do período $p$ ;
$ITIV(\xi)^p$	variável auxiliar para a posição do estoque (estoque em mão mais pedidos pendentes) no cenário $\xi$ no início do período $p$ ;

$P(\xi)^p$	quantidade encomendada do item no cenário $\xi$ no início do período $p$ ;
$S$	nível alvo dos estoques do item ao longo do horizonte de tempo;
$SV^p$	variável auxiliar para o nível alvo dos estoques do item no período $p$ ;
$v^p$	indica se existe ou não uma encomenda do item no período $p$ ; $v^p \in \{0,1\}$ ;
$u^r$	variável auxiliar na determinação do tamanho de ciclo $R$ ; $u^r \in \{0,1\}$ ( $u^r = 1$ implica que $R = r$ ).

### 3.1.1.2. Problema de primeiro estágio

O problema de primeiro estágio diz respeito às decisões da periodicidade  $R$  e do nível alvo  $S$  a serem utilizadas no sistema de reposição e controle dos estoques, as quais devem ser tomadas antes da realização da incerteza com o objetivo de minimizar os custos de encomendar e o valor esperado dos custos de manter o estoque e de falta. O problema do primeiro estágio é modelado como um problema de programação linear inteira mista dado por:

$$\text{minimizar} \quad \sum_p CF^p v^p + E_{\Omega} [Q(R, S, \xi)] \quad (3.1)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_r u^r = 1 \quad (3.2)$$

$$\sum_r w_p^r u^r = v^p \quad \forall p \quad (3.3)$$

$$0 \leq S \leq \bar{S} \quad (3.4)$$

$$u^r \in \{0,1\} \quad \forall r \quad (3.5)$$

$$v^p \in \{0,1\} \quad \forall p. \quad (3.6)$$

A função objetivo a ser minimizada (3.1) modela o custo relevante total que depende do intervalo de revisão e do nível alvo que são calculados nos vários períodos discretos de tempo ao longo do período de planejamento. O primeiro termo diz respeito ao somatório dos custos fixos de encomendar ao longo do horizonte de planejamento considerado, já o segundo termo representa o valor esperado do custo de manter o estoque e de falta do problema de segundo estágio.

A restrição (3.2) indica que existe exatamente um único valor para o tamanho de ciclo  $R$  a ser determinado. Já as restrições em (3.3) indicam que o primeiro pedido sempre ocorre no início do primeiro período do horizonte de planejamento e os pedidos seguintes ocorrem a cada  $R$  períodos (por definição dos  $w_p^{r'}$ s, note que  $R = r$  quando  $u^r = 1$ ), ao fixar  $v^p = 1$  toda vez que um pedido ocorre no período  $p$ . As restrições (3.4) impõem limites inferior e superior para a variável real que representa o nível máximo dos estoques. Finalmente, em (3.5) e (3.6), as variáveis  $u^r$  e  $v^p$  são definidas como binárias.

### 3.1.1.3. Problema de segundo estágio

O problema de segundo estágio visa minimizar o custo de manter o estoque e o custo de falta ao longo do horizonte de planejamento, face às escolhas de  $R$  e  $S$  no primeiro estágio e uma dada realização  $\xi$  do parâmetro incerto, de modo a satisfazer as demandas dos períodos. Para cada cenário  $\xi \in \Omega$ , o problema de segundo estágio é dado por:

$$\text{minimizar } Q(R, S, \xi) = \sum_p (h^p I(\xi)^p + b^p F(\xi)^p) \quad (3.7)$$

$$\text{sujeito a } I(\xi)^{p-1} + P(\xi)^{p-L} = I(\xi)^p + A(\xi)^p \quad \forall p \geq L \quad (3.8)$$

$$I(\xi)^{p-1} = I(\xi)^p + A(\xi)^p \quad \forall p < L \quad (3.9)$$

$$IT(\xi)^{p-1} + P(\xi)^p = IT(\xi)^p + A(\xi)^p \quad \forall p \quad (3.10)$$

$$A(\xi)^p + F(\xi)^p = D(\xi)^p \quad \forall p \quad (3.11)$$

$$P(\xi)^p = (S - IT(\xi)^{p-1}) v^p \quad \forall p \quad (3.12)$$

$$A(\xi)^p, I(\xi)^p, IT(\xi)^p, P(\xi)^p \geq 0 \quad \forall p \quad (3.13)$$

$$A(\xi)^0 = I(\xi)^0, IT(\xi)^0, P(\xi)^0 = 0 \quad (3.14)$$

Na função objetivo (3.7), o termo  $\sum_p h^p I(\xi)^p$  representa o custo de manter o estoque que considera o nível do estoque em mão existente ao final de cada período  $p$ , enquanto que o termo  $\sum_p b^p F(\xi)^p$  representa o custo do não atendimento da demanda, ou seja, o custo de falta ao longo do horizonte de planejamento. O somatório dos custos de estocar e de falta é minimizado ao longo dos períodos.

As restrições (3.8) e (3.9) representam o balanço dos estoques em mão do item de um período para o seguinte, em cada cenário  $\xi$ . A restrição (3.10) representa o balanço das posições do estoque do item de um período para o seguinte, em cada cenário  $\xi$ . Em relação a (3.10), lembre-se que o primeiro pedido é feito no início do horizonte de tempo.

A restrição (3.11) define o atendimento ou não da demanda em cada período, para cada cenário  $\xi$ . A restrição (3.12) representa as quantidades a serem pedidas no início de cada período  $p$  para certo cenário  $\xi$ . A quantidade a ser pedida no início do período  $p$  deve ser igual ao nível alvo  $S$  menos a posição do estoque no início do período  $p$  (que é igual a posição do estoque no final do período  $p - 1$ ) no início de cada ciclo (indicado quando  $v^p = 1$ ), caso contrário, é igual a zero. A restrição (3.13) impõe não-negatividade das variáveis pedido, atendimento, estoque em mão e estoque total. A restrição (3.14) inicializa as variáveis pedido, atendimento, estoque em mão e estoque total. No Capítulo 5 será discutido a inicialização dos níveis de estoque ( $I(\xi)^0, IT(\xi)^0$ ).

O equivalente determinístico do modelo relativo ao problema de programação estocástica de dois estágios é dado por (3.1)-(3.6) e por  $|\Omega|$  replicações de (3.7)-(3.14). Pode-se notar que a restrição (3.12) torna o modelo um PNLIM, pertencente a uma classe de problemas conhecida por sua notável complexidade computacional em termos de obtenção de soluções ótimas. Para contornar esta dificuldade, pode-se proceder de duas maneiras para resolver o problema usando programação linear. A primeira alternativa se dá fixando o valor do ciclo, ou seja,  $R$ . Quando isto é feito, a variável binária  $v^p$  passa a ser um parâmetro fixo e conhecido, tornando linear a expressão (3.12) do problema. Para encontrar os valores ótimos  $R^*$  e  $S^*$ , teremos que simular uma quantidade finita de estimativas  $R_j^*$ , calcular os respectivos  $S_j^*$  e verificar o par  $(R_j^*, S_j^*)$  que gera o melhor resultado para  $Q(R_j^*, S_j^*, \xi)$ . A dificuldade em se proceder desta forma é

que, caso se queira expandir tal solução para um problema multicamadas, o esforço computacional aumentaria significativamente. Por exemplo, se consideramos apenas duas camadas, ambas com a mesma quantidade finita  $N_R$  de possíveis valores para  $R$ , se fazem necessários avaliar  $N_R^{N_R}$  casos.

De forma a obter uma versão tratável do modelo proposto, como segunda alternativa, foi desenvolvida uma versão linearizada do problema para tratar especificamente da restrição (3.12), em que um termo não-linear está presente (uma variável binária é multiplicada por uma variável contínua). Primeiramente é introduzida a variável  $ITI(\xi)^p$ , que representa a posição do estoque no início do período  $p$  para certo cenário  $\xi$ . Como  $ITI(\xi)^p = IT(\xi)^{p-1}$ , a restrição (3.12) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$P(\xi)^p = Sv^p - ITI(\xi)^p v^p \quad \forall p.$$

A linearização da restrição (3.12) é feita através da substituição da expressão (3.12) pelas expressões (3.15) a (3.22), além da introdução das restrições de não-negatividade para as variáveis auxiliares  $SV^p, ITI(\xi)^p$  e  $ITIV(\xi)^p$ , resultando no seguinte problema de programação linear inteira mista para o modelo do segundo estágio:

*minimizar* (3.7)

*sujeito a* (3.8) – (3.11); (3.14)

$$P(\xi)^p = SV^p - ITIV(\xi)^p \quad \forall p \quad (3.15)$$

$$SV^p \leq \bar{S}v^p \quad \forall p \quad (3.16)$$

$$SV^p \leq S \quad \forall p \quad (3.17)$$

$$SV^p \geq S - \bar{S}(1 - v^p) \quad \forall p \quad (3.18)$$

$$ITIV(\xi)^p \leq \bar{IT}v^p \quad \forall p \quad (3.19)$$

$$ITIV(\xi)^p \leq ITI(\xi)^p \quad \forall p \quad (3.20)$$

$$ITIV(\xi)^p \geq ITI(\xi)^p - \bar{IT}(1 - v^p) \quad \forall p \quad (3.21)$$

$$ITI(\xi)^p = IT(\xi)^{p-1} \quad \forall p \quad (3.22)$$

$$A(\xi)^p, I(\xi)^p, IT(\xi)^p, ITI(\xi)^p, ITIV(\xi)^p, \quad \forall p \quad (3.23)$$

$$P(\xi)^p, SV^p \geq 0$$

Finalmente, o equivalente determinístico do modelo relativo ao problema de programação estocástica de dois estágios é dado por (3.1)-(3.6) e por  $|\Omega|$  replicações de (3.7)-(3.11); (3.14)-(3.23).

### 3.1.2. Considerando *backorder*

Neste caso, será considerado o caso em que o não atendimento imediato será postergado até existir estoque para fazê-lo. Da mesma forma que no caso de venda perdida, esta falta incorrerá num custo  $b$ . Este custo pode ser interpretado como uma perda de venda imediata. Porém, os valores faltantes serão considerados nos próximos pedidos. É bom observar que quando lidamos com *backorders*, diferentemente de *lost sales*, além do critério  $B_2$  (custo de falta por unidade), pode-se considerar o critério  $B_3$  (custo de falta por unidade por período).

Para considerar a prática de *backlogging* na abordagem proposta, ao invés de vendas perdidas, apenas com o critério  $B_2$ , a função objetivo (3.7) e as restrições (3.10) e (3.11) devem ser alteradas para

$$Q(R, S, \xi) = \sum_p (h^p I(\xi)^p + b^p F'(\xi)^p) \quad (3.7')$$

$$IT(\xi)^{p-1} + P(\xi)^p = IT(\xi)^p + D(\xi)^p \quad \forall p, \quad (3.24)$$

$$A(\xi)^p + F(\xi)^p = D(\xi)^p + F(\xi)^{p-1} \quad \forall p, \quad (3.25)$$

onde  $F'(\xi)^p = \sum_p F(\xi)^p - \sum_p F(\xi)^{p-1}$ . Estas alterações garantem que, se parte da demanda não for atendida num ciclo corrente, então ela será atendida num ciclo subsequente, uma vez que estamos somando a quantidade do item faltante ( $F(\xi)^p$ ) em períodos posteriores. As restrições de balanço (3.24) e (3.25) foram adaptadas para que o montante do item em falta fosse considerado.

Cabe destacar que o modelo apresentado considera que a incerteza esteja apenas na demanda. No entanto, a sua adaptação para a consideração de incertezas

em seus demais parâmetros se dá de maneira trivial, bastando que os mesmos passem a ser indexados pelo índice de cenários  $\xi$ .

### 3.2.

#### Modelo proposto para sistema de uma camada: Modelo $PE - P_2$

Como foi visto na Seção 3.1.1.3, o problema de segundo estágio visa minimizar o custo de manter o estoque e o custo de falta ao longo do horizonte de planejamento, face às escolhas de  $R$  e  $S$  e uma dada realização  $\xi$  do parâmetro incerto, de modo a satisfazer as demandas nos períodos.

Porém, dada a dificuldade em atribuir valores numéricos aos custos de falta, o modelo do segundo estágio (3.7)-(3.14) será alterado de modo a considerar um nível de atendimento satisfatório da demanda. Assim, o objetivo do modelo passa a ser minimizar o custo de manter o estoque durante um número finito de períodos, sujeito à restrição adicional de que o valor esperado da fração das demandas atendidas seja maior ou igual a um valor pré-estabelecido gerencialmente. Além disso, será considerado que demandas não atendidas prontamente serão atendidas em períodos posteriores (*backorder*).

Além de considerar a notação já sendo usada, considere ainda a seguinte notação adicional:

$XCL(\xi)^p$  indica se existe ou não falta do item em estoque no período  $p$ ;  $XCL(\xi)^p \in \{0,1\}$ ;

$\bar{f}$  valor esperado da fração das demandas atendidas prontamente.

Neste caso, o problema de primeiro estágio permanece o mesmo e o modelo de segundo estágio passa a ser:

$$\text{minimizar} \quad Q(R, S, \xi) = \sum_p h^p I(\xi)^p \quad (3.26)$$

sujeito a  $(3.8) - (3.9); (3.12) - (3.14)$

$$\sum_{p,\xi} Pr(\xi)F'(\xi)^p / \sum_{p,\xi} D(\xi)^p \leq 1 - \bar{f} \quad (3.27)$$

$$F(\xi)^p \leq (\bar{S})XCL(\xi)^p \quad \forall p \quad (3.28)$$

$$I(\xi)^p \leq (\bar{S})(1 - XCL(\xi)^p) \quad \forall p \quad (3.29)$$

$$XCL(\xi)^p \in \{0,1\} \quad \forall p \quad (3.30)$$

Como pode ser notado, não existe mais a parcela referente ao custo de falta na função objetivo e a restrição (3.27) é adicionada para garantir o nível de serviço desejado. Além disso, é necessário incluir no modelo as restrições (3.28) a (3.30) que garantem que quando há falta do item num período não pode haver estoque.

## 4 Modelagem do problema considerando um sistema de duas camadas

Este Capítulo tem como objetivo apresentar uma nova abordagem baseada em programação estocástica de dois estágios que permita determinar uma política de reposição e estoques de uma rede logística de duas camadas com revisão periódica, a qual é muito utilizada em operações, tanto no varejo como na manufatura. Em tal política, é necessário determinar o melhor nível de investimento em estoque para atender o nível de serviço desejado e que minimize os custos relevantes totais.

Inicialmente, nas Seções 4.1 e 4.2, serão considerados os casos em que o objetivo é minimizar o custo. Posteriormente, na Seção 4.3, será considerado o caso em que o objetivo é minimização de custos relevantes com inclusão de restrição de atendimento.

Antes de abordar a metodologia proposta para resolver o problema em questão na Seção 4.2, será tratado primeiramente na Seção 4.1 o caso de uma rede logística de duas camadas em série, que é um caso particular de uma rede de duas camadas arborescente, em que se considera um CD e um varejista. Esta abordagem servirá de ponto de partida para o desenvolvimento da metodologia proposta.

Para o caso da rede CD-varejista, serão propostas duas abordagens, a primeira apresentada na Seção 4.1.1, mais restrita, em que o horizonte de planejamento é infinito e os períodos de revisão ( $R_0$  e  $R_i$ ),  $i = \{1\}$  são sabidos e iguais para o CD e o varejista e as demandas são consideradas estacionárias. Neste caso, como existe uma solução fechada na literatura (referenciado por AX), este será usada como referencial de validação para a metodologia proposta. Na outra abordagem, apresentada nas Seções 4.1.2 e 4.1.3, mais geral, será considerado um horizonte de planejamento finito e  $R_0$  como um múltiplo de  $R_i$ .

Em particular, para os métodos atualmente disponíveis na literatura capazes de resolver o problema definido acima, é necessário que se suponha que as

demandas sejam variáveis aleatórias independentes entre os períodos e que o processo seja estacionário. Ressalta-se porém que, para a metodologia proposta, tais suposições não precisam ser verdadeira.

#### 4.1.

#### **Modelo proposto para um sistema de duas camadas em série - $B_3$**

Tanto o CD quanto o varejista utilizam o sistema de reposição e controle de estoques  $(R_0, S_0)$  e  $(R_1, S_1)$ , para o item considerado, onde  $R_0$  e  $R_1$  denotam respectivamente o intervalo entre encomendas no CD e no varejista, e  $S_0$  e  $S_1$  denotam respectivamente o nível alvo de estoque de camada do item no CD e no varejista.

Nesta Seção, é abordada a metodologia proposta para determinar os valores ótimos de  $(R_0, S_0)$  e  $(R_1, S_1)$ , via um modelo de programação estocástica de dois estágios para um sistema de distribuição de duas camadas em série. Visando a sua validação, a metodologia proposta foi implementada e aplicada a uma instância conhecida, de forma a ser possível comparar os resultados numéricos com os resultados do modelo proposto por Axsäter (2006).

##### 4.1.1.

#### **Modelo proposto para um sistema de duas camadas em série restrito (SR): Modelo SR- $B_3$**

Nesta formulação do problema mais restrita, são considerados um horizonte de planejamento infinito, intervalos de tempo entre revisões conhecidos e iguais para o CD e um único varejista e custos de manter estoque e de falta conhecidos e constantes. Para modelar o problema de determinar os parâmetros ótimos  $S_0$  e  $S_1$  da política de reposição e controle de estoques, é proposto um modelo baseado em programação estocástica de dois estágios com o objetivo de minimizar os custos relevantes (custo de manter estoque e custo de falta), de modo a satisfazer a demanda dos clientes e considerar o balanço dos estoques. O equivalente determinístico do modelo é formulado via programação linear inteira mista (PLIM). A decisão do primeiro estágio diz respeito, somente, à determinação

propriamente dos parâmetros  $S_0$  e  $S_1$ , uma vez que as periodicidades são pré-definidas, não sendo variáveis de decisão do modelo. A decisão de segundo estágio é relativa aos níveis dos estoques e às quantidades pedidas ao longo do tempo, que é influenciada diretamente pelas decisões do primeiro estágio e pela realização da incerteza. A incerteza do modelo é relativa aos níveis da demanda no varejista pelo único item proveniente dos clientes, que será modelada como uma variável aleatória que segue uma distribuição de probabilidade conhecida.

#### 4.1.1.1. Notação

Conjunto e índices

$\Omega$  cenários,  $\xi \in \Omega$ ;

Parâmetros

$L_0$  tempo de reposição no CD

$L_1$  tempo de reposição no varejista

$b_1$  custo de falta no varejista por unidade do item em falta por período;

$D_{L_1+1}(\xi)$  demanda pelo item no cenário  $\xi$  durante  $L_1 + 1$ ;

$D_{L_0}(\xi)$  demanda pelo item no cenário  $\xi$  durante  $L_0$ ;

$h_0$  custo do CD de manter em estoque uma unidade do item por período;

$h_1$  custo do varejista de manter em estoque uma unidade do item por período;

$\bar{S}$  limite superior da posição do estoque do item;

Variáveis

$A_0(\xi)$  Quantidade do item atendida pelo CD ao varejista no cenário  $\xi$ ;

$A_1(\xi)$  Quantidade do item atendida pelo varejista da demanda no cenário  $\xi$ ;

$F_0(\xi)$  Quantidade do item em falta no atendimento do CD ao varejista no cenário  $\xi$ ;

$F_1(\xi)$  Quantidade do item em falta no atendimento do varejista da demanda no cenário  $\xi$ ;

$I_0(\xi)$  estoque em mão no CD no cenário  $\xi$  no final do período;

$I_1(\xi)$	estoque em mão no varejista no cenário $\xi$ no final do período;
$S_0$	nível alvo do CD;
$S_1$	nível alvo do varejista;
$X(\xi)$	indica se existe falta ou estoque do item no CD, $X(\xi) \in \{0,1\}$ ;
$I_0^e(\xi)$	estoque de camada do CD no início do período no cenário $\xi$

#### 4.1.1.2.

#### Problema de primeiro estágio

O problema de primeiro estágio diz respeito às decisões dos níveis alvos  $S_0$  e  $S_1$  a serem utilizadas no sistema de controle e reposição dos estoques, as quais devem ser tomadas antes da realização da incerteza com o objetivo de minimizar o valor esperado dos custos de manter o estoque e de falta. O problema do primeiro estágio é modelado como um problema de programação linear dado por:

$$\text{minimizar} \quad E_{\Omega} [Q(S_0, S_1, \xi)] \quad (4.1)$$

$$\text{sujeito a} \quad 0 \leq S_0 \leq \bar{S} \quad (4.2)$$

$$0 \leq S_1 \leq \bar{S} \quad (4.3)$$

A função objetivo a ser minimizada (4.1) modela o custo total das encomendas que é em função dos níveis alvos de estoques que se deseja ter no CD e no varejista. Como neste caso a periodicidade é fixa, o primeiro termo que aparece em (3.1), que diz respeito ao somatório dos custos fixos de encomendar ao longo do horizonte de planejamento, passa a ser irrelevante, pois o mesmo é constante. Já o termo  $E_{\Omega} [Q(S_0, S_1, \xi)]$  representa o valor esperado do custo do problema de segundo estágio.

As restrições (4.2) e (4.3) impõem limites inferior e superior para as variáveis reais que representam os níveis alvos dos estoques.

