



Sergio Ferreira Bastos

**Monitoramento da Dispersão de Processos Multivariados
por Projeções do Vetor de Variáveis Observadas**

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Eugenio Kahn Epprecht

Rio de Janeiro
junho de 2015



Sergio Ferreira Bastos

**Monitoramento da Dispersão de Processos Multivariados
por Projeções do Vetor de Variáveis Observadas**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Eugenio Kahn Epprecht

Orientador

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

Prof. Flávio Sanson Fogliatto

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Prof. Michel Jose Anzanello

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Prof. Helio Côrtes Vieira Lopes

Departamento de Informática - PUC-Rio

Prof. Bruno Francisco Teixeira Simões

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 22 de junho de 2015

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Sergio Ferreira Bastos

Graduado em Física pela SESNI e Mestre em Engenharia Mecânica pela COPPE/UFRJ. Professor e Consultor Técnico do SENAI CETIQT e Analista de Dados da Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Bastos, Sergio Ferreira

Monitoramento da dispersão de processos multivariados por projeções do vetor de variáveis observadas / Sergio Ferreira Bastos; orientador: Eugenio Kahn Epprecht. – 2015.

115 f.: il. (color.); 30 cm

Tese (doutorado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Industrial, 2015.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Industrial – Teses. 2. Processos multivariados. 3. Controle estatístico de processos. 4. Monitoramento de dispersão. 5. Projeções. I. Epprecht, Eugenio Kahn. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Industrial. III. Título

CDD: 658.5

Às Minhas Filhas e à minha esposa.

Agradecimentos

À minha mãe, que com poucos recursos conseguiu encaminhar a mim e a meu irmão no caminho do bem.

À minha esposa, que procurou entender o meu esforço nesta empreitada.

Ao meu orientador e amigo, pela receptividade, paciência, dedicação e por ter me conduzido nos momentos mais difíceis desta jornada.

À CAPES e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Ao SENAI CETIQT, pelo apoio em geral.

Resumo

Bastos, Sergio Ferreira; Epprecht, Eugenio Kahn (orientador). **Monitoramento da Dispersão de Processos Multivariados por Projeções do Vetor de Variáveis Observadas**. Rio de Janeiro, 2015. 115p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Em processos multivariados, existem diversas variáveis observáveis para serem controladas. Pressupõe-se neste trabalho que os descontroles do processo se devem a causas especiais que atuam em fontes de variação independentes, cada uma destas podendo ser representada por uma variável aleatória não observável, ou “latente”. Alguma alteração na média de uma dessas variáveis ou um aumento na sua dispersão resultam, respectivamente, em deslocamento da média do vetor x de variáveis observáveis ao longo de uma direção “atribuível” específica, ou aumento da variabilidade do vetor x nessa direção. Propõe-se então controlar a dispersão de tais processos multivariados por gráficos de controle do desvio-padrão dos valores das projeções do vetor de variáveis observadas em direções específicas, associadas a variações nas variáveis latentes não observáveis do processo. Essas direções são denominadas de “direções atribuíveis”. Foram desenvolvidos, também, gráficos para média da norma quadrática de um vetor resíduo, a fim de permitir a sinalização da ocorrência de novas fontes de variação ainda desconhecidas ao processo, que levem a um aumento da variabilidade do vetor x em direções não contidas no subespaço das direções atribuíveis. O esquema proposto mostrou-se eficaz para o controle estatístico de causas especiais, atuando sobre as fontes de variação do processo, com a vantagem adicional de identificar automaticamente a variável latente afetada.

Palavras-chave

Processos multivariados; Controle estatístico de processos; Projeções; Direções atribuíveis; Monitoramento; Dispersão; Variáveis latentes.

Abstract

Bastos, Sergio Ferreira; Epprecht, Eugenio Kahn (Advisor). **Monitoring the Spread of Multivariate Processes Using Projections of the Observable Variables Vector**. Rio de Janeiro, 2015. 115p. PhD Thesis – Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In multivariate processes, there are several observable variables to be controlled. It is assumed in this work that loss of control is due to special causes acting in independent sources of variation, each of these being represented by an unobservable random variable, or "latent". A change in average of these variables or an increase in dispersion results, respectively, in a displacement of the average of the vector x of the observable variables along a specific assignable direction or in an increase of vector x variability in that direction. It is proposed to control the dispersion of such multivariate processes by means of control charts of the vector projections values of observed variables in specific directions, associated with process changes in latent variables, not observable. We call these directions "assignable directions". Graphs of average squared norm of a residual vector were developed to enable the signaling of the occurrence of new sources of variation, yet unknown to the process, that lead to increased vector x variability in directions not contained in the assignable directions subspace. The proposed scheme was shown to be an effective tool for statistical control of special causes acting on the process variation sources, with the added benefit of automatically identification of the affected latent variable.