### 4.1.1.3. Problema de segundo estágio

O problema de segundo estágio visa minimizar o custo de manter estoque e o custo de falta ao longo do horizonte de planejamento, face às escolhas de  $S_0$  e  $S_1$  para uma dada realização  $\xi$  do parâmetro incerto, de modo a satisfazer as demandas. Para cada cenário  $\xi \in \Omega$ , o problema de segundo estágio é dado por:

$$\text{minimizar } Q(S_0, S_1, \xi) = \sum_{\xi} (h_0 I_0(\xi) + h_1 I_1(\xi) + b_1 F_1(\xi)) \quad (4.4)$$

$$\text{sujeito a } S_0 - D_{L_0}(\xi) = I_0^e(\xi) \quad \forall \xi \quad (4.5)$$

$$I_0^e(\xi) - S_1 = I_0(\xi) - F_0(\xi) \quad \forall \xi \quad (4.6)$$

$$I_0(\xi) = I_0^e(\xi) - A_0(\xi) \quad \forall \xi \quad (4.7)$$

$$A_0(\xi) - D_{L_1+1}(\xi) = I_1(\xi) - F_1(\xi) \quad \forall \xi \quad (4.8)$$

$$I_1(\xi) = A_0(\xi) - A_1(\xi) \quad \forall \xi \quad (4.9)$$

$$A_1(\xi) + F_1(\xi) = D_{L_1+1}(\xi) \quad \forall \xi \quad (4.10)$$

$$A_0(\xi) + F_0(\xi) = S_1 \quad \forall \xi \quad (4.11)$$

$$I_0(\xi) \leq \bar{S}X(\xi) \quad \forall \xi \quad (4.12)$$

$$F_0(\xi) \leq \bar{S}(1 - X(\xi)) \quad \forall \xi \quad (4.13)$$

$$A_0(\xi), A_1(\xi), F_0(\xi), F_1(\xi), I_0(\xi), I_1(\xi), I_0^e(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \quad (4.14)$$

$$X(\xi) \in \{0,1\} \quad \forall \xi \quad (4.15)$$

Na função objetivo (4.4), o termo  $\sum_{\xi} (h_0 I_0(\xi) + h_1 I_1(\xi))$  representa o custo de manter estoque em mão existente respectivamente no CD e no varejista, enquanto que o termo  $\sum_{\xi} b_1 F_1(\xi)$  representa o custo de falta devido ao não atendimento da demanda pelo varejista. O somatório dos custos de manter estoque e de falta é minimizado.

A restrição (4.5) quantifica o estoque de camada do CD, para cada cenário, como sendo igual a posição máxima de estoque de camada do CD menos a demanda durante o tempo de reposição do CD. As restrições (4.6), (4.12), (4.13) e (4.15) modelam o balanço dos estoques de camada do CD. Quando  $X(\xi)$  for

igual a 1 significa que o estoque a mão no CD foi suficiente para atender o varejista. Caso contrário, quando  $X(\xi)$  for igual a 0, significa que esse estoque não foi suficiente, e conseqüentemente houve falta de atendimento do CD ao varejista. Como a falta do item em estoque no varejo tem um custo, o modelo não permite que haja estoque e falta simultaneamente, não sendo necessário incluir restrições equivalentes a (4.12) e (4.13) para o caso do estoque a mão do varejista.

Da restrição (4.7) tem-se que o estoque em mão no CD é dado pela diferença entre o estoque de camada do CD inicial e o atendimento do CD ao varejista.

A restrição (4.8) relaciona o atendimento do CD com o atendimento da demanda no varejista.

Da restrição (4.9) tem-se que o estoque a mão no varejista é dado pela diferença entre o atendimento do CD menos o atendimento do varejista.

A restrição (4.10) é consequência das restrições (4.8) e (4.9) e representa o atendimento da demanda no varejista. Já a restrição (4.11) é consequência das restrições (4.6) e (4.7) e representa o atendimento dos pedidos do varejista.

A restrição (4.14) impõe a não-negatividade das variáveis atendimento, falta, estoque a mão e estoque de camada.

O equivalente determinístico do modelo relativo ao problema de programação estocástica de dois estágios é dado por (4.1)-(4.3) e por  $|\Omega|$  replicações de (4.4)-(4.15).

#### 4.1.2.

#### **Modelo proposto para um sistema de duas camadas em série geral (SG): Modelo SG - $B_3$**

Nesta formulação do problema mais geral, determinam-se os parâmetros ótimos  $(R_0, S_0)$  e  $(R_1, S_1)$  do sistema de reposição e controle de estoques de duas camadas em série ao longo de um horizonte de planejamento com número finito e uniforme de períodos e  $R_0$  e  $R_1$  como um múltiplo de  $p$ . Mais uma vez é proposto um modelo baseado em programação estocástica de dois estágios com o objetivo de minimizar os custos relevantes (custo de encomendar, custo de manter o estoque e custo de falta), de modo a satisfazer a demanda e considerar o balanço dos estoques ao longo do horizonte de planejamento. O equivalente determinístico

do modelo é formulado via PNLIM, o qual é em seguida linearizado de maneira exata. Diferentemente do modelo mais restrito, onde os parâmetros  $R_0$  e  $R_1$  não eram variáveis de decisão do modelo, neste modelo mais geral a decisão do primeiro estágio diz respeito à determinação propriamente dos parâmetros  $(R_0, S_0)$  e  $(R_1, S_1)$ . A decisão de segundo estágio é relativa aos níveis dos estoques e às quantidades pedidas ao longo do horizonte de planejamento, que é influenciada diretamente pelas decisões do primeiro estágio e pela realização da incerteza. A incerteza do modelo é relativa aos níveis da demanda pelo único item proveniente dos clientes, que será modelada como uma variável aleatória que segue uma distribuição de probabilidade conhecida.

#### 4.1.2.1. Notação

##### Conjuntos e índices

$P$	períodos, $p \in P = \{1, \dots, N_P\}$ ;
$\Omega$	cenários, $\xi \in \Omega$ ;
$T_0$	Tempos entre reposições no CD, $r_0 \in T_0 = \{1, \dots, N_{R_0}\}$ ;
$T_1$	Tempos entre reposições no varejista, $r_1 \in T_1 = \{1, \dots, N_{R_1}\}$ ;

##### Parâmetros

$b_1^p$	custo de falta por unidade do item em falta no período $p$ do varejista 1;
$C_{F0}^p$	custo fixo do CD de encomendar o item no período $p$ ;
$C_{F1}^p$	custo fixo do varejista de encomendar o item no período $p$ ;
$D(\xi)_1^p$	demanda pelo item no cenário $\xi$ no período $p$ do varejo;
$h_1^p$	custo de manter em estoque uma unidade do item no período $p$ do varejo;
$h_0^p$	custo de manter em estoque uma unidade do item no período $p$ do CD;
$\overline{IT}$	limite superior da posição do estoque do item;
$\overline{S}$	limite superior do nível alvo do item;

$w_{0,p}^{r_0}$	parâmetro auxiliar que indica o período em que ocorre um pedido no CD; dependente de $r_0$ ; $w_{0,p}^{r_0} \in \{0,1\}$ ; $r_0 = 1, \dots, N_{R_0}$ ; $p = 1, \dots, N_p$ ;
$w_{1,p}^{r_1}$	parâmetro auxiliar que indica o período em que ocorre um pedido no varejista; dependente de $r_1$ ; $w_{1,p}^{r_1} \in \{0,1\}$ ; $r_1 = 1, \dots, N_{R_i}$ ; $p = 1, \dots, N_p$ ;

## Variáveis

$A(\xi)_1^p$	demanda acumulada atendida pelo varejista no cenário $\xi$ no período $p$ ;
$A(\xi)_0^p$	Pedido acumulado do varejista atendido pelo CD no cenário $\xi$ no período $p$ ;
$F(\xi)_1^p$	demanda não atendida acumulada pelo varejista no cenário $\xi$ no período $p$ ;
$F(\xi)_0^p$	pedido do varejista acumulado não atendido pelo CD no cenário $\xi$ no período $p$ ;
$I(\xi)_1^p$	estoque em mão no varejista no cenário $\xi$ no final do período $p$ ;
$I(\xi)_0^p$	estoque em mão no CD no cenário $\xi$ no final do período $p$ ;
$I^e(\xi)_1^p$	estoque de camada do varejista no cenário $\xi$ no final do período $p$ ;
$I^e(\xi)_0^p$	estoque de camada do CD no cenário $\xi$ no final do período $p$ ;
$I_I^e(\xi)_0^p$	estoque de camada do CD no cenário $\xi$ no início do período $p$ ;
$I_I^e(\xi)_1^p$	estoque de camada do varejista no cenário $\xi$ no início do período $p$ ;
$IV_I^e(\xi)_0^p$	variável auxiliar para o estoque de camada do CD no cenário $\xi$ no início do período $p$ ;
$IV_I^e(\xi)_1^p$	variável auxiliar para o estoque de camada do varejista no cenário $\xi$ no início do período $p$ ;
$P(\xi)_1^p$	quantidade encomendada do item pelo varejista $i$ no cenário $\xi$ no início do período $p$ ;
$P(\xi)_0^p$	quantidade encomendada do item pelo CD no cenário $\xi$ no início do período $p$ ;

$SV_0^p$	variável auxiliar para o nível alvo dos estoques no CD do item no período $p$ ;
$v_0^p$	indica se existe ou não uma encomenda do item no CD no período $p$ ; $v_0^p \in \{0,1\}$ ;
$u_0^{r_0}$	variável auxiliar na determinação do tamanho de ciclo $R_0$ ; $u_0^{r_0} \in \{0,1\}$ .
$X(\xi)_0^p$	indica se existe falta ou estoque a mão no CD no cenário $\xi$ no final do período $p$ ; $X(\xi)_0^p \in \{0,1\}$ ;
$SV_1^p$	variável auxiliar para o nível alvo dos estoques no varejista do item no período $p$ ;
$v_1^p$	indica se existe ou não uma encomenda do item no varejista no período $p$ ; $v_1^p \in \{0,1\}$ ;
$u_1^{r_1}$	variável auxiliar na determinação de $R_1$ ; $u_1^{r_1} \in \{0,1\}$ .

#### 4.1.2.2. Problema de primeiro estágio

O problema do primeiro estágio diz respeito às decisões das periodicidades  $R_0$  e  $R_1$  e dos níveis alvos  $S_0$  e  $S_1$  a serem utilizadas nos sistemas de reposição e controle de estoques, as quais devem ser tomadas antes da realização da incerteza, visando minimizar os custos de encomendar e o valor esperado dos custos de manter o estoque e de falta. O problema do primeiro estágio é modelado como um problema de programação linear inteira mista dado por:

$$\text{minimizar} \quad \sum_p (C_{F_0}^p v_0^p + C_{F_1}^p v_1^p) + E_{\Omega} [Q(R_0, R_1, S_0, S_1, \xi)] \quad (4.16)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{r_0} u_0^{r_0} = 1 \quad (4.17)$$

$$\sum_{r_1} u_1^{r_1} = 1 \quad (4.18)$$

$$\sum_{r_0} w_{0,p}^{r_0} u_0^{r_0} = v_0^p \quad \forall p \quad (4.19)$$

$$\sum_{r_1} w_{1,p}^{r_1} u_1^{r_1} = v_1^p \quad \forall p \quad (4.20)$$

$$0 \leq S_0 \leq \bar{S} \quad (4.21)$$

$$0 \leq S_1 \leq \bar{S} \quad (4.22)$$

$$u_0^{r_0}, u_1^{r_1} \in \{0,1\} \quad \forall r_0, r_1 \quad (4.23)$$

$$v_0^p, v_1^p \in \{0,1\} \quad \forall p. \quad (4.24)$$

A expressão (4.16) modela o custo total a ser minimizado. Os dois primeiros termos dizem respeito ao somatório dos custos fixos de encomendar do CD e do varejista ao longo do horizonte de planejamento considerado, enquanto o segundo termo, representa o valor esperado do custo do problema de segundo estágio.

As restrições (4.17) e (4.18) forçam que existam exatamente um único valor para o tamanho do ciclo  $R_0$  e um único valor para o tamanho do ciclo  $R_1$  a serem determinados ( $R_0 = r_0 \in T_0 = \{1, \dots, N_{R_0}\}$  e  $R_1 = r_1 \in T_1 = \{1, \dots, N_{R_1}\}$ , quando  $u_0^{r_0} = 1$  e  $u_1^{r_1} = 1$ ). Já as restrições em (4.18) e (4.19) indicam que as encomendas ocorrem a cada  $R_0$  intervalo de tempo no CD e a cada intervalo  $R_1$  intervalo de tempo no varejista sempre no primeiro período do horizonte de planejamento (de acordo com os valores dos parâmetros  $w_{0,p}^{r_0}$  e  $w_{1,p}^{r_1}$ ). As restrições (4.21) e (4.22) impõem limites inferior e superior para as variáveis reais que representam respectivamente os níveis máximos dos estoques no CD e no varejista. Finalmente, em (4.23) e (4.24), as variáveis  $u_0^{r_0}$ ,  $u_1^{r_1}$ ,  $v_0^p$  e  $v_1^p$  são definidas como binárias.

#### 4.1.2.3. Problema de segundo estágio

O problema de segundo estágio visa minimizar os custos de manter estoque e os custos de falta ao longo do horizonte de planejamento, face às escolhas de  $R_0, R_1, S_0$  e  $S_1$  para uma dada realização  $\xi$  do parâmetro incerto, de modo a satisfazer as demandas dos períodos. Para cada cenário  $\xi \in \Omega$ , o problema de segundo estágio é dado por:

$$\text{minimizar } \sum_p (h_0^p I(\xi)_0^p + h_1^p I(\xi)_1^p + b_1^p F(\xi)_1^p) \quad (4.25)$$

$$\text{sujeito a } I(\xi)_1^{p-1} + A(\xi)_0^{p-L_1} = I(\xi)_1^p + A(\xi)_1^p \quad \forall p \geq L_1 \quad (4.26)$$

$$I(\xi)_1^{p-1} = I(\xi)_1^p + A(\xi)_1^p \quad \forall p < L_1 \quad (4.27)$$

$$I(\xi)_0^{p-1} + P(\xi)_0^{p-L_0} = I(\xi)_0^p + A(\xi)_0^p \quad \forall p \geq L_0 \quad (4.28)$$

$$I(\xi)_0^{p-1} = I(\xi)_0^p + A(\xi)_0^p \quad \forall p < L_0 \quad (4.29)$$

$$I^e(\xi)_1^{p-1} + P(\xi)_1^p = I^e(\xi)_1^p + D(\xi)_1^p \quad \forall p \quad (4.30)$$

$$I^e(\xi)_0^{p-1} + P(\xi)_0^p = I^e(\xi)_0^p + P(\xi)_1^p \quad \forall p \quad (4.31)$$

$$A(\xi)_1^p + F(\xi)_1^p = D(\xi)_1^p + F(\xi)_1^{p-1} \quad \forall p \quad (4.32)$$

$$A(\xi)_0^p + F(\xi)_0^p = P(\xi)_1^p + F(\xi)_0^{p-1} \quad \forall p \quad (4.33)$$

$$P(\xi)_1^p = (S_1 - I^e(\xi)_1^{p-1})v_1^p \quad \forall p \quad (4.34)$$

$$P(\xi)_0^p = (S_0 - I^e(\xi)_0^{p-1})v_0^p \quad \forall p \quad (4.35)$$

$$I(\xi)_0^p \leq \bar{S}X(\xi)_0^p \quad \forall p \quad (4.36)$$

$$F(\xi)_0^p \leq \bar{S}(1 - X(\xi)_0^p) \quad \forall p \quad (4.37)$$

$$P(\xi)_1^p, P(\xi)_0^p, A(\xi)_1^p, A(\xi)_0^p, F(\xi)_0^p, F(\xi)_1^p, \quad \forall p \quad (4.38)$$

$$I(\xi)_0^p, I(\xi)_1^p, I^e(\xi)_1^p, I^e(\xi)_0^p \geq 0$$

$$P(\xi)_1^0 = P(\xi)_0^0 = A(\xi)_1^0 = A(\xi)_0^0 = F(\xi)_0^0 = \quad (4.39)$$

$$F(\xi)_1^0 = I(\xi)_0^0 = I(\xi)_1^0 = I^e(\xi)_1^0 = I^e(\xi)_0^0 = 0$$

$$X(\xi)_0^p \in \{0,1\} \quad \forall p \quad (4.40)$$

Na função objetivo (4.25), a expressão  $\sum_p (h_0^p I(\xi)_0^p + h_1^p I(\xi)_1^p)$  representa a soma dos custos de manter estoque do item no CD e no varejista, ao final de cada período  $p$ , enquanto que o termo  $\sum_p b_1^p F(\xi)_1^p$  representa os custos do não atendimento da demanda pelo varejista, ou seja, os custos de falta ao longo do horizonte de planejamento. O somatório dos custos de manter o estocar e de falta é minimizado ao longo dos períodos.

As restrições (4.26), (4.27), (4.28) e (4.29) representam os balanços dos estoques em mão do item de um período para o seguinte, em cada cenário  $\xi$ , respectivamente do CD e do varejista. Similarmente, as restrições (4.30) e (4.31) representam os balanços dos estoques de camada do item de um período para o seguinte, em cada cenário  $\xi$ , respectivamente do CD e do varejista. É a partir dos

estoques de camada do CD e do varejista que se definem as quantidades a serem pedidas, e conseqüentemente a realização das políticas  $(R_0, S_0)$  e  $(R_1, S_1)$ .

As restrições (4.32) e (4.33) representam o atendimento da demanda em cada período, para cada cenário  $\xi$ .

A restrição (4.34) define a quantidade a ser pedida pelo varejista no início de cada período  $p$  para um dado cenário  $\xi$ . Essa quantidade deve ser igual ao nível alvo  $S_1$  menos o estoque de camada do varejista no início do período  $p$  (que é igual ao estoque de camada no final do período  $p - 1$ ) no início de cada ciclo (indicado quando  $v_1^p = 1$ ), caso contrário, é igual a zero.

A restrição (4.35) define a quantidade a ser pedida pelo CD no início de cada período  $p$  para um dado cenário  $\xi$ . Essa quantidade deve ser igual ao nível alvo  $S_0$  menos o estoque de camada do CD no início do período  $p$  (que é igual ao estoque de camada no final do período  $p - 1$ ) no início de cada ciclo (indicado quando  $v_0^p = 1$ ), caso contrário, é igual a zero.

As restrições (4.36), (4.37) e (4.40) indicam se o estoque a mão do CD é suficiente para atender as necessidades do varejista. Quando  $X(\xi)$  for igual a 1 significa que a quantidade do item estocada foi suficiente, e conseqüentemente o estoque a mão do CD é maior ou igual a zero. Caso contrário, quando  $X(\xi)$  for igual a 0, significa que o que havia do item em estoque não foi suficiente, e conseqüentemente houve falta de atendimento do CD ao varejista.

A restrição (4.38) impõe a não-negatividade das variáveis. Já a restrição (3.38) inicializa as variáveis.

O equivalente determinístico do modelo relativo ao problema de programação estocástica de dois estágios é dado por (4.16)-(4.24) e por  $|\Omega|$  replicações de (4.25)-(4.40). Pode-se notar que as restrições (4.34) e (4.35) tornam o modelo um PNLIM. Para obter uma versão tratável do modelo proposto, foi utilizada uma versão exata linearizada conforme descrito anteriormente na seção 3.1.1.3. Primeiramente, são introduzidas as variáveis  $I_I^e(\xi)_0^p$  e  $I_I^e(\xi)_1^p$  que representam os estoques de camada respectivamente no CD e no varejista, no início do período  $p$  para certo cenário  $\xi$ . Como  $I_I^e(\xi)_0^p = I^e(\xi)_0^{p-1}$  e  $I_I^e(\xi)_1^p = I^e(\xi)_1^{p-1}$  as restrições (4.33) e (4.34) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$P(\xi)_0^p = SV_0^p - IV_I^e(\xi)_0^p \quad \forall p$$

$$P(\xi)_1^p = SV_1^p - IV_I^e(\xi)_1^p \quad \forall p.$$

A linearização exata das restrições (4.33) e (4.34) resultaram na substituição das expressões (4.33) e (4.34) pelas expressões (4.39) a (4.54), além da introdução das restrições de não-negatividade para as variáveis auxiliares  $SV_0^p$ ,  $SV_1^p$ ,  $I_I^e(\xi)_0^p$ ,  $IV_I^e(\xi)_0^p$ ,  $I_I^e(\xi)_1^p$  e  $IV_I^e(\xi)_1^p$ , resultando no seguinte problema de programação linear inteira-mista para o modelo do segundo estágio:

*minimizar* (4.25)

*sujeito a* (4.26) – (4.33); (4.36) – (4.37); (4.39) – (4.40)

$$P(\xi)_0^p = SV_0^p - IV_I^e(\xi)_0^p \quad \forall p \quad (4.41)$$

$$P(\xi)_1^p = SV_1^p - IV_I^e(\xi)_1^p \quad \forall p \quad (4.42)$$

$$SV_0^p \leq \bar{S}v_0^p \quad \forall p \quad (4.43)$$

$$SV_0^p \leq S_0 \quad \forall p \quad (4.44)$$

$$SV_0^p \geq S_0 - \bar{S}(1-v_0^p) \quad \forall p \quad (4.45)$$

$$SV_1^p \leq \bar{S}v_1^p \quad \forall p \quad (4.46)$$

$$SV_1^p \leq S_1 \quad \forall p \quad (4.47)$$

$$SV_1^p \geq S_1 - \bar{S}(1-v_1^p) \quad \forall p \quad (4.48)$$

$$IV_I^e(\xi)_0^p \leq \overline{IT}Iv_0^p \quad \forall p \quad (4.49)$$

$$IV_I^e(\xi)_0^p \leq I_I^e(\xi)_0^p \quad \forall p \quad (4.50)$$

$$IV_I^e(\xi)_0^p \geq I_I^e(\xi)_0^p - \overline{IT}I(1-v_0^p) \quad \forall p \quad (4.51)$$

$$IV_I^e(\xi)_1^p \leq \overline{IT}Iv_1^p \quad \forall p \quad (4.52)$$

$$IV_I^e(\xi)_1^p \leq I_I^e(\xi)_1^p \quad \forall p \quad (4.53)$$

$$IV_I^e(\xi)_1^p \geq I_I^e(\xi)_1^p - \overline{IT}I(1-v_1^p) \quad \forall p \quad (4.54)$$

$$I_I^e(\xi)_0^p = I^e(\xi)_0^{p-1} \quad \forall p \quad (4.55)$$

$$I_I^e(\xi)_1^p = I^e(\xi)_1^{p-1} \quad \forall p \quad (4.56)$$

$$P(\xi)_1^p, P(\xi)_0^p, A(\xi)_1^p, A(\xi)_0^p, F(\xi)_0^p, F(\xi)_1^p, \quad \forall p \quad (4.57)$$

$$I(\xi)_0^p, I(\xi)_1^p, I^e(\xi)_1^p, SV_0^p, SV_1^p, I_I^e(\xi)_0^p,$$

$$IV_I^e(\xi)_0^p, IV_I^e(\xi)_1^p \geq 0$$

Como está se considerando a posição do estoque no final do período, as restrições (4.30) e (4.31) serão divididas nas restrições (4.58) a (4.61), de forma a considerar que o estoque de camada do varejista no período 1 seja igual ao nível alvo do varejo  $S_1$  menos a demanda média por período, bem como, considerar que o estoque de camada no CD no período 1 seja igual ao nível alvo do CD  $S_0$  menos a demanda média por período conforme a seguir:

$$I^e(\xi)_1^{p-1} + P(\xi)_1^p = I^e(\xi)_1^p + D(\xi)_1^p \quad \forall p \geq 2 \quad (4.58)$$

$$S_1 - \mu_1 = I^e(\xi)_1^p \quad \forall p = 1 \quad (4.59)$$

$$I^e(\xi)_0^{p-1} + P(\xi)_0^p = I^e(\xi)_0^p + P(\xi)_1^p \quad \forall p \geq 2 \quad (4.60)$$

$$S_0 - \mu_1 = I^e(\xi)_0^p \quad \forall p = 1 \quad (4.61)$$

Finalmente, o equivalente determinístico do modelo relativo ao problema de programação estocástica de dois estágios é dado por (4.16)-(4.24) e por  $|\Omega|$  replicações de (4.25); (4.26)-(4.33); (4.36)-(4.37); (4.39)-(4.61).

#### 4.1.3.

#### **Modelo proposto para um sistema de duas camadas em série geral linear (SL): Modelo SL - B<sub>3</sub>**

Nesta Seção, um modelo PLIM para o problema de segundo estágio será apresentado, resultante da aplicação de uma técnica alternativa para lidar com a não linearidade das restrições (4.33) e (4.34). A ideia central por trás da técnica é calcular os pedidos em função das periodicidades do CD e do varejista.

Ao se analisar as restrições de balanço dos estoques e das quantidades a serem pedidas, verifica-se que, sabida a periodicidade entre as encomendas, é possível definir os seus respectivos pedidos diretamente da demanda, independente de  $S_0$  e  $S_1$ , com exceção do primeiro pedido.

Por exemplo, assumindo que a periodicidade do CD seja igual a 2 períodos e a do varejista igual a 1 período, pelas restrições (4.33), (4.56) e (4.57) pode-se definir os pedidos do varejista conforme a seguir:

$$p = 1 \quad P(\xi)_1^1 = (S_1 - I^e(\xi)_1^0)v_1^1 = (S_1 - 0)1 = S_1$$

$$S_1 - \mu_1 = I^e(\xi)_1^1$$

$$\begin{aligned}
p = 2 \quad & P(\xi)_1^2 = (S_1 - I^e(\xi)_1^1)v_1^2 = (S_1 - (S_1 - \mu_1))1 = \mu_1 \\
& I^e(\xi)_1^1 + P(\xi)_1^2 = I^e(\xi)_1^2 + D(\xi)_1^2 \\
& S_1 - D(\xi)_1^2 = I^e(\xi)_1^2 \\
p = 3 \quad & P(\xi)_1^3 = (S_1 - I^e(\xi)_1^2)v_1^3 = (S_1 - (S_1 - D(\xi)_1^2))1 = D(\xi)_1^2 \\
& I^e(\xi)_1^2 + P(\xi)_1^3 = I^e(\xi)_1^3 + D(\xi)_1^3 \\
& S_1 - D(\xi)_1^3 = I^e(\xi)_1^3 \\
p = 4 \quad & P(\xi)_1^4 = (S_1 - I^e(\xi)_1^3)v_1^4 = (S_1 - (S_1 - D(\xi)_1^3))1 = D(\xi)_1^3 \\
& I^e(\xi)_1^3 + P(\xi)_1^4 = I^e(\xi)_1^4 + D(\xi)_1^4 \\
& S_1 - D(\xi)_1^4 = I^e(\xi)_1^4 \\
p = 5 \quad & P(\xi)_1^5 = D(\xi)_1^4 \dots
\end{aligned}$$

E pelas restrições (4.34), (4.58) e (4.59) pode-se definir os pedidos do CD como:

$$\begin{aligned}
p = 1 \quad & P(\xi)_0^1 = (S_0 - I^e(\xi)_0^0)v_0^1 = (S_0 - 0)1 = S_0 \\
& S_0 - \mu_1 = I^e(\xi)_0^1 \\
p = 2 \quad & P(\xi)_0^2 = (S_0 - I^e(\xi)_0^1)v_0^2 = (S_0 - (S_0 - \mu_0))0 = 0 \\
& I^e(\xi)_0^1 + P(\xi)_0^2 = I^e(\xi)_0^2 + P(\xi)_1^2 \\
& S_0 - \mu_1 - \mu_1 = I^e(\xi)_0^2 \\
p = 3 \quad & P(\xi)_0^3 = (S_0 - I^e(\xi)_0^2)v_0^3 = (S_0 - (S_0 - 2\mu_1))1 = 2\mu_1 \\
& I^e(\xi)_0^2 + P(\xi)_0^3 = I^e(\xi)_0^3 + P(\xi)_1^3 \\
& S_0 - 2\mu_1 + 2\mu_1 - D(\xi)_1^2 = I^e(\xi)_0^3 \\
p = 4 \quad & P(\xi)_0^4 = (S_0 - I^e(\xi)_0^3)v_0^4 = (S_0 - (S_0 - D(\xi)_1^2))0 = 0 \\
& I^e(\xi)_0^3 + P(\xi)_0^4 = I^e(\xi)_0^4 + P(\xi)_1^4 \\
& S_0 - D(\xi)_1^2 - D(\xi)_1^3 = I^e(\xi)_0^4 \\
p = 5 \quad & P(\xi)_0^5 = (S_0 - I^e(\xi)_0^4)v_0^5 = (D(\xi)_1^2 + D(\xi)_1^3) \\
p = 6 \quad & P(\xi)_0^6 = 0 \\
p = 7 \quad & P(\xi)_0^7 = (D(\xi)_1^4 + D(\xi)_1^5) \dots
\end{aligned}$$

Na reformulação, primeiramente, são introduzidos no modelo:

$T_{0,1}$  Conjunto dos tempos entre reposições no CD em função do tempo entre reposições no varejista,  $r_{0,1} \in T_{0,1} = \{1X1, \dots, N_{R_0}XN_{R_1}\}$ ;

- $w_{0,p,p}^{r_{0,1}}$  parâmetro auxiliar no cálculo da quantidade pedida pelo CD no período  $p$ ; dependente do valor  $r_{0,1}$ ;  $w_{0,p,p}^{r_{0,1}} \in \{0,1\}$ ;  $r_{0,1} = 1X1, \dots, N_{R_0} X N_{R_1}$ ;  $p = 1, \dots, N_p$ ;
- $w_{1,p,p}^{r_1}$  parâmetro auxiliar no cálculo da quantidade pedida pelo varejista no período  $p$ ; dependente do valor  $r_1$ ;  $w_{1,p,p}^{r_1} \in \{0,1\}$ ;  $r_1 = 1, \dots, N_{R_1}$ ;  $p = 1, \dots, N_p$ ;
- $P(\xi)_0^{p,r_{0,1}}$  parâmetro auxiliar no cálculo da quantidade encomendada do item pelo CD no cenário  $\xi$  no início do período  $p$  para a periodicidade  $R_0$  do CD e  $R_1$  do varejista;
- $P(\xi)_1^{p,r_1}$  parâmetro auxiliar no cálculo da quantidade encomendada do item pelo varejista no cenário  $\xi$  no início do período  $p$  para a periodicidade  $r_1$  do varejista;

Desta forma, pode-se gerar as seguintes matrizes de pedidos em função das respectivas periodicidades do CD e do varejista:

$$P(\xi)_0^{p,r_{0,1}} = S_0; \forall p = 1,$$

$$P(\xi)_0^{p,r_{0,1}} = w_{0,p,p}^{r_{0,1}} D(\xi)_1^p; \forall p > 1,$$

$$P(\xi)_1^{p,r_1} = S_1; \forall p = 1,$$

$$P(\xi)_1^{p,r_1} = w_{1,p,p}^{r_1} D(\xi)_1^p; \forall p > 1.$$

Resumindo, a linearização exata das restrições (4.34) e (4.35) resultaram na substituição das expressões (4.17), (4.18), (4.20), (4.23) e (4.24) pelas expressões (4.62) e (4.63) e, na substituição das expressões (4.34) e (4.35) pelas expressões (4.64) e (4.65), resultando no seguinte problema de programação linear inteira mista para o modelo do primeiro estágio:

*minimizar* (4.16)

*sujeito a* (4.18), (4.21) e (4.22)

$$\sum_{r_{0,i}} \sum_{r_i} u_1^{r_1} u_0^{r_{0,1}} = 1 \quad (4.62)$$

$$u_0^{r_{0,1}}, u_1^{r_1} \in \{0,1\} \quad \forall r_{0,1}, r_1. \quad (4.63)$$

A restrição (4.62) indica que existe exatamente um único valor para o tamanho de ciclo  $R_0$  e um único valor para o tamanho do ciclo  $R_1$  a serem determinados  $(R_0 = r_{0,1} \in T_{0,1} = \{1x1, \dots, N_{R_0}x N_{R_1}\})$  e  $R_1 = r_1 \in T_1 = \{1, \dots, N_{R_1}\}$ , quando  $u_0^{r_{0,1}} = 1$  e  $u_1^{r_1} = 1$ ).

Já o problema de programação linear para o modelo do segundo estágio resultante da aplicação desta técnica alternativa é exposto a seguir:

*minimizar* (4.25)

*sujeito a* (4.26) – (4.33); (4.36) – (4.40)

$$\sum_{r_1} P(\xi)_1^{p,r_1} u_1^{r_1} = P(\xi)_1^p \quad \forall p \quad (4.64)$$

$$\sum_{r_{0,1}} \sum_{r_1} P(\xi)_0^{p,r_{0,1}} u_0^{r_{0,1}} = P(\xi)_0^p \quad \forall p. \quad (4.65)$$

As restrições (4.64) e (4.65) definem, respectivamente, as quantidades a serem pedidas pelo varejista e pelo CD no início de cada período  $p$  para dado cenário  $\xi$ .

#### 4.2.

#### **Modelo proposto para sistema de duas camadas arborescente - $B_3$**

No sistema de duas camadas arborescente de estoques estudado nem sempre a quantidade do item na camada a montante é suficiente para atender a camada a jusante. Nesse caso, o modo como se dará o rateio de faltas entre os varejistas deve ser discutido pelo tomador de decisão. Nesta tese, foi realizado um estudo sobre distintos rateios de faltas, considerando inicialmente o caso em que o rateio é definido por um percentual fixo, e em seguida o caso em que ele será considerado variável.

### 4.2.1. Rateio das faltas fixo (AF): Modelo AF-B<sub>3</sub>

Para modelar o problema de determinar os parâmetros ótimos  $R_0, S_0, R_i, S_i$  e  $f_i, i = 1, \dots, N_I$ , de um sistema de estoques de duas camadas arborescente, é proposto um modelo baseado em programação estocástica de dois estágios com o objetivo de minimizar os custos relevantes (custo de encomendar, custo de manter estoque e custo de falta), de modo a satisfazer a demanda e considerar o balanço dos estoques ao longo do horizonte de planejamento de um número finito de períodos uniformes. O equivalente determinístico do modelo é formulado via PNLIM, o qual é em seguida linearizado, parte de forma exata e parte de forma aproximada. A decisão do primeiro estágio diz respeito à determinação propriamente dos parâmetros  $(R_0, S_0)$  e  $(R_i, S_i, f_i), i = 1, \dots, |I|$ , onde  $f_i$  representa a fração de falta atribuída ao varejista  $i$ . A decisão de segundo estágio é relativa aos níveis dos estoques e às quantidades pedidas ao longo do tempo, que é influenciada diretamente pelas decisões do primeiro estágio e pela realização da incerteza. A incerteza do modelo é relativa aos níveis da demanda pelo único item proveniente dos clientes, que será modelada como uma variável aleatória que segue uma distribuição de probabilidade conhecida.

#### 4.2.1.1. Notação

Além de considerar a notação já sendo usada (aqui retomada por conveniência), considere ainda a seguinte notação adicional:

Conjuntos e índices

- $I$  varejistas,  $i \in I = \{0, 1, \dots, N_I\}$ ;
- $B$  tamanhos da representação da expansão binária;  
 $tb \in B = \{0, 1, \dots, N_B\}$ ; sendo  $N_B$  o número de coeficientes da expansão binária. (Por exemplo, para representar o número 7 na base decimal, precisamos de 3 algarismos na base binária, i.e.,  $N_B = 3$ , pois 7 é escrito como 111 em binários.)

- $P$  períodos,  $p \in P = \{1, \dots, N_P\}$ ;
- $\Omega$  cenários,  $\xi \in \Omega$ ;
- $T_0$  tempos entre reposições no CD,  $r_0 \in T_0 = \{1, \dots, N_{R_0}\}$ ;
- $T_i$  tempos entre reposições no varejista  $i$ ,  $r_i \in T_i = \{1, \dots, N_{R_i}\}$ .

#### Parâmetros

- $V_{tb}$  parâmetro auxiliar, onde  $V_{tb} \in \left\{ \frac{2^0}{10^y}, \frac{2^1}{10^y}, \frac{2^2}{10^y}, \dots, \frac{2^{N_B}}{10^y} \right\}$  e  $2 > \sum_B \frac{2^{tb}}{10^y} > 1$  e  $y \in N^*$  em que  $\frac{1}{10^y}$  representa a precisão desejada. (Por exemplo, se  $y = 1$  a precisão é decimal, se  $y = 2$  a precisão é centesimal e assim por diante.);
- $b_i^p$  custo de falta por unidade do item em falta no período  $p$  do varejista  $i$ ;
- $C_{F0}^p$  custo fixo do CD de encomendar o item no período  $p$ ;
- $C_{Fi}^p$  custo fixo do varejista  $i$  de encomendar o item no período  $p$ ;
- $D(\xi)_i^p$  demanda pelo item no cenário  $\xi$  no período  $p$  do varejo  $i$ ;
- $h_i^p$  custo de manter em estoque uma unidade do item no período  $p$  do varejista  $i$ ;
- $h_0^p$  custo de manter em estoque uma unidade do item no período  $p$  do CD;
- $\overline{IT}$  limite superior da posição do estoque do item;
- $\overline{S}$  limite superior do nível alvo do item;
- $w_{0,p}^{r_0}$  parâmetro auxiliar que indica o período em que ocorre um pedido no CD; dependente do valor  $r_0$ ;
- $w_{0,p}^{r_0} \in \{0,1\}$ ;  $r_0 = 1, \dots, N_{R_0}$ ;  $p = 1, \dots, N_P$ ;
- $w_{i,p}^{r_i}$  parâmetro auxiliar que indica o período em que ocorre um pedido no varejista; dependente do valor  $r_i$ ;  $w_{i,p}^{r_i} \in \{0,1\}$ ;
- $r_i = 1, \dots, N_{R_i}$ ;  $p = 1, \dots, N_P$ .

#### Variáveis

- $A(\xi)_i^p$  demanda acumulada atendida pelo varejista  $i$  no cenário  $\xi$  no período  $p$ ;
- $A(\xi)_0^p$  pedidos dos varejistas acumulado atendidos pelo CD no cenário  $\xi$  no

	período $p$ ;
$A(\xi)_{0,i}^p$	pedido acumulado atendido pelo CD do varejista $i$ no cenário $\xi$ no período $p$ ;
$F(\xi)_i^p$	demanda não atendida acumulada pelo varejista $i$ no cenário $\xi$ no período $p$ ;
$F(\xi)_0^p$	pedidos dos varejistas não atendidas acumulado pelo CD no cenário $\xi$ no período $p$ ;
$F(\xi)_{0,i}^p$	pedido não atendido acumulado pelo CD do varejista $i$ no cenário $\xi$ no período $p$ ;
$I(\xi)_i^p$	estoque em mão no varejista $i$ no cenário $\xi$ no final do período $p$ ;
$I(\xi)_0^p$	estoque em mão no CD no cenário $\xi$ no final do período $p$ ;
$I^e(\xi)_i^p$	estoque de camada do varejista $i$ no cenário $\xi$ no final do período $p$ ;
$I^e(\xi)_0^p$	estoque de camada do CD no cenário $\xi$ no final do período $p$ ;
$I_l^e(\xi)_0^p$	estoque de camada do CD no cenário $\xi$ no início do período $p$ ;
$I_l^e(\xi)_i^p$	estoque de camada do varejista no cenário $\xi$ no início do período $p$ ;
$IV_l^e(\xi)_0^p$	variável auxiliar para o estoque de camada do CD no cenário $\xi$ no início do período $p$ ;
$IV_l^e(\xi)_i^p$	variável auxiliar para o estoque de camada do varejista $i$ no cenário $\xi$ no início do período $p$ ;
$P(\xi)_i^p$	quantidade encomendada do item pelo varejista $i$ no cenário $\xi$ no início do período $p$ ;
$P(\xi)_0^p$	quantidade encomendada do item pelo CD no cenário $\xi$ no início do período $p$ ;
$SV_0^p$	variável auxiliar para o nível alvo dos estoques no CD do item no período $p$ ;
$v_0^p$	indica se existe ou não uma encomenda do item no CD no período $p$ ; $v^p \in \{0,1\}$ ;
$u_0^{r_0}$	variável auxiliar na determinação do tamanho de ciclo $R_0$ ; $u_0^{r_0} \in \{0,1\}$ ;
$X(\xi)_0^p$	indica se existe falta ou estoque a mão no CD no cenário $\xi$ no

- final do período  $p$ ;  $X(\xi)_0^p \in \{0,1\}$ ;
- $SV_i^p$  variável auxiliar para o nível alvo dos estoques no varejista  $i$  do item no período  $p$ ;
- $v_i^p$  indica se existe ou não uma encomenda do item no varejista  $i$  no período  $p$ ;  $v_i^p \in \{0,1\}$ ;
- $u_i^{r_i}$  variável auxiliar na determinação do tamanho de ciclo  $R_i$ ;  
 $u_i^{r_i} \in \{0,1\}$ ;
- $j_{i,tb}$  variável auxiliar para a aproximação binária de  $f_i$ ;  $j_{i,tb} \in \{0,1\}$ ;
- $f_i$  fração de falta, ou seja, pedidos não atendidos acumulados dos varejistas pelo CD atribuída ao varejista  $i$ :  $f_i = \sum_B j_{i,tb} V_{tb}$ ;
- $JF(\xi)_{i,tb}^p$  variável auxiliar para o cálculo do pedido não atendido acumulado pelo CD dos varejistas no cenário  $\xi$  no período  $p$ .

#### 4.2.1.2. Problema de primeiro estágio

O problema de primeiro estágio diz respeito às decisões das periodicidades  $R_0$ ,  $R_i$ , dos níveis alvos  $S_0$ ,  $S_i$  e das frações  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, N_I$ , a serem utilizadas no sistema de reposição e controle de estoques, as quais devem ser tomadas antes da realização da incerteza com o objetivo de minimizar os custos de encomendar e o valor esperado dos custos de manter o estoque e de falta. O problema do primeiro estágio é modelado como um problema de programação linear inteira mista dado por:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sum_p (C_{F0}^p v_0^p + C_{Fi}^p v_i^p) \\ & + E_{\Omega} [Q(R_0, R_i, S_0, S_i, f_i, \xi)] \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{r_0} u_0^{r_0} = 1 \quad (4.67)$$

$$\sum_{r_i} u_i^{r_i} = 1 \quad \forall i \quad (4.68)$$

$$\sum_{r_0} w_{0,p}^{r_0} u_0^{r_0} = v_0^p \quad \forall p \quad (4.69)$$

$$\sum_{r_i} w_{i,p}^{r_i} u_i^{r_i} = v_i^p \quad \forall p, i \quad (4.70)$$

$$0 \leq S_0 \leq \bar{S} \quad (4.71)$$

$$0 \leq S_i \leq \bar{S} \quad (4.72)$$

$$u_0^{r_0}, u_i^{r_i} \in \{0,1\} \quad \forall r_0, r_i \quad (4.73)$$

$$v_0^p, v_i^p \in \{0,1\} \quad \forall p. \quad (4.74)$$

A expressão (4.66) modela o custo total a ser minimizado. Os dois primeiros termos dizem respeito ao somatório dos custos fixos de encomendar do CD e dos varejistas ao longo do horizonte de planejamento considerado, enquanto que o segundo termo, representa o valor esperado do custo do problema de segundo estágio.

As restrições (4.67) e (4.68) forçam a existência de exatamente um único valor para o tamanho do ciclo  $R_0$  e um único valor para o tamanho do ciclo  $R_1$  a serem determinados ( $R_0 = r_0 \in T_0 = \{1, \dots, N_{R_0}\}$  e  $R_i = r_i \in T_i = \{1, \dots, N_{R_i}\}$ , quando  $u_0^{r_0} = 1$  e  $u_i^{r_i} = 1$ ). Já as restrições em (4.69) e (4.70) indicam que as encomendas ocorrem a cada  $R_0$  intervalo de tempo no CD e a cada intervalo  $R_i$  intervalo de tempo no varejista  $i$  sempre no primeiro período do horizonte de planejamento (de acordo com os valores dos parâmetros  $w_{0,p}^{r_0}$  e  $w_{i,p}^{r_i}$ ). As restrições (4.71) e (4.72) impõem limites inferior e superior para as variáveis reais que representam respectivamente os níveis máximos dos estoques no CD e nos varejistas. Finalmente, em (4.73) e (4.74), as variáveis  $u_0^{r_0}$ ,  $u_i^{r_i}$ ,  $v_0^p$  e  $v_i^p$ ,  $i = 0, \dots, N_I$  são definidas como binárias.