Keywords

Multivariate processes; Statistical process control; projections; Assignable directions; Monitoring dispersion.

Sumário

1.	Introdução	19
1.1.	Contextualização do problema	19
1.2.	Trabalhos precedentes relacionados	25
1.3.	Estrutura da Tese	31
2.	O esquema proposto	33
2.1.	Considerações iniciais	33
2.2.	Projeções \hat{d}	35
2.3.	Vetor resíduo	37
3.	Outros métodos para controle da variância	42
3.1.	Variância amostral generalizada	42
3.2.	Máxima variância amostral	45
3.3.	Somatório de variâncias	46

4.	Aplicação das Projeções \hat{d} em um processo simulado	48
4.1.	Apresentação do estudo de caso	49
4.2.	Monitoramento da dispersão no esquema proposto	53
4.3.	Controle da dispersão no esquema proposto	56
5.	Desempenho do esquema proposto	61
5.1.	Considerações iniciais	61
5.2.	Resultados obtidos	63
5.2.1.	Uma única direção atribuível e quatro variáveis observáveis	65
5.2.2.	Duas direções atribuíveis e quatro variáveis observáveis	68
5.2.3.	Duas direções atribuíveis e oito variáveis observáveis	76
5.2.4.	Duas direções atribuíveis e quatro variáveis observáveis e desvio padrão do erro aumentado	80
5.2.5.	Duas direções atribuíveis, quatro variáveis observáveis e uma direção atribuível adicional	84
6.	Considerações Finais	91
6.1.	Conclusões	91
6.2.	Sugestões para Pesquisa Futura	95

7.	Referências Bibliográficas	96
	Apêndice	104

Lista de Figuras

Figura 1 – Ajustes da porta lateral do AUDI	22
Figura 2 – Minivan (a), porta traseira (b) e disposição dos sensores de medida (c).	30
Figura 3 – Padrões de variação: dilatação horizontal (a), translação lateral direita (b), torção horizontal (c), dilatação vertical (d) e torção vertical (e).	31
Figura 4 – Composição do vetor resíduo	40
Figura 5a – Ajuste do vidro traseiro	49
Figura 5b – Folgas de ajuste do vidro traseiro	50
Figura 6 – Posições de medida das folgas	50
Figura 7 – Rotação positiva e negativa	51
Figura 8 – Deslocamento lateral positivo e negativo	51
Figura 9 – Contração/dilatação	51
Figura 10 – Gráfico de Probabilidade Normal	60
Figura 11a – Gráfico de Probabilidade de sinal ($\alpha=0,005; \sigma_T=1,5; \sigma_D=1,0$)	72
Figura 11b – Gráfico de Probabilidade de sinal ($\alpha=0,005; \sigma_T=2,0; \sigma_D=1,0$)	73

Figura 11c – Gráfico de Probabilidade de sinal ($\alpha=0,005; \sigma_T=1,5; \sigma_D=1,5$) 73

Figura 11d – Gráfico de Probabilidade de sinal ($\alpha=0,005; \sigma_T=2,0; \sigma_D=1,5$) 74

Figura 11e – Gráfico de Probabilidade de sinal ($\alpha=0,005; \sigma_T=2,0; \sigma_D=2,0$) 74

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - m=5 e $\alpha=0,0027$	65
Tabela 2 – Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - m=5 e $\alpha=0,0050$	66
Tabela 3 – Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - m=5 e $\alpha=0,0100$	67
Tabela 4 – Probabilidade de alarme falso nos esquemas avaliados	68
Tabela 5 – Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - m=5 e $\alpha=0,0027$	70
Tabela 6 – Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - m=5 e $\alpha=0,0050$	70
Tabela 7 – Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - m=5 e $\alpha=0,0100$	71
Tabela 8 – Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - m=5 e $\alpha=0,0027$	77
Tabela 9 – Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - m=5 e $\alpha=0,0050$	78
Tabela 10 – Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - m=5 e $\alpha=0,0100$	79

Tabela 11 – Probabilidade de sinal para σ e fora de controle - $m=5$ e $\alpha=0,0027$	81
Tabela 12 – Probabilidade de sinal para σ e fora de controle - $m=5$ e $\alpha=0,0050$	82
Tabela 13 – Probabilidade de sinal para σ e fora de controle - $m=5$ e $\alpha=0,0100$	83
Tabela 14 – Probabilidade de sinal para direção adicional - $m=5$ e $\alpha=0,0027$	86
Tabela 15 – Probabilidade de sinal para direção adicional - $m=5$ e $\alpha=0,0050$	87
Tabela 16 – Probabilidade de sinal para direção adicional - $m=5$ e $\alpha=0,0100$	88
Tabela 17 – Probabilidade de sinal para resíduos - $m=5$ e $\alpha=0,0027$	90