#### 4.2.1.3. Problema de segundo estágio

O problema de segundo estágio visa minimizar os custos de manter estoque e os custos de falta ao longo do horizonte de planejamento, face às escolhas de  $R_0, R_i, S_0$  e  $S_i, f_i$ ,  $i = 1, \dots, N_I$ , para uma dada realização  $\xi$  do parâmetro incerto, de modo a satisfazer as demandas dos clientes nos períodos. Para cada cenário  $\xi \in \Omega$ , o problema de segundo estágio é dado por:

$$\text{minimizar } \sum_p h_0^p I(\xi)_0^p + \sum_{p,i} (h_i^p I(\xi)_i^p + b_i^p F(\xi)_i^p) \quad (4.75)$$

$$\text{sujeito a } I(\xi)_i^{p-1} + A(\xi)_{0,i}^{p-L_i} = I(\xi)_i^p + A(\xi)_i^p \quad \forall p \geq L_i, \forall i \quad (4.76)$$

$$I(\xi)_i^{p-1} = I(\xi)_i^p + A(\xi)_i^p \quad \forall p < L_i, \forall i \quad (4.77)$$

$$I(\xi)_0^{p-1} + P(\xi)_0^{p-L_0} = I(\xi)_0^p + A(\xi)_0^p \quad \forall p \geq L_0 \quad (4.78)$$

$$I(\xi)_0^{p-1} = I(\xi)_0^p + A(\xi)_0^p \quad \forall p < L_0 \quad (4.79)$$

$$I^e(\xi)_i^{p-1} + P(\xi)_i^p = I^e(\xi)_i^p + D(\xi)_i^p \quad \forall p, i \quad (4.80)$$

$$I^e(\xi)_0^{p-1} + P(\xi)_0^p = I^e(\xi)_0^p + \sum_i P(\xi)_i^p \quad \forall p \quad (4.81)$$

$$A(\xi)_0^p = \sum_i A(\xi)_{0,i}^p \quad \forall p \quad (4.82)$$

$$F(\xi)_0^p = \sum_i F(\xi)_{0,i}^p \quad \forall p \quad (4.83)$$

$$A(\xi)_i^p + F(\xi)_i^p = D(\xi)_i^p + F(\xi)_i^{p-1} \quad \forall p, i \quad (4.84)$$

$$A(\xi)_0^p + F(\xi)_0^p = \sum_i P(\xi)_i^p + F(\xi)_0^{p-1} \quad \forall p, i \quad (4.85)$$

$$A(\xi)_{0,i}^p + F(\xi)_{0,i}^p = P(\xi)_i^p + F(\xi)_{0,i}^{p-1} \quad \forall p, i \quad (4.86)$$

$$F(\xi)_{0,i}^p = f_i F(\xi)_0^p \quad \forall p, i \quad (4.87)$$

$$P(\xi)_i^p = (S_i - I^e(\xi)_i^{p-1}) v_i^p \quad \forall p, i \quad (4.88)$$

$$P(\xi)_0^p = (S_0 - I^e(\xi)_0^{p-1}) v_0^p \quad \forall p \quad (4.89)$$

$$I(\xi)_0^p \leq \bar{S} X(\xi)_0^p \quad \forall p \quad (4.90)$$

$$F(\xi)_0^p \leq \bar{S}(1 - X(\xi)_0^p) \quad \forall p \quad (4.91)$$

$$P(\xi)_i^p, P(\xi)_0^p, A(\xi)_i^p, A(\xi)_0^p, A(\xi)_{0,i}^p, F(\xi)_0^p, \quad \forall p, i \quad (4.92)$$

$$F(\xi)_i^p, F(\xi)_{0,i}^p, I(\xi)_0^p, I(\xi)_i^p, I^e(\xi)_i^p \geq 0$$

$$P(\xi)_i^0 = P(\xi)_0^0 = A(\xi)_i^0 = A(\xi)_0^0 = 0 \quad \forall i \quad (4.93)$$

$$F(\xi)_0^0 = F(\xi)_i^0 = I(\xi)_0^0 = I(\xi)_i^0 = 0$$

$$I^e(\xi)_i^0 = I^e(\xi)_0^0 = 0.$$

$$X(\xi)_0^p \in \{0,1\} \quad \forall p \quad (4.94)$$

Na função objetivo (4.75), a expressão  $\sum_p h_0^p I(\xi)_0^p + \sum_{p,i} h_i^p I(\xi)_i^p$  representa os custos de manter estoque no CD e nos varejistas, que considera o nível do estoque em mão existente ao final de cada período  $p$ , enquanto que o termo  $\sum_{p,i} b_i^p F(\xi)_i^p$  representa os custos do não atendimento da demanda pelos varejistas, ou seja, os custos de falta ao longo do horizonte de planejamento. O somatório dos custos de manter em estoque e de falta é minimizado ao longo dos períodos.

As restrições (4.76), (4.77), (4.78) e (4.79) representam o balanço dos estoques em mão do item de um período para o seguinte, em cada cenário  $\xi$ , respectivamente do CD e dos varejistas. Similarmente, as restrições (4.80) e (4.81) representam o balanço dos estoques de camada do item de um período para o seguinte, em cada cenário  $\xi$ , respectivamente do CD e dos varejistas. É a partir do estoque de camada que se definirá a quantidade a ser pedida e conseqüentemente a realização da política  $(R, S)$ .

As restrições (4.82) e (4.83) condicionam o atendimento total do CD a ser igual a soma dos atendimentos individuais a cada varejista.

As restrições (4.84), (4.85) e (4.86) modelam o atendimento da demanda em cada período, para cada cenário  $\xi$ .

A restrição (4.87) impõe que os pedidos não atendidos acumulados pelo CD do varejista  $i$  correspondam a um percentual  $f_i$  do total dos pedidos não atendidos acumulados pelo CD de todos os varejistas.

A restrição (4.88) modela a quantidade a ser pedida pelo varejista  $i$  no início de cada período  $p$  para certo cenário  $\xi$ , como sendo o nível alvo  $S_i$  menos o estoque de camada do varejista  $i$  no início do período  $p$  (que é igual ao estoque de camada no final do período  $p - 1$ ), no início de cada ciclo (indicado quando  $v_i^p = 1$ ), caso contrário, é igual a zero.

A restrição (4.89) modela a quantidade a ser pedida pelo CD no início de cada período  $p$  para certo cenário  $\xi$ , como sendo o nível alvo  $S_0$  menos o estoque de camada do CD no início do período  $p$  (que é igual ao estoque de camada no final do período  $p - 1$ ), no início de cada ciclo (indicado quando  $v_0^p = 1$ ), caso contrário, é igual a zero.

As restrições (4.90), (4.91) e (4.94) indicam se o estoque a mão do CD é suficiente para atender as necessidades dos varejistas. Quando  $X(\xi)$  for igual a 1,

significa que todos os varejistas foram atendidos. Caso contrário, quando  $X(\xi)$  for igual a 0, significa que o estoque existente não foi suficiente e conseqüentemente houve falta de atendimento do CD aos varejistas.

A restrição (4.92) impõe não-negatividade das variáveis. A restrição (3.93) inicializa as variáveis como zero.

Com relação a  $F(\xi)_{0,i}^p$  em (4.86), pode-se fazer duas considerações. Pela definição de  $F(\xi)_{0,i}^p$  em (4.87), dependendo do valor de  $f_i$ ,  $F(\xi)_{0,i}^p$  pode ser menor ou igual a  $P(\xi)_i^p + F(\xi)_{0,i}^{p-1}$  e, desta forma,  $A(\xi)_{0,i}^p$  é positivo e não há desbalanceamentos (alocação negativa de falta nos varejistas). Caso contrário, se  $F(\xi)_{0,i}^p$  for maior que  $P(\xi)_i^p + F(\xi)_{0,i}^{p-1}$ , então  $A(\xi)_{0,i}^p$  é negativo havendo desbalanceamentos. Neste caso, para que o modelo proposto permaneça correto é necessário que seja relaxada a restrição de não-negatividade da variável  $A(\xi)_{0,i}^p$ , tornando-a uma variável irrestrita em sinal. Além disso, no caso de  $A(\xi)_{0,i}^p$  ser negativo, significa que haverá falta e conseqüentemente custo associado a mesma. Caso esta segunda consideração não seja verdadeira, corre-se o risco de se obter uma solução de custo elevado imposta por num determinado cenário com pouca probabilidade de ocorrer.

O equivalente determinístico do modelo relativo ao problema de programação estocástica de dois estágios é dado por (4.66)-(4.74) e por  $|\Omega|$  replicações de (4.75)-(4.94). Pode-se notar que as restrições (4.87) a (4.89) tornam o modelo de PNLIM. Com relação a linearização das restrições (4.88) e (4.89), seguiu-se o mesmo procedimento exato descrito anteriormente na seção 3.1.1.3. Com relação à restrição (4.87), diferentemente da seção 3.1.1.3, tem-se o produto de duas variáveis contínuas, sendo assim, foi utilizada uma versão aproximada dessa técnica de linearização com base na precisão desejada, definida pelo termo  $1/10^y$ . Assim, a restrição (4.87) pode ser reescrita aproximando  $f_i F(\xi)_0^p$  pela expansão binária  $\sum_B V_{tb} j_{i,tb} F(\xi)_0^p$  e posteriormente substituindo  $j_{i,tb} F(\xi)_0^p$  por  $JF(\xi)_{i,tb}^p$ , isto é,

$$F(\xi)_{0,i}^p = f_i F(\xi)_0^p = \sum_B V_{tb} j_{i,tb} F(\xi)_0^p = \sum_B V_{tb} JF(\xi)_{i,tb}^p \quad \forall p, i.$$

Resumindo, a linearização exata das restrições (4.88) e (4.89) e a linearização aproximada da restrição (4.87) resultaram na substituição das

expressões (4.88) e (4.89) pelas expressões (4.95) a (4.110) e na substituição da restrição (4.87) pelas expressões (4.111) a (4.114) além da introdução das restrições de não-negatividade para as variáveis auxiliares  $JF(\xi)_{i,bin}^p$ ,  $SV^p$ ,  $I_l^e(\xi)_0^p$  e  $IV_l^e(\xi)_0^p$ , resultando finalmente no seguinte problema de PLIM para o modelo do segundo estágio:

*minimizar* (4.75)

*sujeito a* (4.76) – (4.86); (4.90) – (4.94)

$$P(\xi)_0^p = SV_0^p - IV_l^e(\xi)_0^p \quad \forall p \quad (4.95)$$

$$P(\xi)_i^p = SV_i^p - IV_l^e(\xi)_i^p \quad \forall p, i \quad (4.96)$$

$$SV_0^p \leq \bar{S}v_0^p \quad \forall p \quad (4.97)$$

$$SV_i^p \leq \bar{S}v_i^p \quad \forall p, i \quad (4.98)$$

$$SV_0^p \leq S_0 \quad \forall p \quad (4.99)$$

$$SV_i^p \leq S_i \quad \forall p, i \quad (4.100)$$

$$SV_0^p \geq S_0 - \bar{S}(1-v_0^p) \quad \forall p \quad (4.101)$$

$$SV_i^p \geq S_i - \bar{S}(1-v_i^p) \quad \forall p, i \quad (4.102)$$

$$IV_l^e(\xi)_0^p \leq \bar{IT}I v_0^p \quad \forall p \quad (4.103)$$

$$IV_l^e(\xi)_i^p \leq \bar{IT}I v_i^p \quad \forall p, i \quad (4.104)$$

$$IV_l^e(\xi)_0^p \leq I_l^e(\xi)_0^p \quad \forall p \quad (4.105)$$

$$IV_l^e(\xi)_i^p \leq I_l^e(\xi)_i^p \quad \forall p, i \quad (4.106)$$

$$IV_l^e(\xi)_0^p \geq I_l^e(\xi)_0^p - \bar{IT}I(1-v_0^p) \quad \forall p \quad (4.107)$$

$$IV_l^e(\xi)_i^p \geq I_l^e(\xi)_i^p - \bar{IT}I(1-v_i^p) \quad \forall p, i \quad (4.108)$$

$$I_l^e(\xi)_0^p = I_l^e(\xi)_0^{p-1} \quad \forall p \quad (4.109)$$

$$I_l^e(\xi)_i^p = I_l^e(\xi)_i^{p-1} \quad \forall p, i \quad (4.110)$$

$$F(\xi)_{0;i}^p = \sum_B V_{tb} JF(\xi)_{i,tb}^p \quad \forall p, i \quad (4.111)$$

$$JF(\xi)_{i,tb}^p \leq \bar{IT}I j_{i,tb} \quad \forall p, i, tb \quad (4.112)$$

$$JF(\xi)_{i,tb}^p \leq F(\xi)_0^p \quad \forall p, i, tb \quad (4.113)$$

$$JF(\xi)_{i,tb}^p \geq F(\xi)_0^p - \bar{IT}I(1 - j_{i,tb}) \quad \forall p, i, tb \quad (4.114)$$

$$P(\xi)_i^p, P(\xi)_0^p, A(\xi)_i^p, A(\xi)_0^p, F(\xi)_0^p, F(\xi)_i^p, I(\xi)_0^p, \quad \forall p, i \quad (4.115)$$

$$I_l^e(\xi)_0^p, IV_l^e(\xi)_0^p, IV_l^e(\xi)_i^p \geq 0$$

Como está se considerando a posição do estoque no final do período, as restrições (4.80) e (4.81) serão divididas nas restrições (4.116), (4.117), (4.118) e (4.119) de forma a considerar que o estoque de camada do varejista  $i$  no período 1 seja igual ao nível alvo  $S_i$  menos a demanda média por período, bem como, considerar que o estoque de camada do CD no período 1 seja igual ao nível alvo do CD  $S_0$  menos a soma das demandas médias por período dos varejistas conforme a seguir:

$$I^e(\xi)_i^{p-1} + P(\xi)_i^p = I^e(\xi)_i^p + D(\xi)_i^p \quad \forall p \geq 2, \forall i \quad (4.116)$$

$$S_i - \mu_i = I^e(\xi)_i^p \quad \forall p = 1, \forall i \quad (4.117)$$

$$I^e(\xi)_0^{p-1} + P(\xi)_0^p = I^e(\xi)_0^p + \sum_i P(\xi)_i^p \quad \forall p \geq 2 \quad (4.118)$$

$$S_0 - \sum_i \mu_i = I^e(\xi)_0^p \quad \forall p = 1. \quad (4.119)$$

Além disso, o pedido não atendido do varejista  $i$  pelo CD dado por  $F(\xi)_{0,i}^p$  deve ser igual ao seu correspondente pedido  $P(\xi)_i^p$  mais as quantidade faltante do período anterior  $F(\xi)_{0,i}^{p-1}$  durante  $L_0$ :

$$F(\xi)_{0,i}^p = P(\xi)_i^p + F(\xi)_{0,i}^{p-1} \quad \forall p \leq L_0; \forall i \quad (4.120)$$

Finalmente, o equivalente determinístico do modelo relativo ao problema de programação estocástica de dois estágios é dado por (4.66)-(4.74) e por  $|\Omega|$  replicações de (4.75)-(4.79), (4.82) – (4.86) e (4.90)- (4.120), .

#### 4.2.2.

##### Rateio das faltas variável (AV): modelo AV - B<sub>3</sub>

Uma alternativa de rateio das faltas é presumir que tal rateio das unidades do item faltantes se dê através de um percentual proporcional à razão das necessidades (pedido do período somado ao total de pedidos não atendidos nos períodos anteriores) de cada varejista em relação à soma das necessidades de todos os varejistas em cada período para cada cenário. Sendo assim, o modelo

$AV - B_3$  se difere do  $AF - B_3$  principalmente no que diz respeito às decisões de primeiro estágio. Enquanto no  $AF - B_3$  a fração de falta era considerada como uma decisão de primeiro estágio, no  $AV - B_3$  a definição das proporções a serem rateadas é uma definição da política utilizada. Sendo assim, deve-se reescrever a restrição (4.87) como (4.121), para que a política de rateio seja cumprida:

$$F(\xi)_{0;i}^p = f(\xi)_i^p F(\xi)_0^p \quad \forall p, i \quad (4.121)$$

onde

$$f(\xi)_i^p = \frac{P(\xi)_i^p + F(\xi)_{0,i}^{p-1}}{\sum_i P(\xi)_i^p + F(\xi)_{0,i}^{p-1}} = \frac{Nec(\xi)_i^p}{Nec(\xi)^p}, \quad (4.122)$$

$f(\xi)_i^p$  é a razão da necessidade do varejista  $i$  em relação às necessidades de todos os varejistas até o período  $p$  no cenário  $\xi$  e  $Nec(\xi)^p$  representa a soma de todas as necessidades dos varejistas até o período  $p$  e  $Nec(\xi)_i^p$  representa a necessidade do varejista  $i$  até o período  $p$ .

#### 4.2.2.1. Notação

Além de considerar a notação já sendo usada (aqui retomada por conveniência), considere ainda a seguinte notação adicional:

Variáveis

$f(\xi)_i^p$	razão da necessidade do varejista $i$ em relação às necessidades de todos os varejistas até o período $p$ no cenário $\xi$ ;
$l(\xi)_{i,tb}^p$	variável auxiliar para a aproximação da representação binária de $j(\xi)_i^p$ ; $j(\xi)_{i,tb}^p \in \{0,1\}$ ;
$LNec(\xi)_{i,tb}^p$	variável auxiliar para o cálculo de $Nec(\xi)^p$ ;
$LF(\xi)_{i,tb}^p$	variável auxiliar para as quantidades encomendadas pelos varejistas não atendidas no cenário $\xi$ e no período $p$ ;
$dif(\xi)^p$	variável auxiliar para o cálculo de $F(\xi)_i^p$ .

Usando a expansão binária e uma precisão pré-definida  $1/10^y$ , onde  $y$  é um valor fixo conhecido, observa-se que  $f(\xi)_i^p$  está no seguinte intervalo:

$$\sum_B V_{tb} l(\xi)_{i,tb}^p \leq f(\xi)_i^p \leq \sum_B V_{tb} l(\xi)_{i,tb}^p + \frac{1}{10^y}. \quad (4.123)$$

Como o valor aproximado pela expansão binária  $\sum_B V_{tb} l(\xi)_{i,tb}^p$  da fração  $f(\xi)_i^p$  será sempre menor ou igual aos valor verdadeiro somado ao valor da precisão que está do lado direito da expressão, a soma  $\sum_B V_{tb} l(\xi)_{i,tb}^p$  de todas os varejistas dificilmente será igual a 1. Para contornar essa dificuldade, a diferença dada por  $dif(\xi)^p = 1 - \sum_i \sum_B V_{tb} l(\xi)_{i,tb}^p$  deve ser rateada igualmente entre todos os varejistas.

Como os valores de  $V_{tb} l(\xi)_{i,tb}^p$  devem respeitar as relações das necessidades dos varejistas, vide (4.122), uma nova representação binária incluindo tal relação é proposta:

$$\sum_B V_{tb} Nec(\xi)^p l(\xi)_{i,tb}^p \leq Nec(\xi)_i^p \leq \sum_B V_{tb} Nec(\xi)^p l(\xi)_{i,tb}^p + \frac{Nec(\xi)^p}{10^y}. \quad (4.124)$$

Fazendo  $Nec(\xi)^p l(\xi)_{i,tb}^p = LNec(\xi)_{i,tb}^p$  e  $F(\xi)_0^p l(\xi)_{i,tb}^p = LF(\xi)_{i,tb}^p$ , tem-se:

$$\sum_B V_{tb} LNec(\xi)_{i,tb}^p \leq Nec(\xi)_i^p \leq \sum_B V_{tb} LNec(\xi)_{i,tb}^p + \frac{Nec(\xi)^p}{10^y} \quad (4.125)$$

$$F(\xi)_{0,i}^p = \sum_B V_{tb} LF(\xi)_{i,tb}^p + (F(\xi)_0^p - \sum_i \sum_B V_{tb} LF(\xi)_{i,tb}^p) / N_I. \quad (4.126)$$

Logo, a linearização aproximada da restrição (4.121) resultou na substituição da mesma pelas expressões (4.126) a (4.134)

$$\sum_B V_{tb} LNec(\xi)_{i,tb}^p \leq Nec(\xi)_i^p \quad \forall p, i \quad (4.127)$$

$$Nec(\xi)_i^p \leq \sum_B V_{tb} LNec(\xi)_{i,tb}^p + \frac{Nec(\xi)^p}{10^y} \quad \forall p, i \quad (4.128)$$

$$LNec(\xi)_{i,tb}^p \leq \bar{S}l(\xi)_{i,tb}^p \quad \forall p, i, tb \quad (4.129)$$

$$LNec(\xi)_{i,tb}^p \leq Nec(\xi)^p \quad \forall p, i, tb \quad (4.130)$$

$$LNec(\xi)_{i,tb}^p \geq Nec(\xi)^p - \bar{S}(1 - l(\xi)_{i,tb}^p) \quad \forall p, i, tb \quad (4.131)$$

$$LF(\xi)_{i,tb}^p \leq \bar{S}l(\xi)_{i,tb}^p \quad \forall p, i, tb \quad (4.132)$$

$$LF(\xi)_{i,tb}^p \leq F(\xi)_0^p \quad \forall p, i, tb \quad (4.133)$$

$$LF(\xi)_{i,tb}^p \geq F(\xi)_0^p - \bar{S}(1 - l(\xi)_{i,tb}^p) \quad \forall p, i, tb. \quad (4.134)$$

### 4.3.

#### Modelo proposto para sistema de duas camadas arborescente – $P_2$

Raciocínio similar ao apresentado na Seção 3.2 pode ser aplicado aos modelos propostos considerando duas camadas. Em particular, para os modelos AF e AV, deseja-se minimizar o custo de manter o estoque durante um número finito de períodos, sujeito à restrição adicional de que o valor esperado da fração da demanda atendida seja maior ou igual a um valor pré-estabelecido gerencialmente.

Neste caso, o problema de primeiro estágio permanece o mesmo visto na seção 4.2.1.3, exceto o custo de falta que é removido da função objetivo e, o modelo de segundo estágio tem as seguintes restrições incluídas para um dado cenário  $\xi$ :

$$\sum_{p,\xi} Pr(\xi)F'(\xi)_i^p / \sum_{p,\xi} D(\xi)_i^p \leq 1 - \bar{f}_i \quad \forall p, i \quad (4.135)$$

$$I(\xi)_i^p \leq \bar{S}X(\xi)_i^p \quad \forall p, i \quad (4.136)$$

$$F(\xi)_i^p \leq \bar{S}(1 - X(\xi)_i^p) \quad \forall p, i, \quad (4.137)$$

onde  $\bar{f}_i$  é o valor esperado da fração das demandas atendidas prontamente ao varejista  $i$ ,  $F'(\xi)_i^p = \sum_p F(\xi)_i^p - \sum_p F(\xi)_i^{p-1}$  e, como já definido,  $X(\xi)_i^p$  indica se existe falta ou estoque a mão no varejista no cenário  $\xi$  no final do período  $p$ ;  $X(\xi)_i^p \in \{0,1\}$ .

## 5 Experimentos numéricos

Neste capítulo, os resultados dos experimentos computacionais realizados para várias instâncias com os modelos de programação estocástica propostos são apresentados. Considerando a demanda como um processo estacionário, o modelo para sistema de uma camada (PE) e os modelos para sistemas de duas camadas em série restrito (SR) e geral (SG) foram validados respectivamente através dos métodos de Hadley-Whitin (HW) e Axsäter (AX). Considerando a demanda como um processo não estacionário, o modelo PE foi validado através de simulação. Os demais modelos, tanto considerando a demanda como um processo estacionário como não estacionário, foram validados pela metodologia proposta.

Os modelos de programação estocástica de dois estágios e a rotina de simulação de cenários via técnica SAA foram implementados no software AIMMS 3.13. O PLIM foi resolvido pelo solver CPLEX versão 12.5. Os resultados numéricos foram obtidos usando um Processador AMD Duo-Core 1.90 GHz com 4 GB de RAM.

### 5.1. Sistema de uma camada e estacionariedade: Modelo PE - B<sub>2</sub>

Com o intuito de exemplificar a metodologia proposta PE foi considerada uma instância de referência com base em Hadley-Whitin (1963).

Neste experimento, considerou-se o modelo que minimiza custos relevantes PE, considerando vendas perdidas. O total de períodos considerados foi  $N_p = 42$ , onde cada período representa um mês. Os valores assumidos para os parâmetros são:  $N_R = 10$ ,  $r \in \{1,2,3, \dots, 10\}$ ,  $C_F^p = 25, 50, 75$  e  $150, \forall p$ ,  $h^p = 0,2, 0,4$ , e  $0,6 \forall p$ ,  $b^p = 25 \forall p$ ,  $L = 2$ .

Uma consideração importante, que está implícita nos métodos tradicionais de gestão de estoques é que os mesmos funcionam em estado estacionário (planejamento infinito), sendo desnecessário se preocupar com a inicialização de

variáveis. No entanto, uma vez que estamos propondo uma abordagem baseada em otimização para gestão de estoques considerando planejamento finito, é obrigatório definir os níveis de estoques iniciais  $(I(\xi)^0, IT(\xi)^0)$ . Portanto, para minimizar a influência da inicialização destas variáveis nos resultados da otimização, foram considerados iguais a zero os custos de encomendar, de manter em estoque e de falta nos 6 primeiros meses, de modo a ser possível a formação de estoque inicial para o processo de planejamento, começando no período 7. Ao fazer isso, estamos incluindo em nossos experimentos aleatórios níveis de estoque que se comportam de acordo com a estocasticidade da demanda.

Neste experimento, o número total de cenários  $N$  foi definido de acordo com os desenvolvimentos apresentados na Seção 2.5. Portanto, para um intervalo de confiança de 1%, estabelecemos  $\alpha = 0,01$  e  $\beta = 0,055$ , considerando uma amostra de 200 cenários.

Para geração dos  $N$  cenários utilizou-se a hipótese que a demanda é representada por um processo estocástico estacionário de segunda ordem conforme (2.28). A demanda semanal pelo item segue uma distribuição normal com média 50 e variância 75. As demandas semanais apresentam a mesma média e o mesmo desvio-padrão e é admitido que não existe correlação entre as demandas semanais.

A Tabela 2 descreve resumidamente o tamanho da instância do equivalente determinístico relativa ao modelo de programação estocástica de dois estágios (PE), assim como o esforço computacional necessário para resolvê-la em termos de uso de CPU.

Tabela 2 – Dados do modelo equivalente determinístico  $PE - B_2$

Modelo	$N$	$N_p$	Total de variáveis	Total de restrições	Tempo (s)
$PE - B_2$	90	42	34388 (52 inteiras)	42023	46,15

Neste experimento, usando a técnica proposta PE, para obtenção dos limites inferiores foram feitas 10 repetições ( $M=10$ ) considerando 90 cenários cada ( $N=90$ ). Dos resultados, as cinco boas soluções candidatas foram selecionadas  $(u'^r, v'^p, S')$ . Para obtenção do limite superior todas as soluções candidatas foram previamente testadas 50 vezes ( $M'=50$ ) considerando os mesmos 90 cenários. Aquela que apresentou o menor erro percentual obtido pela razão entre o desvio

padrão dos resultados simulados por SAA e seu respectivo limite inferior (média dos resultados simulados por SAA) foi testada 1000 vezes ( $M'=1000$ ).

A Tabela 3 mostra as estimativas obtidas usando PE para  $R^*(PE), S^*(PE), LI, \sigma_{LI}, LS, \sigma_{LS}, gap, lie$ , e  $lse$ . A coluna  $\hat{g}_{200}$  representa a estimativa do valor mínimo da função objetivo, enquanto  $\hat{\sigma}_{200}$  se refere à variância de  $\hat{g}_{200}$ . A coluna  $N$  indica a número mínimo de cenários necessários, calculado de acordo com (2.35). As colunas  $R^*(PE)$  e  $S^*(PE)$  mostram as estimativas dos valores ótimos de  $R$  e  $S$ , respectivamente; as colunas  $LI$  ( $LS$ ) mostram os resultados dos limites inferiores (superiores) do valor ótimo da função objetivo; as colunas  $\sigma_{LI}$  ( $\sigma_{LS}$ ) mostram as estimativas das variâncias dos  $LI$  ( $LS$ ); a coluna  $gap$  mostra a diferença entre os valores do limite superior e limite inferior; a coluna  $lie$  mostra o erro percentual da estimativa do  $LI$  ( $(\sigma_{LI}/LI) * 100$ ) e a coluna  $lse$  mostra o erro percentual da estimativa do  $LS$  ( $(\sigma_{LS}/LS) * 100$ ).

Tabela 3 – Resumo dos resultados obtidos por PE

$C_F$	$h^p$	$\hat{g}_{200}$	$\hat{\sigma}_{200}$	$N$	$R^*$ (PE)	$S^*$ (PE)	$LI$	$\sigma_{LI}$	$LS$	$\sigma_{LS}$	$gap$	$lie$	$lse$
25	0.2	375	36	81	2	237	372,2	5,1	372,1	3,8	-0,1	1,36	1,01
	0.4	570	57	88	2	232	571,8	6,1	571,9	5,5	0,1	1,07	0,97
	0.6	724	51	44	1	175	720,5	5,5	725,5	5,4	5,0	0,76	0,75
50	0.2	489	44	71	3	288	485,7	4,1	487,0	3,8	1,3	0,85	0,79
	0.4	727	63	66	2	232	718,5	7,9	721,7	5,6	3,2	1,09	0,78
	0.6	904	70	53	2	224	911,4	8,9	910,7	7,3	-0,7	0,98	0,81
75	0.2	573	49	64	4	339	575,1	6,3	576,1	4,7	1,0	1,10	0,81
	0.4	841	58	42	3	282	844,3	7,2	846,6	5,7	2,4	0,85	0,68
	0.6	1059	75	44	2	229	1062,5	8,4	1061,7	5,5	-0,8	0,79	0,52
150	0.2	760	58	51	5	390	765,4	3,8	763,2	4,4	-2,3	0,49	0,57
	0.4	1104	60	26	4	327	1119,0	6,4	1122,3	5,7	3,3	0,57	0,51
	0.6	1390	79	28	3	278	1395,5	9,9	1394,4	8,1	-1,1	0,71	0,58

Os resultados para este primeiro conjunto de instâncias sugerem que tal configuração do experimento, considerando apenas 10 repetições para o cálculo do limite inferior, é razoável, uma vez que erro obtido variou de 0.49% a 1.36%, enquanto que para o limite superior a faixa do erro vai de 0.51% a 1.01%. Destaca-se que, devido à natureza estocástica da geração de cenários, alguns valores no intervalo de colunas são negativos.

Para validar os métodos HW e PE com relação aos custos totais mínimos, estimou-se os custos totais mínimos usando uma abordagem baseada em simulação. Com essa intenção, consideramos um total de 11 valores para o par  $(R, S)$  na vizinhança de  $(R^*(PE), S^*(PE))$  (que foram obtidos por PE e utilizados na Tabela 3 para calcular o limite superior  $LS$ ), com  $R = R^*(PE)$  e  $S$  variando de  $S^*(PE) - 25$  a  $S^*(PE) + 25$ , em incrementos de 5. Para cada simulação com um valor fixo do par  $(R, S)$ , utilizou-se  $N_p = 12.000$ . A Tabela 4 mostra os melhores valores  $(R^*(PE), S^*(SIM))$  obtidos com a simulação, os custos totais mínimos dados por essas simulações ( $SIM$ ), os custos totais mínimos dados pelo método HW ( $HW$ ) e os custos totais mínimos dado pelo método PE ( $LS$ ).

Tabela 4 – Custo mínimo total obtido por HW, PE e a análise de sensibilidade baseada em simulação

$C_F$	$h$	$S^*(SIM)$	$SIM$	$HW$	$LS$	$hwr$	$lsr$
25	0.2	237	375,5	374	372,1	0,91%	0,39%
	0.4	232	572,8	576	571,9	0,17%	0,55%
	0.6	175	734,7	734	725,5	1,26%	0,10%
50	0.2	283	488,3	489	487,0	0,25%	0,15%
	0.4	232	721,8	726	721,7	0,01%	0,58%
	0.6	224	913,2	919	910,7	0,27%	0,63%
75	0.2	334	575,6	579	576,1	0,09%	0,59%
	0.4	287	854,2	853	846,6	0,85%	0,10%
	0.6	229	1068,1	1069	1061,7	0,60%	0,09%
150	0.2	390	783,7	778	763,2	1,40%	0,53%
	0.4	327	1121,5	1129	1122,3	0,07%	0,66%
	0.6	273	1400,2	1406	1394,4	0,42%	0,41%

A partir da Tabela 4 pode-se notar que, para a maioria das instâncias, o  $LS$  dado por PE tem valores menores para os custos mínimos totais. Além disso, os custos mínimos totais obtidos pela simulação ( $SIM$ ) são próximos aos valores aproximados do ótimo obtido por HW ( $hwr = |SIM - HW|/|HW|$ ), e também estão próximos aos limites superiores dados por PE ( $lsr = |SIM - LS|/|LS|$ ). É importante destacar que a verificação com o valor ótimo exato nem sempre é possível, uma vez que as soluções ótimas muitas vezes não são obtidas trivialmente. Além disso, a proximidade dos valores de  $S^*(PE)$  e  $S^*(SIM)$  (sendo

de fato idênticos em muitas das experiências) indica que o método proposto é confiável em termos de se encontrar boas soluções.

Em seguida, para estender a validação da metodologia proposta, foram realizados testes adicionais considerando variantes da primeira instância, considerando horizontes de planejamentos  $N_P$  distintos, bem como valores distintos para os parâmetros de custos. Neste experimento, foram simulados valores de  $N$  variando de 10 em 10 cenários, começando com 10 e terminando até que o gap de otimalidade se tornasse próximo de 1%, resultando em  $N = 10, 20$  e 30, conforme demonstrado na Tabela 5. Além disso, para cada valor de  $N$  foram considerados 3 valores do número de períodos  $N_P = 18, 30$  e 42, onde cada período representa um mês. Mais uma vez, para minimizar a influência da inicialização destas variáveis nos resultados da otimização, foram considerados iguais a zero os custos de encomendar, de manter em estoque e de falta nos 6 primeiros meses para formação de estoques iniciais.

A Tabela 5 descreve resumidamente o tamanho do equivalente determinístico das instâncias que foram resolvidas, assim como o esforço computacional necessário para resolvê-las em termos de uso de CPU, considerando uma política de reposição e controle de estoques  $(R, S)$  para 12 meses, 24 meses e 36 meses, respectivamente.

Tabela 5 - Dados das variantes do modelo equivalente determinístico  $PE - B_2$

$N$	$N_P$	Total de variáveis	Total de restrições	Tempo (s)
	18	1700 (28 inteiras)	2087	0,59
10	30	2804 (40 inteiras)	3455	0,56
	42	3908 (52 inteiras)	4823	0,90
	18	3350 (28 inteiras)	4097	1,56
20	30	5534 (40 inteiras)	6785	1,98
	42	7718 (52 inteiras)	9473	1,93
	18	5000 (28 inteiras)	6107	3,18
30	30	8264 (40 inteiras)	10115	3,74
	42	11528 (52 inteiras)	14123	4,06

Além disso, foram considerados, para cada experimento com  $N$  cenários e  $N_P$  períodos, 4 valores do custo fixo de encomendar,  $C_F = 25, 50, 75$  e  $150$ . Ainda, para cada valor de  $C_F$  foram considerados 3 valores do custo de manter uma unidade do item em estoque por mês,  $h = 0,2, 0,4$  e  $0,6$ . O custo de falta  $b$  foi considerado igual a 25, perfazendo um total de 98 instâncias. O tamanho do ciclo  $R$  pode variar de 1 até 10 meses ( $N_R = 10$ ). A demanda pelo item segue uma distribuição normal com média igual a 50 e variância igual a 75 em cada mês. As demandas mensais apresentam a mesma média e o mesmo desvio-padrão e ainda é admitido que não existe correlação entre as essas demandas. O tempo de reposição  $L$  foi considerado fixo e igual a 2 meses. Para cada conjunto de dados  $(N_P, N, C_F, h)$  o experimento foi executado para 10 amostras independentes de  $N$  cenários da demanda. É bom ressaltar que tais premissas estão sendo usadas somente para efeito de comparação com o modelo proposto HW, uma vez que a metodologia proposta vale para qualquer modelagem do fenômeno estocástico que possa ser representada por intermédio de cenários discretos.

O limite inferior ( $LI$ ) obtido por PE e a aproximação do valor ótimo obtido por HW foram usados para calcular o erro percentual absoluto (EPA), que fornece uma aproximação do gap de otimalidade, e portanto pode ser usado como medida de qualidade da solução obtida por PE. EPA é definido como

$$EPA = \left| \frac{HW - LI}{HW} \right| \times 100. \quad (5.1)$$

Lembrem-se que o limite inferior encontrado por PE foi o melhor limite inferior selecionado a partir de 10 repetições considerando  $N$  cenários. Para cada conjunto de dados  $(N, N_P, C_F, h)$ , a Tabela 6 mostra os resultados comparativos de PE e HW usando EPA.

Continuando com a validação, a Tabela 7 mostra os resultados comparativos de  $S^*$  obtidos pelos métodos HW e PE ( $S^*(HW)$  e  $S^*(PE)$ , respectivamente). Como foram realizadas 10 execuções do método PE para cada instância, na comparação foi usado o valor médio obtido para  $S^*$ .

Tabela 6 – Solução ótima aproximada obtida por HW (*HW*), limite inferior obtido por PE (*LI*) e EPA

$N_P$			18			30			42		
$N$			10	20	30	10	20	30	10	20	30
$C_F$	$h$	<i>HW</i>	<i>LI</i> e EPA								
25	0,2	374	364 (2,8)	363 (3,0)	369 (1,4)	365 (2,4)	366 (2,0)	374 (0,0)	372 (0,6)	368 (1,6)	371 (0,7)
	0,4	576	560 (2,8)	560 (2,9)	569 (1,3)	556 (3,5)	566 (1,8)	573 (0,6)	565 (2,0)	579 (0,4)	570 (1,0)
	0,6	734	706 (3,9)	707 (3,7)	713 (2,9)	712 (3,0)	718 (2,2)	716 (2,5)	709 (3,4)	720 (2,0)	723 (1,5)
50	0,2	489	471 (3,8)	488 (0,4)	485 (0,9)	483 (1,3)	487 (0,4)	483 (1,3)	482 (1,5)	486 (0,6)	486 (0,6)
	0,4	726	708 (2,5)	714 (1,7)	700 (3,6)	714 (1,7)	718 (1,2)	715 (1,6)	721 (0,7)	721 (0,8)	721 (0,7)
	0,6	919	909 (1,2)	898 (2,3)	890 (3,2)	889 (3,3)	911 (0,9)	912 (0,8)	906 (1,5)	905 (1,6)	908 (1,2)
75	0,2	579	573 (1,0)	572 (1,3)	580 (0,1)	575 (0,8)	584 (0,9)	580 (0,2)	579 (0,1)	579 (0,1)	580 (0,2)
	0,4	853	820 (3,9)	839 (1,7)	839 (1,7)	837 (1,9)	838 (1,7)	836 (2,1)	835 (2,2)	848 (0,6)	848 (0,6)
	0,6	1069	1038 (2,9)	1062 (0,7)	1040 (2,8)	1060 (0,8)	1052 (1,6)	1054 (1,4)	1050 (1,8)	1057 (1,1)	1060 (0,9)
150	0,2	778	797 (2,4)	810 (4,1)	802 (3,1)	781 (0,4)	792 (1,7)	795 (2,2)	783 (0,6)	788 (1,2)	793 (1,8)
	0,4	1129	1141 (1,0)	1135 (0,5)	1132 (0,2)	1124 (0,4)	1140 (0,9)	1138 (0,8)	1145 (1,4)	1132 (0,3)	1138 (0,8)
	0,6	1406	1353 (3,7)	1376 (2,1)	1384 (1,6)	1378 (2,0)	1393 (0,9)	1393 (0,9)	1383 (1,6)	1391 (1,0)	1397 (0,6)

A Tabela 7 mostra também os erros percentuais absolutos (EPA) dos valores médios de  $S$  ótimo obtidos por PE em relação ao valor obtido por HW, para cada conjunto  $(N_P, N, C_F, h)$ . A fórmula do erro percentual absoluto no cálculo de  $S$  é semelhante à formula do erro percentual absoluto aplicada para o custo mínimo (5.1). As Tabelas 6 e 7, como era de se esperar, indicam que, quando se aumenta o número de períodos e o número de cenários, o EPA diminui.

A Tabela 8 mostra o comparativo do valor de  $R^*$  calculado por HW e PE ( $R^*(HW)$  e  $R^*(PE)$ , respectivamente) para 36 instâncias com  $N_P = 30, N=10, 20$  e  $30, C_F = 25, 50, 75$  e  $150, h = 0.2, 0.4$  e  $0.6$ , considerando  $M = 10$  repetições.

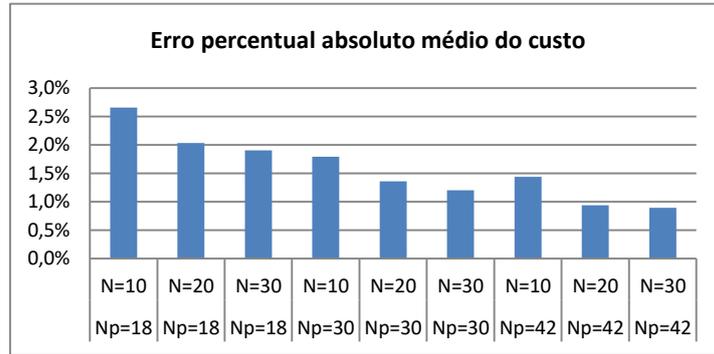


As Figuras 5.a e 5.b mostram os valores médios dos erros percentuais absolutos dos custos totais mínimos obtidos por PE para cada conjunto  $(N_p, N)$ . Na Figura 5.a, as médias estão agrupadas por  $N_p$ , já na Figura 5.b as médias estão agrupadas por  $N$ . As Figuras 5.c e 5.d apresentam os valores médios dos erros percentuais absolutos dos custos totais obtidos por PE, considerando, em particular, 42 períodos e 30 cenários para cada conjunto  $(C_F, h)$ . Na Figura 5.c tem-se os valores agrupados por  $C_F$ , enquanto que na Figura 5.d os valores estão agrupados por  $h$ .

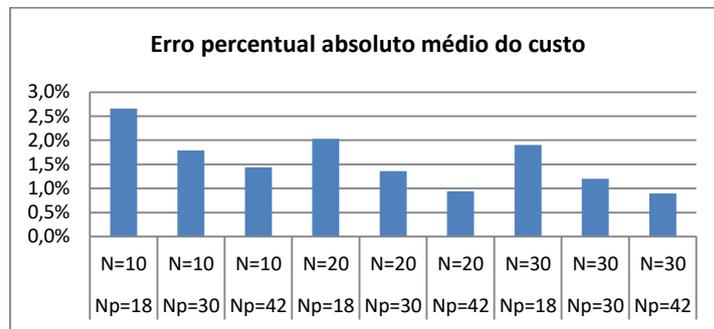
As Figuras 6.a e 6.b mostram os valores médios dos erros percentuais absolutos dos  $S$ 's ótimos obtidos por PE para cada conjunto  $(N_p, N)$ . Na Figura 6.a têm-se as médias agrupadas por  $N_p$  e na Figura 6.b têm-se as médias agrupadas por  $N$ . As Figuras 6.c e 6.d apresentam os valores médios, considerando, em particular, 42 períodos e 30 cenários para cada conjunto  $(C_F, h)$ . Na Figura 6.c os valores estão agrupados por  $C_F$ , enquanto que na Figura 6.d os valores estão agrupados por  $h$ .

Como pode ser observado na Tabela 6, para alguns casos os valores obtidos por PE são maiores que o valor obtido por HW (por exemplo, no caso onde  $N_p = 30$ ,  $C_F = 150$  e  $h = 0,2$ ). É possível justificar este comportamento observando-se na Tabela 8 os valores de  $R^*$  obtidos por HW e por PE. Os valores de  $R^*$  obtidos por PE são majoritariamente iguais a 6, quando deveriam ser iguais a 5 (resultado de HW). Analisando, por exemplo, o resultado para  $N_p = 30$  (24 períodos) com  $R = 5$ , o número de pedidos feitos dado pelo modelo HW é  $24/5 = 4,8$ . Para PE o número total de pedidos realizados é de fato 5. Isto gera um custo adicional de 20% sobre o valor do custo fixo. No caso de  $N_p = 30$  com  $R = 6$ , o número de pedidos para os dois modelos deve ser 4. Este impacto faz com que PE obtenha o custo total com  $R = 6$  menor do que com  $R = 5$ , quando pela lógica deveria ser o inverso. Isto indica que nestes casos os valores do custo esperado em PE são estimadores enviesados do LI. Este efeito se torna mais evidente para os casos em que  $C_F$  é maior. Este viés pode ser minimizado na medida em que se aumenta  $N_p$ . Por exemplo, para o caso de  $N_p = 90$ , o valor de  $R$  obtido por PE é 5, o erro do custo é de 0,9% e o erro de  $S$  de 0,5%. Em particular, os resultados numéricos mostram que para um horizonte de planejamento de 42 meses, considerando 30

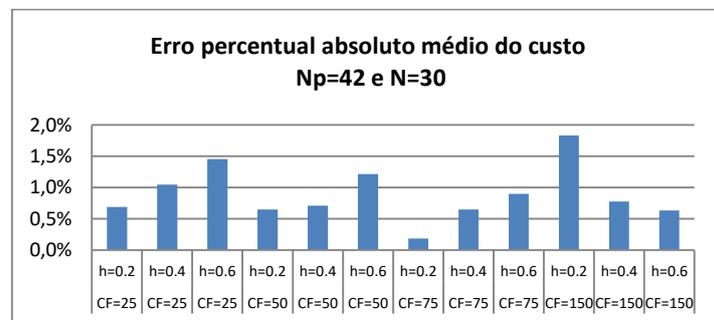
cenários para a demanda, a metodologia proposta gerou em erro médio de 0,9% no custo mínimo total.



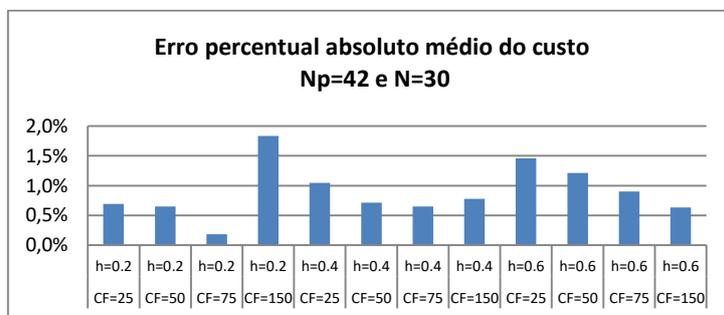
(a) Agrupado por  $N_p$



(b) Agrupado por  $N$

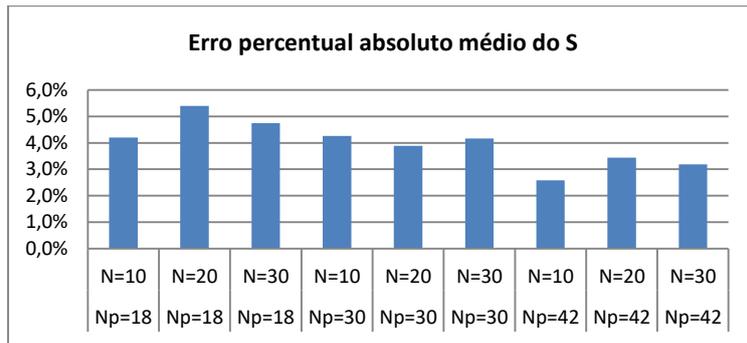


(c) Agrupado por  $C_f$

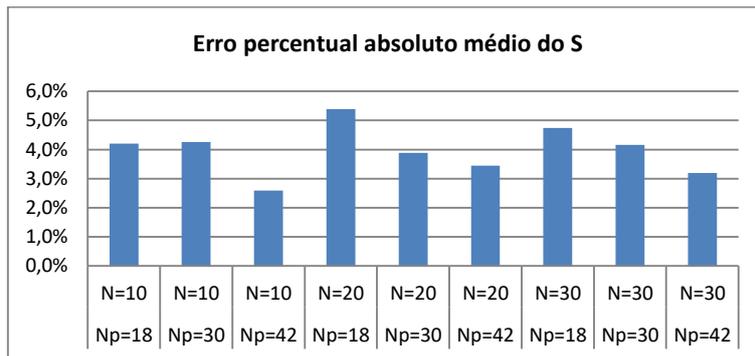


(d) Agrupado por  $h$

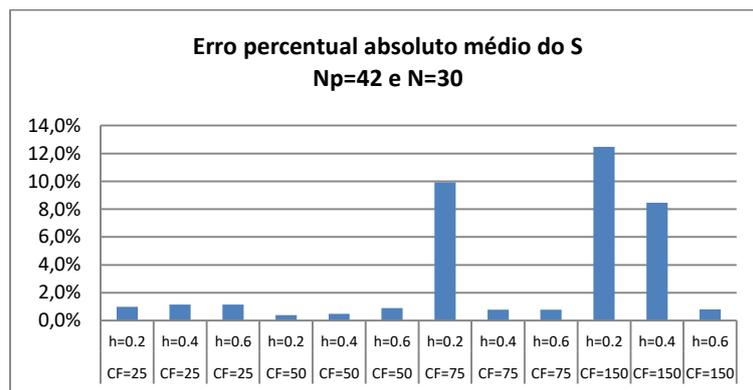
Figura 5 - Erro percentual absoluto médio dos custos totais mínimos



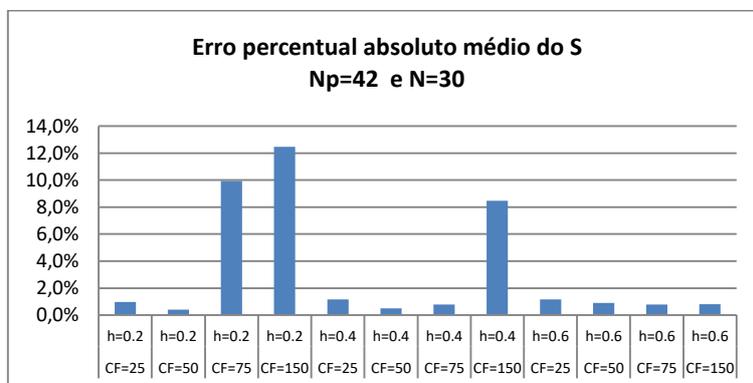
(a) Agrupado por  $N_p$



(b) Agrupado por  $N$



(c) Agrupado por  $C_F$



(d) Agrupado por  $h$

Figura 6 - Erro percentual absoluto médio do S

Vale notar que, nesta primeira instância, o custo de falta assumido tem magnitude muito maior que os custos de manter o estoque. Tal fato gera níveis de estoques elevados (valores elevados de  $S$ ), que por sua vez, leva a pequenas probabilidades de falta que são principalmente observadas num número limitado de períodos próximos aos períodos de reabastecimento. Esta opção remete ao fato de que o método HW considerando vendas perdidas é de fato uma boa aproximação do custo ótimo do problema quando a fração média do tempo de indisponibilidade do item é pequena, uma vez que não é capaz de considerar os efeitos das vendas perdidas, que podem ocorrer entre o momento em que uma encomenda é feita até o momento da sua entrega (para uma discussão detalhada a esse respeito, consulte a Hadley e Within (1963)). No entanto, vale ressaltar que o método proposto é mais abrangente podendo considerar quaisquer valores de custo de falta e de manter o estoque, independente da sua proporcionalidade.

Como a relação entre  $R$  e  $S$  é dada pela equação  $S = D(R + TE) + Z\sigma_{R+TE}$  (Hadley e Whitin, 1963), nota-se que quanto maior o valor de  $R$  maior será o de  $S$ . Consequentemente, um erro no valor de  $R$  implica em um erro no valor de  $S$ . Este efeito pode ser observado na Tabela 8 e nos Figuras 6.c e 6.d, onde os resultados referentes aos conjuntos  $(C_F, h)$  iguais a  $(75, 0,2)$ ,  $(150, 0,2)$  e  $(150, 0,4)$  tiveram um erro muito grande para  $S$ . Verifica-se também que estes erros grandes associados a  $S$  pouco influenciam nos valores mínimos do custo total (Tabela 6). Para justificar este comportamento, os valores do custo mínimo no entorno dos valores de  $R$  ótimo de HW foram analisados. Os casos em que os valores de  $R$  variam muito correspondem à variação pequena dos valores do custo mínimo. Como  $S$  e  $R$  são diretamente proporcionais, comportamento análogo é esperado de  $S$ . Isto justifica o pequeno impacto que esta variação de  $S$  tem sobre o custo mínimo.

Conforme observado nas Figuras 5.b, o aumento de  $N_p$  e  $N$  impactam na redução do erro absoluto percentual do custo mínimo, sendo o aumento de  $N_p$  mais impactante que o aumento de  $N$ . Ao analisar as Figuras 6.b, verifica-se que o impacto de  $N_p$  e  $N$  na redução do erro absoluto percentual de  $S$  ótimo é semelhante ao caso anterior. Analisando agora os resultados dos erros percentuais do custo mínimo, à medida que se varia  $C_F$  e  $h$  (Figuras 5c e 5.d), nota-se que não

existe um padrão de comportamento definido para erro absoluto percentual de  $S$  ótimo no conjunto de instâncias consideradas.

## 5.2.

### Sistema de uma camada e não estacionariedade: Modelo $PE - B_2$

Este teste computacional mostra uma aplicação mais ampla da metodologia proposta, em que os pressupostos necessários para a utilização do método de HW não são necessários.

Neste experimento, considerou-se o modelo PE que minimiza custos relevantes PE e que aborda vendas perdidas. O total de períodos considerados foi de 54 ( $N_p = 54$ ), onde cada período representa uma semana. Os valores assumidos para os parâmetros são:  $N_R = 10$ ,  $r \in \{1,2,3, \dots, 10\}$ ,  $c_F^p = 75 \forall p$ ,  $h^p = 0,1 \forall p$ ,  $b^p = 25 \forall p$  e  $L = 2$ .

Mais uma vez, com o objetivo de minimizar a influência da inicialização de  $(I(\xi)^0, IT(\xi)^0)$  no resultado da otimização, foram considerados iguais a zero os custos de encomendar, de manter em estoque e de falta nos 6 primeiros períodos de forma que fosse possível a formação de estoque inicial.

Para geração dos  $N$  cenários utilizou-se a hipótese que a demanda é representada por um processo estocástico não estacionário dado por um passeio aleatório (2.29). A demanda do primeiro período foi fixada em  $D(\xi)^1 = 12,5$ , e  $\varepsilon^p$  segue uma distribuição normal com média zero e variância 2,5.

A Tabela 8 descreve resumidamente o tamanho da instância do equivalente determinístico relativa ao modelo PE, assim como o esforço computacional necessário para resolvê-lo em termos de uso de CPU.

Tabela 9 – Dados do modelo equivalente determinístico  $PE - B_2$

Modelo	$N$	$N_p$	Total de variáveis	Total de restrições	Tempo (s)
$PE - B_2$	50	54	24572 (64 inteiras)	30071	101,71

Neste experimento, usando a técnica proposta PE, para obtenção dos limites inferiores foram feitas 30 repetições ( $M=30$ ) considerando 50 cenários cada ( $N=50$ ). Destes, cinco bons candidatos a solução foram selecionados ( $u'^r, v'^p, S'$ ). Para obtenção do limite superior todos os candidatos foram previamente testados

50 vezes ( $M'=50$ ) considerando os mesmos 50 cenários ( $N=50$ ). Aquele que apresentou o menor erro percentual obtido pela razão entre o desvio padrão dos resultados simulados por SAA e seu respectivo limite inferior (média dos resultados simulados por SAA) foi testado 100 vezes ( $M'=100$ ). A Tabela 10 mostra os resultados encontrados relativos à média dos resultados simulados por SAA (média por SAA), ao desvio padrão dos resultados simulados por SAA (desvio por SAA) e ao erro percentual do melhor limite superior e inferior para o custo total mínimo do problema obtidos por PE.

Tabela 10 –limites superior e inferior usando PE

	<i>LI</i>	<i>LS</i>
Media por SAA	1.449	1.443
Desvio padrão por SAA	69	52
Erro %	4,8%	3,5%

Os resultados sugerem que tal configuração do experimento considerando 30 repetições para o limite inferior é razoável, uma vez que o erro obtido foi de 4,8%. Para o limite superior o erro foi de 3,5%. Note que o custo total avaliado em uma solução ótima do problema devem estar entre os limites inferior e superior obtidos pelo método PE.

Para validar a solução obtida por PE, com relação a solução associada ao limite superior encontrado, foram estimados os custos totais dos seus vizinhos para comparação. Para isso, foram considerados 140 valores dos pares  $(R, S)$  próximos a  $(R^* = 5, S^* = 196)$ , com  $R$  variando de 3 a 9, de um em um, e  $S$  variando de 120 a 310, de 10 em 10. Para cada simulação com valores fixos do par  $(R, S)$ , foi considerado  $N = 100$  e  $M = 100$ . A Tabela 11 mostra os custos totais obtidos em tais simulações.

Como pode ser visto na Tabela 11, o par com  $R^* = 6$  e  $S^* = 220$  mostra o custo mínimo total igual a 1.465 (em negrito), com um percentual de erro de 0,6% em relação ao custo total que corresponde ao limite superior encontrado. Na escala de cores, cores mais claras indicam valores do custo total menores e cores mais escuras valores do custo total maiores.

Tabela 11 – Custos totais para distintos valores de R e S

		R						
		3	4	5	6	7	8	9
S	120	1.958	2.076	2.263	2.589	3.128	3.622	4.199
	130	1.842	1.862	1.972	2.387	2.738	3.263	3.836
	140	1.790	1.720	1.858	2.032	2.434	2.92	3.333
	150	1.790	1.659	1.711	1.858	2.235	2.578	3.1
	160	1.803	1.63	1.589	1.691	2.006	2.264	2.741
	170	1.837	1.609	1.516	1.593	1.881	2.102	2.462
	180	1.865	1.606	1.482	1.558	1.736	1.927	2.205
	190	1.905	1.626	1.476	1.515	1.629	1.784	2.004
	200	1.950	1.654	1.473	1.474	1.604	1.708	1.850
	210	1.992	1.679	1.476	1.476	1.548	1.675	1.739
	220	2.038	1.726	1.506	<b>1.465</b>	1.503	1.577	1.604
	230	2.088	1.764	1.543	1.487	1.500	1.528	1.569
	240	2.135	1.809	1.577	1.511	1.503	1.515	1.559
	250	2.183	1.854	1.61	1.54	1.517	1.508	1.500
	260	2.228	1.899	1.66	1.572	1.522	1.501	1.495
	270	2.278	1.949	1.704	1.614	1.559	1.512	1.498
	280	2.325	1.999	1.746	1.651	1.588	1.545	1.488
	290	2.374	2.043	1.791	1.694	1.624	1.566	1.522
	300	2.42	2.09	1.841	1.745	1.665	1.587	1.529
310	2.469	2.138	1.884	1.785	1.698	1.628	1.553	

### 5.3.

#### Sistemas de duas camadas em série: Modelos $SR - B_3$ e $SG - B_3$

Com o intuito de exemplificar numericamente a metodologia proposta nas Seções 4.1.1 (horizonte de planejamento infinito) e 4.1.2 (horizonte de planejamento finito) foi considerada uma adaptação de uma instância existente em Axsäter (2006), referente a um sistema de distribuição de um item com duas camadas com um único CD e um único varejista.

Neste experimento, considerou-se os modelos que minimizam custos relevantes  $SR - B_3$  e  $SG - B_3$ , incluindo o custo de falta. Foram geradas instâncias considerando 1 CD e 1 varejista. Para o modelo  $SR - B_3$  os parâmetros considerados são:  $N_{R_1} = 1, r_1 = 1, N_{R_0} = 1, r_0 = 1, h_0^p = 1 \forall p, h_i^p = 1,5 \forall i, p,$

$b_i^p = 10 \forall i, p$ ,  $L_0 = 5$  e  $L_1 = 5$ . Para o modelo  $SR - B_3$  os parâmetros considerados são:  $h_0 = 1$ ,  $h_1 = 1,5$ ,  $b_1 = 10$ ,  $L_0 = 5$  e  $L_1 = 5$ .

Mais uma vez, com o objetivo de minimizar a influência da inicialização de  $(I(\xi)^0, IT(\xi)^0)$  no resultado da otimização do modelo  $SG - B_3$ , foram considerados iguais a zero os custos de encomendar, de manter em estoque e de falta nos 10 primeiros períodos, num total de 50 períodos, possibilitando a formação de estoque inicial. Note que, conforme salientado anteriormente, o modelo  $SR - B_3$  não requer que sejam feitas inicializações.

Para geração dos  $N$  cenários utilizou-se a hipótese que a demanda é representada por um processo estocástico estacionário de segunda ordem conforme (2.28). A demanda periódica pelo item segue uma distribuição normal com média 10 e desvio-padrão 5. As demandas periódicas apresentam a mesma média e o mesmo desvio-padrão e é admitido que não existe correlação entre as demandas periódicas.

A Tabela 12 descreve resumidamente os tamanhos das instâncias dos equivalentes determinísticos que foram resolvidos, assim como os esforços computacionais necessários para resolver os modelos  $SR - B_3$  e  $SG - B_3$  em termos de uso de CPU.

Tabela 12 - Dados do modelo equivalente determinístico  $SR - B_3$  e  $SG - B_3$

Modelo	$N$	$N_p$	Total de variáveis	Total de restrições	Tempo (s)
$SR - B_3$	100		803 (100 inteiras)	903	2,45
$SG - B_3$	30	50	18033(3000 inteiras)	18035	295

Usando o mesmo princípio utilizado no caso do modelo de uma camada, assumiu-se que o limite superior se aproxima muito do valor ótimo para uma instância conhecida do problema, calculado via o procedimento proposto por Axsäter. Sendo assim, este foi assumido como sendo o melhor limite superior e será usado para validar a metodologia proposta como segue.

Para o caso de horizonte infinito com o modelo proposto  $SR - B_3$ , o limite inferior foi obtido com 100 repetições ( $M=100$ ) considerando 100 cenários cada ( $N=100$ ), o que foi suficiente para constatar nos experimentos numéricos que o gap de otimalidade estava próximo de 1%.

Para o caso de horizonte finito com o modelo proposto  $SG - B_3$ , considerou-se  $N$  e  $N_p$  fixos e conhecidos. Para obtenção dos limites inferiores foram feitas 10 repetições ( $M = 10$ ) considerando 30 cenários cada ( $N = 30$ ) e 50 períodos ( $N_p = 50$ ), o que foi suficiente para se constatar pelos experimentos numéricos que o gap de otimalidade estava próximo de 2%.

Para o caso de horizonte infinito com o modelo proposto  $SR - B_3$ , considerou-se  $N$  fixo e conhecido. Para obtenção dos limites inferiores foram feitas 100 repetições ( $M = 100$ ) considerando 100 cenários cada ( $N = 100$ ), o que foi suficiente para se constatar pelos experimentos numéricos que o gap de otimalidade estava próximo de 1%.

Os resultados dos modelos de programação estocástica de dois estágios  $SR - B_3$  e  $SG - B_3$  foram comparados com o do modelo AX para uma instância adaptada. A Tabela 13 mostra os resultados dos custos médios,  $S_0$  e  $S_1$ , e seus respectivos erros percentuais absolutos dos valores gerados por PE, comparando-os com os resultados obtidos por AX. Tanto para o caso de horizonte infinito abordado pelo modelo  $SR - B_3$  como para o caso de horizonte finito abordado pelo modelo  $SG - B_3$ , os resultados correspondem a erros médios, respectivamente de 0,76% e 1,78% no custo mínimo, mesmo para um número pequeno de períodos e de cenários.

Para o cálculo do erro percentual absoluto, formula similar a (5.1) foi usada, substituindo HW por AX

Tabela 13 - Resultados obtidos por  $SR - B_3$  e  $SG - B_3$  e AX

	AX	$SR - B_3/EPA$		$SG - B_3/EPA$	
$CM$	39,4	39,1	0,76%	38,7	1,78%
$S_0$	129,7	130	0,23%	130	0,23%
$S_1$	81	80,7	0,37%	80,2	0,99%

### 5.3.1.

#### Ganho computacional do modelo $SL - B_3$

Além disso, para se analisar o impacto do custo fixo do CD,  $C_{F_0}^p$ , na escolha de  $R_0$ , bem como a diferença entre os tempos de processamento dos modelos  $SG - B_3$  e  $SL - B_3$ , foram geradas instâncias com:  $N_{R_1} = 1$ ,  $r_1 = 1$ ,  $N_{R_0} = 3$ ,  $r_0 \in$

{1,2,3}, para três valores de custo fixo de encomendar no CD,  $C_{F_0}^p = 0, 10$  e  $20$ . Foram considerados iguais a zero os custos de encomendar, de manter estoque e de falta nos 10 primeiros períodos, num total de 50 períodos, de forma a possibilitar a formação de estoque inicial. Para obtenção do limite inferior foram feitas 10 repetições ( $M = 10$ ), considerando 30 cenários cada ( $N = 30$ ) e 50 períodos ( $N_p = 50$ ), o que foi suficiente para que pelo menos 80% das simulações feitas tivesse o mesmo resultado para  $r_0$ .

A Tabela 14 descreve resumidamente os tamanhos das instâncias dos equivalentes determinísticos que foram resolvidas por  $SG - B_3$  e  $SL - B_3$ , assim como os esforços computacionais necessários para resolver as instâncias em termos de uso de CPU.

Tabela 14 - Dados do modelo equivalente determinístico  $SG - B_3$  e  $SL - B_3$

Modelo	$N$	$N_p$	Total de variáveis	Total de restrições	Tempo (s)
$SG - B_3$	30	50	21123 (3003 inteiras)	24236	7271
$SL - B_3$	30	50	19586 (3002 inteiras)	19586	873,6

A Tabela 15 mostra o impacto do aumento do custo fixo do CD,  $C_{F_0}^p$ , nos resultados dos custos médios (CM),  $S_0, S_1$  e  $R_0$ . Para cada valor do custo fixo, o resultado de  $R_0\%$  se refere ao percentual de simulações em que o resultado para  $R_0$  se verificou.

Tabela 15 - CM,  $S_0, S_1$  e  $R_0$  para cada valor  $C_{F_0}^p$  no CD

$C_{F_0}^p$	CM	$S_0$	$S_1$	$R_0$	$R_0\%$
0	38,7	130	81,0	1	100%
10	48	138	81,4	2	90%
20	49,4	143	81,0	3	80%

Ao analisarmos os resultados das Tabelas 14 e 15, verificamos na Tabela 14 que  $SG - B_3$  realiza um esforço computacional muito maior que  $SL - B_3$ , cerca de 8 vezes maior. Na Tabela 15 verifica-se que, para valores de  $C_{F_0}^p$  iguais a 0, 10 e 20, as periodicidades  $R_0$  correspondentes são 1, 2 e 3, em, respectivamente, 100%, 90% e 80% dos casos simulados.

## 5.4. Sistemas de duas camadas arborescentes

Com o intuito de exemplificar a metodologia proposta nas Seções 4.2 e 4.3, inicialmente, na Seção 5.4.1 será apresentado um experimento numérico cujo objetivo é minimizar os custos relevantes com inclusão do custo de falta ( $B_3$ ) usando o modelo  $AF - B_3$ . Em seguida, várias instâncias são geradas para comparar as duas políticas de rateio, tanto para o modelo que visa minimizar os custos relevantes com inclusão do custo de falta ( $B_3$ ), como para o modelo cujo objetivo é a minimização dos custos relevantes com a inclusão de restrição de nível de serviço ( $P_2$ ). Para isso, na Seção 5.4.2 serão comparados os modelos  $AF - P_2$  e  $AV - P_2$  e na Seção 5.4.3 serão comparados os modelos  $AF - B_3$  e  $AV - B_3$ .

### 5.4.1. Experimento numérico considerando o modelo $AF - B_3$

Neste experimento, considerou-se o modelo que minimiza custos relevantes com regra de rateio fixo  $AF - B_3$ , incluindo o custo de falta. O total de períodos considerados foi de 20 ( $N_p = 20$ ). Foram geradas instâncias com 1 CD e 3 varejistas, com parâmetros:  $N_{R_i} = 1$ ,  $r_i = 1 \forall i$ ,  $N_{R_0} = 3$ ,  $r_0 \in \{1,2,3\}$ ,  $C_{F_0}^p = 200 \forall p$ ,  $h_0^p = 1 \forall p$ ,  $h_i^p = 4 \forall i, p$ ,  $b_i^p = 10 \forall i, p$ ,  $L_0 = 1$  e  $L_i = 1 \forall i$ .

Neste experimento, o valor de  $N$  foi obtido de acordo com (2.35). Para tal, foi considerado um intervalo de confiança de 5% do custo total, ou seja, foram fixados  $\alpha = 0,05$  e  $\beta = 0,1$ . Para aproximação do valor verdadeiro da função objetivo foi considerado  $N = 50\sigma_{50}$ , obtendo  $\hat{g}_N = 298,89$  e  $\hat{\sigma}_N = 17,52$ , levando a  $N > 5,28$ .

Para geração dos  $N$  cenários utilizou-se a hipótese que a demanda é representada por um processo estocástico estacionário de segunda ordem conforme (2.28). A demanda pelo item de cada varejista segue uma distribuição normal com média, respectivamente, 27, 81 e 54 e variâncias, respectivamente, 23, 39 e 31. As demandas periódicas apresentam a mesma média e o mesmo

desvio-padrão ao longo do horizonte de tempo, supondo que não existe correlação entre as demandas.

Para obtenção do limite inferior foram feitas 10 repetições ( $M = 10$ ) considerando 10 cenários cada ( $N = 10$ ) e 20 períodos ( $N_p = 20$ ), o que foi suficiente para que 100% das simulações feitas tivessem o mesmo resultado:  $r_0 = 2$ . Para obtenção do limite superior foi escolhida como solução candidata os valores médios de  $S_0, S_i, f_i$  e  $r_0$  e feitas 100 repetições ( $M = 100$ ), considerando 50 cenários cada ( $N = 50$ ) e 50 períodos ( $N_p = 50$ ). Foram considerados iguais a zero os custos de manter estoque e de falta nos 3 primeiros períodos, de forma que fosse possível a formação de estoques iniciais. A Tabela 16 descreve resumidamente o experimento com  $AF - B_3$ , apresentando o tamanho da instância do equivalente determinístico que foi resolvida, assim como o esforço computacional necessário para resolver a instância em termos de uso de CPU.

Tabela 16 - Dados do modelo equivalente determinístico  $AF - B_3$

Modelo	$N$	$N_p$	Total de variáveis	Total de restrições	Tempo (s)
$AF - B_3$	10	20	8430 (815 inteiros)	13618	7747,72

A Tabela 17 mostra os resultados estimados para os melhores valores de  $r_0, S_0, S_i, f_i, LI, LS$ , com precisão de 0,1 ( $y = 1$ ) para a expansão binária, onde a coluna *eli* mostra o erro percentual da estimativa do LI ( $(\sigma_{LB}/LI) * 100$ ), assim como a coluna *els* mostra o erro percentual da estimativa do LS ( $(\sigma_{LB}/LS) * 100$ ).

Tabela 17 - Resultados com o modelo  $AF - B_3$

$AF - B_3$ e precisão de 0.1 ( $y=1$ )														
$r_0$	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$LI$	$\sigma_{LI}$	$LS$	$\sigma_{LS}$	<i>gap</i>	<i>eli</i>	<i>els</i>
2	661,7	59,7	168,6	114,0	0,26	0,38	0,36	299,4	5,6	301,7	1,6	2,3	1,9%	0,5%

Os resultados sugerem que tal configuração do experimento, considerando 10 repetições ( $M = 10$ ) para o limite inferior, é razoável uma vez que o erro percentual obtido foi de 1,9%; enquanto que para o limite superior o erro percentual foi 0,5%, resultando num erro percentual de 0,7% para o gap.

#### 5.4.2.

#### Comparativo dos resultados dos modelos $AF - P_2$ e $AV - P_2$

Com o intuito de avaliar as diferentes políticas de rateio propostas na Seção 4.3 com abordagem do conceito *fill rate*, foram analisados os valores de  $S_0, S_i, f_i, LI, LS$ , bem como o valor esperado da fração da demanda não atendida (fração em falta) obtidas pelos modelos  $AF - P_2$  e  $AV - P_2$ . Para isso, foram geradas 4 instâncias, representadas por I1, I2, I3 e I4, em que a instância I4 difere das demais quanto à natureza do processo estocástico dos níveis das demandas.

Considerando uma CS com 1 CD e 3 varejistas, têm-se os seguintes valores para os parâmetros: custos de manter em estoque uma unidade do item no período  $p$  respectivamente iguais a  $h_0^p = 1$  e  $h_i^p = 4 \forall i$ , para I1, I3 e I4, e  $h_0^p = 3,5$  para o caso I2, valor esperado da fração da demanda atendida prontamente nos três varejistas:  $\bar{f}_i = 85\%, 90\%, 95\%$  e  $99\% \forall i$  para I1 e I2, e para I3 e I4 foi considerado  $\bar{f}_1 = 85\%, \bar{f}_2 = 90\%$  e  $\bar{f}_3 = 95\%$ . O tempo entre reposições no CD e nos varejistas é respectivamente  $R_0 = 3$  e  $R_i = 1 \forall i$ , e os tempos de espera são  $L_0 = L_i = 1 \forall i$ . Nos três primeiros períodos, os custos de manter estoque e de falta foram considerados iguais a zero, possibilitando a formação de estoques iniciais.

Para todas as instâncias  $N$  foi definido de acordo com (2.35), obtendo  $\hat{g}_N$  com 50 cenários. Para geração dos  $N$  cenários, utilizou-se duas hipóteses: nos casos I1, I2 e I3 a demanda é representada por um processo estocástico estacionário de segunda ordem conforme (2.28) e no caso I4 a demanda é representada por um processo não estacionário dado por um passeio aleatório conforme (2.29).

Nos casos I1, I2 e I3, a demanda pelo item de cada varejista segue uma distribuição normal com média, respectivamente, 27, 81 e 54, e variâncias, respectivamente, 23, 39 e 31, em cada período. No caso I4, a demanda inicial de cada varejista é 81, 54 e 67, e o erro correspondente a cada período segue uma distribuição normal com média zero e variâncias iguais a 1 para todos os varejistas.

Para obtenção dos limites inferiores da aproximação da função objetivo, foram feitas 10 repetições ( $M = 10$ ), considerando 10 cenários cada ( $N = 10$ ) e

30 períodos ( $N_p = 30$ ). Para obtenção do limite superior, uma solução candidata foi gerada com a média dos valores de  $S_0, S_i$  e  $f_i$  das 10 soluções obtidas. Com esta solução candidata, foram feitas 100 repetições ( $M = 100$ ), considerando 30 cenários cada ( $N = 30$ ) e 30 períodos ( $N_p = 30$ ) para obtenção do limite superior.

A Tabela 18 descreve resumidamente os tamanhos das instâncias dos equivalentes determinísticos que foram resolvidas, assim como os esforços computacionais necessários em termos de uso de CPU para resolver as instâncias com os modelos  $AF - P_2$  e  $AV - P_2$ .

Tabela 18 - Dados do modelo equivalente determinístico  $AF - P_2$  e  $AV - P_2$

Modelo	$N$	$N_p$	Total de variáveis	Total de restrições	Tempo (s)
$AF - P_2$	10	30	11724 (1209 inteiras)	17721	248,45
$AV - P_2$	10	30	18605 (3900 inteiras)	28788	312,97

As Tabelas 19, 20, 21 e 22 mostram os resultados comparativos dos modelos  $AF - P_2$  e  $AV - P_2$  em relação a  $S_0, S_i, f_i, LI, LS$ , com precisão de 0,1 ( $y = 1$ ) para a expansão binária, bem como o valor esperado da fração da demanda não atendida (fração em falta) para as instâncias I1, I2, I3 e I4. A primeira coluna ( $1 - \bar{f}_i$ ) indica o limite máximo para o valor esperado da fração da demanda não atendida. As 3 últimas colunas  $1 - \bar{f}_1, 1 - \bar{f}_2$  e  $1 - \bar{f}_3$ , mostram os níveis de serviço alcançados para cada instância do experimento, considerando uma solução candidata com valores médios de  $S_0$  e  $S_i$ . E a fração média da demanda não atendida é dado por  $f_i^m = \sum_{p,\xi} f(\xi)_i^p / (N_p * N)$  para  $AV - P_2$ , e  $S_0, S_i$  e  $f_i$  para  $AF - P_2$ , após 100 repetições ( $M = 100$ ), com 30 cenários cada ( $N = 30$ ) e 30 períodos ( $N_p = 30$ ).

Tabela 19 - Resultados comparativos para instância I1

AF - $P_2$ e precisão de 0,1																	
$1-\bar{f}_i$	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	LI	$\sigma_{LI}$	LS	$\sigma_{LS}$	gap	eli	els	$1-\bar{f}_1$	$1-\bar{f}_2$	$1-\bar{f}_3$
15%	754	56	162	108	0,17	0,51	0,32	153	2,2	151	1,7	(1,4)	1,4%	1,1%	15,6%	15,3%	15,5%
10%	778	57	163	109	0,17	0,52	0,31	174	1,5	173	2,3	(1,5)	0,8%	1,3%	10,0%	10,1%	10,3%
5%	805	59	166	112	0,18	0,49	0,33	208	3,0	208	3,0	0,1	1,4%	1,4%	5,2%	5,0%	4,9%
1%	839	64	173	119	0,24	0,43	0,33	283	8,6	283	4,3	(0,5)	3,0%	1,5%	1,2%	1,1%	1,0%

AV - $P_2$ e precisão de 0,1																	
$1-\bar{f}_i$	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$f_1^m$	$f_2^m$	$f_3^m$	LI	$\sigma_{LI}$	LS	$\sigma_{LS}$	gap	eli	els	$1-\bar{f}_1$	$1-\bar{f}_2$	$1-\bar{f}_3$
15%	754	55	162	108	0,14	0,53	0,33	152	1,9	151	1,6	(1,09)	1,3%	1,1%	15,8%	15,3%	15,4%
10%	778	56	163	109	0,14	0,53	0,33	174	2,9	172	2,1	(2,38)	1,6%	1,2%	10,9%	10,2%	10,2%
5%	806	58	167	112	0,14	0,53	0,33	209	3,0	210	2,7	0,70	1,4%	1,3%	5,3%	4,6%	4,8%
1%	840	64	173	118	0,15	0,53	0,33	286	7,6	285	2,9	(1,0)	2,7%	1,0%	1,0%	1,1%	1,1%

Tabela 20 - Resultados comparativos para instância I2

AF - $P_2$ e precisão de 0,1																	
$1-\bar{f}_i$	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	LI	$\sigma_{LI}$	LS	$\sigma_{LS}$	gap	eli	els	$1-\bar{f}_1$	$1-\bar{f}_2$	$1-\bar{f}_3$
15%	738	65	181	120	0,2	0,49	0,31	415	3,0	414	3,8	(1,3)	0,7%	0,9%	15,2%	15,1%	15,1%
10%	762	65	181	120	0,2	0,49	0,31	474	2,3	472	3,9	(2,1)	0,5%	0,8%	10,1%	10,3%	10,3%
5%	793	65	179	124	0,2	0,45	0,35	549	4,8	550	3,5	1,7	0,9%	0,6%	4,9%	4,8%	4,9%
1%	829	71	181	126	0,26	0,4	0,34	666	10,8	660	6,4	(5,2)	1,6%	1,0%	1,1%	1,1%	1,1%

AV - $P_2$ e precisão de 0,1																	
$1-\bar{f}_i$	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$f_1^m$	$f_2^m$	$f_3^m$	LI	$\sigma_{LI}$	LS	$\sigma_{LS}$	gap	eli	(b)	$1-\bar{f}_1$	$1-\bar{f}_2$	$1-\bar{f}_3$
15%	739	60	183	120	0,14	0,53	0,33	418	3,1	417	3,8	(0,91)	0,7%	0,9%	15,1%	15,2%	15,1%
10%	763	61	182	120	0,14	0,53	0,33	477	2,5	475	3,8	(2,44)	0,5%	0,8%	9,8%	10,3%	10,3%
5%	794	62	184	122	0,14	0,53	0,33	552	4,9	553	4,4	1,17	0,9%	0,8%	5,0%	4,8%	4,9%
1%	830	67	186	125	0,14	0,53	0,33	671	11,7	666	5,7	(5,8)	1,7%	0,9%	1,0%	1,1%	1,1%

Tabela 21 - Resultados numéricos comparativos para instância I3

AF - $P_2$ e precisão de 0,1																
$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	LI	$\sigma_{LI}$	LS	$\sigma_{LS}$	gap	eli	els	$1-\bar{f}_1$	$1-\bar{f}_2$	$1-\bar{f}_3$
785,7	55,2	164,3	112,0	0,22	0,58	0,19	179,9	2,8	183,2	2,2	3,3	1,6%	1,2%	13,7%	9,1%	4,7%

AV - $P_2$ e precisão de 0,1																
$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$f_1^m$	$f_2^m$	$f_3^m$	LI	$\sigma_{LI}$	LS	$\sigma_{LS}$	gap	eli	els	$1-\bar{f}_1$	$1-\bar{f}_2$	$1-\bar{f}_3$
784,9	53,3	161,2	114,6	0,14	0,53	0,33	180,7	2,8	181,8	2,2	1,2	1,5%	1,2%	15,2%	10,4%	4,8%

Tabela 22 - Resultados numéricos comparativos para instância I4

AF - $P_2$ e precisão de 0,1																
$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	LI	$\sigma_{LI}$	LS	$\sigma_{LS}$	gap	eli	els	$1-\bar{f}_1$	$1-\bar{f}_2$	$1-\bar{f}_3$
967,2	161,7	108,7	135,1	0,65	0,24	0,11	196,3	5,3	198,5	5,2	2,3	2,7%	2,6%	14,9%	9,4%	4,6%

AV - $P_2$ e precisão de 0,1																
$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$f_1^m$	$f_2^m$	$f_3^m$	LI	$\sigma_{LI}$	LS	$\sigma_{LS}$	gap	eli	els	$1-\bar{f}_1$	$1-\bar{f}_2$	$1-\bar{f}_3$
969,7	154,8	109,0	138,1	0,40	0,29	0,31	202,5	4,0	202,8	5,0	0,3	2,0%	2,5%	16,2%	9,84%	5,6%

Analisando os experimentos numéricos com as instâncias I1, I2, I3, I4, observa-se que o nível de serviço obtido, com a minimização dos custos de manter o estoque, são similares para ambas as regras de rateio, quando comparadas com os níveis de serviços desejados pelos varejistas. Além disso, observa-se que os erros percentuais associados aos resultados obtidos são pequenos para todos os casos, mesmo considerando um pequeno número de períodos e cenários. Ainda, observa-se que os valores obtidos para as frações de rateio fixos  $f_i$  mudam de acordo com os níveis de serviço desejados. Diferentemente, os valores obtidos para as frações médias das demandas não atendidas  $f_i^m$  não mudam na maioria dos casos. Isto se deve ao fato de que  $f_i$  é uma variável de decisão de primeiro estágio cujo valor é determinado pelo processo de otimização, enquanto que  $f_i^m$  é imposto pelas frações de rateio variável no segundo estágio. Das Tabelas 19 e 20 pode-se verificar que os valores de  $S_0$  diminuíram e os valores  $S_i$  aumentaram à medida que se aumentou  $h_0^p$  tanto para  $AF - P_2$  quanto para  $AV - P_2$ . A Tabela 21 mostra que os resultados para o modelo  $AV - P_2$  estão associados a um gap menor. A partir da Tabela 22 verifica-se que as regras de rateio são semelhantes, mesmo considerando a demanda sendo representada por um processo estocástico não-estacionário. Esses resultados sugerem que, no geral, tal configuração do experimento, tomando 10 repetições para estimar o limite inferior, é razoável, uma vez que tanto o gap como o desvio-padrão são bastante reduzidos. Verifica-se que os erros  $eli$  e  $els$  são próximos de 1% nos casos I1 (exceto, quando  $1-\bar{f}_1 = 1\%$ ), I2 e I3 e entre 2% e 3% nos demais casos.

#### 5.4.3. Comparativo dos modelos $AF - B_3$ e $AV - B_3$

Com o intuito de avaliar as diferentes políticas de rateio considerando custo de falta, propostas na Seção 4.2, foram analisados os valores de  $S_0, S_i, f_i, LI, LS$  obtidos pelos modelos  $AF - B_3$  e  $AV - B_3$ . Para isso, foram geradas 4 instâncias, representadas por I5, I6, I7 e I8, respectivamente iguais a I1, I2, I3 e I4, desconsiderando o valor esperado da fração da demanda não atendida (fração em falta) e incluindo o custo de falta nos três varejistas, conforme os seguintes valores:  $b_i^p = 5, 10, 15$  e  $20 \forall i$  para I5 e I6, e  $b_1^p = 5, b_2^p = 10$  e  $b_3^p = 15$  para I7 e

18. Os dados de custo, sobre natureza do processo estocástico dos níveis das demandas, dos tamanhos das instâncias dos equivalentes determinísticos e demais considerações permanecem as mesmas, o que levam aos mesmos resultados para esforço computacional.

As Tabelas 23, 24 25 e 26 mostram os resultados comparativos dos modelos  $AF - B_3$  e  $AV - B_3$  em relação a  $S_0, S_i, f_i, LI, LS$ , com precisão de 0,1 ( $y = 1$ ) para a expansão binária, para as instâncias I5, I6, I7 e I8. A primeira coluna indica os valores do custo de falta ( $b_i^p$ ) para cada instância.

Tabela 23 - Resultados comparativos para instância I5

$AF - B_3$ e precisão de 0,1														
$b_i^p$	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	LI	$\sigma_{LI}$	LS	$\sigma_{LS}$	gap	eli	Els
5	796,6	56,7	165,8	111,2	0,29	0,36	0,35	244,6	3,1	245,5	2,1	0,9	1,3%	0,9%
10	816,9	58,6	169,1	113,9	0,29	0,41	0,3	279,0	4,5	279,8	3,1	0,8	1,6%	1,1%
15	828,4	60,4	171,6	116,2	0,26	0,38	0,36	299,5	6,1	299,6	2,9	0,0	2,0%	1,0%
20	832,3	62,0	172,1	117,0	0,3	0,37	0,33	312,0	7,8	313,8	3,8	1,8	2,5%	1,2%
$AV - B_3$ e precisão de 0,1														
$b_i^p$	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$f_1^m$	$f_2^m$	$f_3^m$	LI	$\sigma_{LI}$	LS	$\sigma_{LS}$	gap	eli	Els
5	797,7	55,7	166,3	110,9	0,14	0,53	0,33	245,8	3,1	246,6	2,2	0,9	1,2%	0,9%
10	818,0	57,9	169,4	113,8	0,14	0,53	0,33	280,3	4,4	281,1	3,1	0,8	1,6%	1,1%
15	829,6	59,7	172,0	116,0	0,14	0,53	0,33	300,7	6,4	300,9	2,9	0,2	2,1%	0,9%
20	833,4	61,2	172,5	116,9	0,15	0,53	0,33	313,9	7,5	315,3	3,8	1,4	2,4%	1,2%

Tabela 24 - Resultados comparativos para instância I6

$AF - B_3$ e precisão de 0,1														
$b_i^p$	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	LI	$\sigma_{LI}$	LS	$\sigma_{LS}$	Gap	eli	els
5	663,1	65,0	176,6	120,4	0,29	0,38	0,33	494,1	3,3	495,7	1,9	1,6	0,7%	0,4%
10	785,2	66,5	178,4	121,6	0,3	0,38	0,32	625,4	4,0	625,2	2,4	(0,2)	0,6%	0,4%
15	805,1	67,3	179,4	122,7	0,3	0,37	0,33	659,9	5,8	659,3	3,1	(0,5)	0,9%	0,5%
20	811,8	68,4	180,9	123,5	0,29	0,39	0,32	678,5	7,9	681,8	4,5	3,3	1,2%	0,7%
$AV - B_3$ e precisão de 0,1														
$b_i^p$	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	LI	$\sigma_{LI}$	LS	$\sigma_{LS}$	Gap	eli	els
5	664,2	61,9	178,2	119,7	0,14	0,53	0,33	495,2	3,5	496,7	1,9	1,6	0,7%	0,4%
10	786,4	61,0	182,8	121,4	0,14	0,53	0,33	631,4	4,1	631,3	2,6	(0,1)	0,7%	0,4%
15	806,2	62,0	184,5	122,2	0,14	0,53	0,33	666,1	5,6	665,7	3,3	(0,3)	0,8%	0,5%
20	813,2	63,4	184,5	122,8	0,14	0,53	0,33	684,6	7,9	688,2	4,6	3,6	1,2%	0,7%

Tabela 25 - Resultados comparativos para instância I7

AF - B <sub>3</sub> e precisão de 0,1														
S <sub>0</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	f <sub>1</sub>	f <sub>2</sub>	f <sub>3</sub>	LI	σ <sub>LI</sub>	LS	σ <sub>LS</sub>	gap	Eli	els	
814,2	57,0	168,2	116,4	0,51	0,27	0,22	271,7	3,7	275,6	2,6	3,9	1,4%	0,9%	
AV - B <sub>3</sub> e precisão de 0,1														
S <sub>0</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	f <sub>1</sub> <sup>m</sup>	f <sub>2</sub> <sup>m</sup>	f <sub>3</sub> <sup>m</sup>	LI	σ <sub>LI</sub>	LS	σ <sub>LS</sub>	gap	Eli	Els	
818,4	55,3	168,7	116,6	0,14	0,53	0,33	275,1	3,9	279,5	2,7	4,4	1,4%	1,0%	

Tabela 26 - Resultados comparativos para instância I8

AF - B <sub>3</sub> e precisão de 0,1														
S <sub>0</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	f <sub>1</sub>	f <sub>2</sub>	f <sub>3</sub>	LI	σ <sub>LI</sub>	LS	σ <sub>LS</sub>	gap	eli	Els	
1013,4	163,3	112,7	140,5	0,81	0,11	0,08	317,9	9,4	321,4	8,2	3,5	3,0%	2,5%	
AV - B <sub>3</sub> e precisão de 0,1														
S <sub>0</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	f <sub>1</sub> <sup>m</sup>	f <sub>2</sub> <sup>m</sup>	f <sub>3</sub> <sup>m</sup>	LI	σ <sub>LI</sub>	LS	σ <sub>LS</sub>	gap	eli	Els	
1018,2	163,9	113,1	140,5	0,40	0,30	0,30	321,9	7,2	327,0	9,8	5,1	2,2%	3,0%	

Analisando os experimentos numéricos para as instâncias I5, I6, I7, I8, observa-se que os erros percentuais associados aos resultados obtidos são pequenos para todos os casos, mesmo considerando um pequeno número de períodos e cenários. Ainda, observa-se que os valores obtidos para as frações de rateio fixo  $f_i$  mudam de acordo com os custos de falta pré-estabelecidos. Diferentemente, os valores obtidos para as frações médias das demandas não atendidas  $f_i^m$  não mudam na maioria dos casos. Mais uma vez, isto se deve ao fato de que  $f_i$  é uma variável de decisão de primeiro estágio cujo valor é determinado pelo processo de otimização, enquanto que  $f_i^m$  é imposto pelas frações de rateio variável. Das Tabelas 23 e 24, pode-se verificar que os valores de  $S_0$  diminuíram e os valores  $S_i$  aumentaram à medida que se aumentou  $h_0^p$  tanto para AF - B<sub>3</sub> quanto para AV - B<sub>3</sub>. A partir da Tabela 26, verifica-se que as regras de rateio são semelhantes, mesmo considerando a demanda sendo representada por um processo estocástico não-estacionário. Os resultados sugerem que, no geral, tal configuração do experimento, tomando 10 repetições para estimar o limite inferior, é razoável, uma vez que tanto o gap como o desvio-padrão são bastante reduzidos. Verifica-se que os erros *eli* e *els* estão próximos de 1% nos casos I1 (exceto, quando  $b_i^p = 15$ , e 20), I2 e I3, e entre 2% e 3% nos demais casos.

## 6 Conclusão

Com base em programação estocástica, esta tese propôs uma nova metodologia mais abrangente do que as existentes na literatura no que se refere à representação da incerteza da demanda no problema de determinação de parâmetros ótimos de um sistema de controle e reposição de estoques de um único item com revisão periódica, considerando custo de encomendar, de manter o estoque e custo de falta, em redes logísticas de uma camada e de duas camadas arborescente ao longo de um horizonte de tempo finito. Tal metodologia permite que sejam relaxadas premissas referentes ao comportamento dos parâmetros incertos, em particular com relação à natureza do processo estocástico dos níveis das demandas do item.

Especificamente, foram propostos modelos de programação linear inteira mista para os equivalentes determinísticos dos modelos de programação estocástica de dois estágios para obtenção da periodicidade e do nível alvo ótimos do sistema de controle  $(R, S)$  de uma rede logística de uma camada e duas camadas arborescente.

Visando alcançar um melhor atendimento aos clientes, acoplou-se à metodologia proposta regras de rateio fixo e variável das quantidades do item em falta no CD para atender simultaneamente as demandas dos diversos varejistas.

Para obtenção de soluções aproximadas dos modelos determinísticos foi utilizada a técnica *Sample Average Approximation* (SAA), que permite gerar finitos cenários para os níveis da demanda pelo item com valores discretos. Na representação da demanda foram considerados tanto o processo estacionário como o não estacionário.

Para o caso de sistemas de uma camada, dois experimentos computacionais foram realizados. No primeiro experimento, uma instância foi gerada considerando a natureza do processo estocástico dos níveis das demandas como estacionária, seguindo uma distribuição de probabilidade normal em cada período. Foram considerados diversos valores para custo de encomendar, custo de manter o

estoque e cenários. Os resultados obtidos pelo método proposto foram validados através da comparação com os resultados do método HW. Os resultados mostraram que os dois métodos obtiveram resultados semelhantes com erros percentuais pequenos, validando o método proposto. Conforme esperado, observou-se que, quanto maior o número de períodos e de cenários, maior é a redução do erro percentual absoluto (EPA). Foi observado também que, o aumento do número de períodos é mais impactante nos resultados que o aumento do número de cenários.

No segundo experimento a demanda foi representada por um processo não estacionário dado por um passeio aleatório. Os resultados obtidos em termos de custos totais pelo método proposto foram comparados com os menores custos totais resultantes da simulação de diferentes valores de níveis alvo e intervalos de revisão, validando o método proposto.

Para o caso de sistemas de duas camadas, experimentos computacionais foram conduzidos com os modelos propostos, considerando diversos valores para custo de falta e nível de serviço. Os resultados sugerem que tal configuração do experimento, tomando 10 repetições para o limite inferior, é razoável, uma vez que tanto o *gap* de otimalidade como o desvio-padrão são bastante reduzidos. Além disso, comparando as metas de níveis de serviço desejadas para os varejistas contra os resultados obtidos com a otimização dos custos de manter em estoque, percebe-se que as duas políticas de rateio, fixo e variável, mesmo considerando um pequeno número de períodos e de cenários, obtiveram resultados semelhantes e uma taxa de erro muito pequena para todas as instâncias.

Este estudo demonstrou que é possível determinar aproximadamente os parâmetros ótimos do sistema  $(R, S)$ . Em vários testes computacionais realizados, a abordagem proposta dá soluções ótimas aproximadas com erros percentuais próximos a 1% para os limites inferiores e superiores. Este fato confirma que a metodologia proposta tem a vantagem de ser potencialmente aplicada a uma vasta gama de situações, uma vez que sua aplicação independe das premissas impostas com relação ao fenômeno estocástico e da quantidade de parâmetros incertos, principalmente se comparada às dificuldades impostas por outras técnicas disponíveis na literatura que se propõem a resolver problemas similares, tais como métodos analíticos e programação dinâmica.

É bom enfatizar que tal metodologia apresenta limitação com relação ao grande esforço computacional exigido, quando o número de cenários cresce. Uma opção seria a utilização de métodos de decomposição para reduzir tal esforço ou mesmo a criação de uma heurística para auxiliar na simulação. Além disso, sugere-se para estudos futuros: a) acoplar tal metodologia a ferramentas de gestão de estoque e controle de processo tais como DRP (*Distribution Resources Planning*); b) consideração de sistemas em outras configurações, como por exemplo, extensão para o caso multicamadas e c) comparar e/ou combinar os resultados com modelos que apresentam diferentes enfoques para o problema, tais como: “*Markov chain*”, “*optimal stochastic*” e “*simulation-based models*”, disponíveis na literatura.

## 7 Referências bibliográficas

Abdul-Jalbar, B.; Gutiérrez, J.; Puerto, J. e Sicilia, J. **Policies for inventory/distribution systems: The effect of centralization vs. Decentralization.** International Journal of Production Economics, 81-82, 281-293, 2003.

Archibald, B.C. **Continuous Review (s,S) Policies with Lost Sales.** Management Science, 27(10), 1171-1177, 1981.

Axsäter, S. **Using the deterministic EOQ formula in stochastic inventory control.** Management Science, 42(6), 830–834, 1996.

Axsäter, S. **Inventory Control.** 2nd. ed. New York: Springer, 2006.

Axsäter, S. e Zhang, W.F.. **A joint replenishment policy for multi-echelon inventory control.** International Journal of Production Economics, 59, 243–250, 1999.

Bellman, R., Glicksberg, I., e Gross, O. **On the optimal inventory equation.** Management Science, 2, 83-104, 1995.

Bijvank, M., Bhulai, S., e Huh, W.T. **Lost-sales Inventory Systems with Fixed Order Costs.** Working Paper, Department of Computer Science and Operations Research, University of Montreal, 2010.

Bijvank, M. e Vis, I.F.A. **Lost-sales inventory theory: A review.** European Journal of Operational Research, 215, 1–13, 2011.

Bijvank, M. e Johansen, S.G. **Periodic review lost-sales inventory models with compound Poisson demand and constant lead times of any length.** European Journal of Operational Research, 220, 106–114, 2012.

Birge, R.J e Louveaux, F. **Introduction to Stochastic Programming.** New York: Springer, 1997.

Bollapragada, S., Akella, R. e Srinivasan, R. **Centralized ordering and allocation policies in a two-echelon system with non-identical warehouses.** European Journal of Operational Research, 106, 74–81, 1999.

Buchanan, D.J. e Love, R.F. **A (Q,R) inventory model with lost sales and earlang-distributed lead times.** Naval Research Logistics Quarterly, 32(4), 605–611, 1985.

Cachon, G.P. **Handbooks in OR & MS**, Vol. 11, 2003.

Cao, D.B. e Silver, E.A. **A dynamic allocation heuristic for centralized safety stock.** Naval Research Logistics, 52, 513–526, 2005.

Chen, F., e Zheng, Y.-S. **Inventory models with general backorder costs.** European Journal of Operational Research, 65(2), 175–186, 1993.

Chen, H. e Li, P. **Optimization of (R, Q) policies for serial inventory systems using the guaranteed service approach.** Computers & Industrial Engineering, 80, 261-273, 2015.

Chu, L.Y e Shen, Z.M. **A Power-of-Two ordering policy for one-warehouse multiretailer systems with stochastic demand.** Operations Research, 58(2), 492–502, 2010.

Clark, A. e Scarf, H. **Optimal policies for a multi-echelon inventory problem.** Management Science, 6(4), 475–490, 1960.

Daskin, M.S., Coullard, C. e Shen Z.-J.M. **An inventory-location model: formulation, solution algorithm and computational results.** Annals of Operations Research, 110(1), 83–106, 2002.

De Kok, A.G. Hierarchical production planning for consumer goods. European Journal of Operational Research, 45, 55–69, 1990.

De Kok, T.G. e Fransoo, J.C. **Planning supply chain operations: Definition and comparison of planning concepts.** In: De Kok, A.G., Graves, S.C. (Eds.), Supply Chain Management: Design, Coordination and Operation. Elsevier, Amsterdam, 597–675, 2003.

De Kok, A.G., Lagodimos, A.G. e Seidel, H.P. **Stock allocation in a two-echelon distribution network under service constraints.** Research Report DBK/LBS/94-

03, Department of Industrial Engineering and Management Science, Eindhoven University of Technology, Netherlands, 1994.

Diks, E.B., de Kok, A.G. e Lagodimos, A.G. **Multi-echelon systems: A service measure perspective.** *European Journal of Operational Research*, 95, 241–263, 1996.

Eaves, A. **Forecasting for the ordering and stock-holding of consumable spare parts.** (PhD thesis)-Lancaster University, Department of Management Science, Lancaster, 2002.

Eppen, G. e Schrage, L. **Centralized ordering policies in a multi-warehouse system with lead times and random demand.** *TIMS Studies in the Management Sciences*, 16, 51-67, 1981.

Fattahi, M., Mahootchi, M., Moattar Hussein, S. M., Keyvanshokoh, E. e Alborzi, F. **Investigating replenishment policies for centralized decentralized supply chains using stochastic programming approach.** *International Journal of Operational Research*, 53(1), 41-69, 2015.

Federgruen, A. e Zipkin, P.H. **Computational issues in an infinite-horizon, Multiechelon Inventory Model.** *Operations Research*, 32(4), 818–836, 1984.

Gaver Jr., D.P. **On base-stock level inventory control.** *Operations Research*, 7, 689–703, 1959.

Giri, B.C. e Dohi, T. **Cost-effective ordering policies for inventory systems with emergency order.** *Computers & Industrial Engineering*, 57(3), 1336–1341, 2009.

Glock, C. H. The joint economic lot size problem: A review. *International Journal of Production Economics*, 135, 671-686, (2012).

Glock, C. H., Grosse, E. H., & Ries J. M. The lot sizing problem: A tertiary study. *International Journal of Production Economics*, 155, 39-51, (2014).

Gupta, A. e Maranas, C.D. **A Two-Stage Modeling and Solution Framework for Multisite Midterm Planning Under Demand Uncertainty.** *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 39, 3799-3813, 2000.

Gurbuz, M.Ç., Moinzadeh, K. e Zhou, Y.-P. **Coordinated Replenishment Strategies in Inventory/Distribution Systems**. *Management Science*, 53(2), 293–307, 2007.

Hadley, G. e Whitin, T.M., **Analysis of Inventory Systems**. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1963.

Heijden, M.C., Diks, E.B. e De Kok, A.G. **Stock allocation in general multi-echelon distribution systems with (R, S) order-up-to-policies**. *International Journal of Production Economics*, 49, 157-174, 1997.

Higle, J.L. **Stochastic Programming: Optimization When Uncertainty Matters**. *Tutorials in Operations Research INFORMS – New Orleans 2005*, 2005.

Inderfurth, K. **Safety stocks in multistage divergent inventory systems: A review**. *International Journal of Production Economics*, 35, 321–329, 1994.

Hill, R.M. e Johansen, S.G. **Optimal and near-optimal policies for lost sales inventory models with at most one replenishment order outstanding**. *European Journal of Operational Research*, 169, 111–132, 2006.

Jha, J.K. e Shanker, K. **Two-echelon supply chain inventory model with controllable lead time and service level constraint**. *Computers & Industrial Engineering*, 57(3), 1096–1104, 2009.

Johansen, S.G. **Pure and modified base-stock policies for the lost sales inventory system with negligible set-up costs and constant lead times**. *International Journal of Production Economics*, 71, 391–399, 2001.

Johansen, S.G. e Thorstenson, A. **Optimal (s,Q) Inventory Policy with Poisson Demand and Lost Sales: Discount and Undiscounted Cases**. *International Journal of Production Economics*, 46-47(1), 359-371, 1996.

Johansen, S.G. e Thorstenson, A. **Pure and Restricted Base-stock Policies for the Lost-sales Inventory System with Periodic Review and Constant Lead Times**. *Technical Report*, Aarhus University, 2008.

Jonsson, H. e Silver, E.A. **Analysis of a two-echelon inventory control system with complete redistribution**. *Management Science*, 33, 215–227, 1987.

Karlin, S. e Scarf, H. **Inventory models of the Arrow–Harris–Marschak type with time lag.** In: Arrow, K., Karlin, S., Scarf, H. (Eds.), *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*. Stanford University, Stanford, Ca (Chapter 10), 1958.

Kleywegt, A., Shapiro, A. e Homem-de-Melo T. **The sample average approximation method for stochastic discrete optimization.** *SIAM Journal on Optimization*, 12(2), 479–502, 2002.

Lagodimos, A.G. **Multi-echelon service models for inventory systems under different rationing policies.** *International Journal of Production Research*, 30, 939–958, 1992.

Lagodimos, A.G. e Koukoumialos, S. **Service performance of two-echelon supply chains under linear rationing.** *International Journal of Production Economics*, 112, 869–884, 2008.

Lambert, D.M. **Supply Chain Management.** *Supply Chain Management Review*, 8(6), 18-26, 2004.

Levi, R., Janakiraman, G. e Nagarajan, M. **A 2-approximation algorithm for stochastic inventory control models with lost sales.** *Mathematics of Operations Research*, 33, 351–374, 2008.

Linderoth, J., Shapiro, A. e Wright, S. **The empirical behavior of sampling methods for stochastic programming.** *Annals of Operations Research*, 142(1), 215–241, 2006.

McGavin, E.J., Schwarz, L.B. e Ward, J.E. **Two-interval inventory-allocation policies in a one-warehouse N-identical retailer distribution system.** *Management Science*, 39, 1092–1107, 1993.

Minner S. **Strategic safety stocks in reverse logistics supply chains.** *International Journal of Production Economics*, 71(1-3), 417–428, 2001.

Morse, P.M. **Solutions of a class of discrete-time inventory problems.** *Operations Research*, 7, 67–78, 1959.

Morton, T.E. **Bounds on the solution of the lagged optimal inventory equation with no demand backlogging and proportional costs.** *SIAM Review*, 11, 572–596, 1969.

- Morton, T.E. **The near myopic nature of the lagged proportional cost inventory problem with lost sales.** *Operations Research*, 19, 1708–1716, 1971.
- Mula, J., Poler, R., Garcia-Sabater, J.P. e Lario, F.C. **Models for production planning under uncertainty: A review.** *International Journal of Production Economics*, 103, 271–285, 2006.
- Nahmias, S. **Simple approximations for a variety of dynamic lead time lost sales inventory models.** *Operations Research*, 27, 904–924, 1979.
- Nahmias, S. **Production and Operations Management.** 3. ed. Irwin, Chicago, IL, 1997.
- Namit, K. e Chen, J. **Solutions to the inventory model for gamma lead-time demand.** *International Journal of Physical Distribution & Logistics Management*, 29(2), 138-154, 1999.
- Oliveira, F., Gupta, V., Hamacher, S. e Grossmann, I.E. **A Lagrangean decomposition approach for oil supply chain investment planning under uncertainty with risk considerations.** *Computers & Chemical Engineering*, 50(3), 184-195, 2013.
- Oliveira, F. e Hamacher, S. **Optimization of the petroleum product supply chain under uncertainty: A case study in northern Brazil.** *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 51(11), 4279–4287, 2012.
- Pressman, I. **An order-level-scheduling-period system with lost sales.** *Management Science*, 17, 1328–1335, 1977.
- Rego, J.R. e Mesquita, M.A. **Controle de estoque de peças de reposição em local único: uma revisão da literatura.** *Produção*, 21(4), 645-666, 2011.
- Santoso, T., Ahmed, S., Goetschalckx, M. e Shapiro, A. **A stochastic programming approach for supply chain network design under uncertainty.** *European Journal of Operational Research*, 167(1), 96-115, 2005.
- Shapiro, A. e Homem-de-Mello, T. **A simulation-based approach to two-stage stochastic programming with recourse.** *Mathematical Programming*, 81(3), 301-325, 1998.

Shen Z.-J.M., Coullard, C. e Daskin, M.S. **A joint location-inventory model.** *Transportation Science*, 37(1), 40-55, 2003.

Silva, G.L.C. **Modelo de estoque para peças de reposição sujeitas à demanda intermitente e lead-time estocástico.** Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção)-Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, 2009.

Silver, E.A. e Peterson, R. **Decision Systems for Inventory Management and Production Planning.** 2. ed. New York, NY: John Wiley & Sons, 1985.

Silver, E.A., Peterson, R. e Pyke, D.F. **Inventory Management and Production Planning and Scheduling.** 3. ed. New York, NY: John Wiley & Sons, 1998.

Simchi-levi, D.; Kaminsky, P. and Simichi-Levi, E. **Designing and Managing the Supply Chain: Definitive Guide for the Business Professional.** New York: McGraw-Hill companies, 2004.

Sobel, M.J. **Fill Rates of Single-Stage and Multistage Supply Systems.** *Manufacturing & Service Operations Managements*, 6(1), 41-52, 2004.

Van der Heijden, M.C. **Supply rationing in multi-echelon divergent systems.** *European Journal of Operational Research*, 101, 532-549, 1997.

Van Donselaar, K. e Wijngaard, J. **Practical application of the echelon approach in a system with divergent product structure.** *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 266, 182–196, 1986.

Van Houtum, G.J., Inderfurth, K. e Zijm, W.H.M. **Materials coordination in stochastic multi-echelon systems.** *European Journal of Operational Research*, 95, 1–23, 1996.

Wagner, H. M. e Whitin, T. M. **Dynamic Version of the Economic Lot size Model,** 5, 89-96, 1958.

Wanke, P. **Gestão de estoques na cadeia de suprimentos: decisões e modelos quantitativos.** Em Coleção COPPEAD de Administração, 3. ed. São Paulo: Atlas, 2011.

Williams, B.D. e Tokar, T. **A review of inventory management research in major logistics journals – Themes and future directions.** *The International Journal of Logistics Management*, 19, 212–232, 2008.

You, F. e Grossmann, I.E. **Mixed-integer nonlinear programming models and algorithms for large-scale supply chain design with stochastic inventory management.** Industrial & Engineering Chemistry Research, 47(20), 7802-7817, 2008.

You, F. e Grossmann, I.E., **Integrated Multi-Echelon Supply Chain Design with Inventories under Uncertainty: MINLP Models, Computational Strategies.** AIChE Journal, 56(2), 419-440, 2010.

Zipkin, P.H. **Foundations of Inventory Management.** Boston, MA: McGraw-Hill, 2000.

Zipkin, P.H. **Old and new methods for lost-sales inventory systems.** Operations Research, 56, 1256–1263, 2008a.

Zipkin, P.H. **On the structure of lost-sales inventory models.** Operations Research, 56, 937–944, 2008b.