Lista de Quadros

Quadro 1 – Combinações geradas na simulação para cada tamanho de amostra	64
--	----

Lista de Abreviaturas e Siglas

LSC	Limite superior de controle
LIC	Limite inferior de controle
CEP	Controle Estatístico de Processo
ARL ₀	<i>Average Run Length</i> (número médio de amostras até a ocorrência de um alarme)
NMA ₀	Número médio de amostras até a ocorrência de um alarme falso
NMA	Número médio de amostras até a ocorrência de um alarme verdadeiro

Lista de Símbolos

χ^2	Variável Qui-Quadrado
m	Número de amostras iniciais
n	Tamanho de amostra
p	Número de variáveis observáveis
q	Número de variáveis latentes (não observáveis)
\mathbf{x}	Vetor aleatório de dimensão p contendo as variáveis de qualidade observadas (variáveis observáveis)
\mathbf{d}	Vetor aleatório contendo as q variáveis latentes
d_j	Elementos do vetor \mathbf{d} (d_j é a j -ésima variável latente)
$\hat{\mathbf{d}}$	Estimativa do vetor \mathbf{d}
\hat{d}_j	Elementos do vetor $\hat{\mathbf{d}}$ (\hat{d}_j é a projeção do vetor \mathbf{x} na j -ésima direção atribuível)
\bar{d}_j	Média amostral das estimativas \hat{d}_j resultantes de uma amostra de tamanho n do vetor \mathbf{x})
\mathbf{C}	Matriz constante e de colunas independentes determinadas pelo conhecimento do processo
\mathbf{K}	Matriz constante e de colunas independentes determinadas por fontes de variação conhecidas e não conhecidas
δ	Vetor aleatório contendo as $q+1$ variáveis latentes (vetor formado pelas q variáveis latentes de \mathbf{d} e mais uma nova variável latente)
\mathbf{e}	Vetor de dimensão p de erros ou ruídos aleatórios sobre os elementos do vetor \mathbf{x}
Σ_d	Matriz de variância-covariância do vetor aleatório \mathbf{d}
Σ_e	Matriz de variância-covariância do vetor de ruídos aleatórios \mathbf{e}
\mathbf{I}	Matriz identidade
\mathbf{r}	Vetor resíduo
$\ \mathbf{r}\ ^2$	Quadrado da norma do vetor resíduo

σ_e^2	Variância do erro aleatório
σ_e	Desvio-padrão do erro aleatório
T	Variável latente associada a uma “rotação”
\hat{d}_T	Valor da projeção do vetor \mathbf{x} na direção da variável latente T
D	Variável latente associada a um “deslocamento horizontal”
\hat{d}_D	Valor da projeção do vetor \mathbf{x} na direção da variável latente D
C	Variável latente associada a uma “Contração/Dilatação”
\hat{d}_C	Valor da projeção do vetor \mathbf{x} na direção da variável latente C
α	Probabilidade de alarme falso
α_{conj}	Probabilidade de alarme falso conjunta dos q gráficos em S_j
α_{indiv}	Probabilidade de alarme falso em cada gráfico individual
VMAX	Máxima variância amostral
S	Desvio-padrão amostral
S_j	Desvio-padrão amostral dos elementos de um vetor
$S_{j\ pooled}$	Desvio-padrão combinado dos m valores de S_j em m amostras iniciais do processo suposto em controle
S	Matriz de covariâncias amostral
$ \mathbf{S} $	Variância amostral generalizada
$ \bar{\mathbf{S}} $	Determinante da Matriz S média - média aritmética das matrizes de covariâncias amostrais nas amostras iniciais
$ \mathbf{S}_a $	Determinante da variância do vetor $\hat{\mathbf{d}}$
Det_S	Determinante da Matriz S média – o mesmo que $ \bar{\mathbf{S}} $
VS	Estatística do somatório de variâncias
$\Pi(\cdot)$	Operador que transforma uma matriz $\mathbb{R}^{q \times p}$ em $\mathbb{R}^{q^2 \times (p+1)}$
vec(.)	Operador que empilha as colunas de uma matriz como um vetor
$\mathbf{1}_{p+1}$	Vetor coluna de dimensão $p+1$ no qual todos os elementos são iguais a 1

1 Introdução

Este capítulo apresenta a importância do tema proposto destacando sua relação com pesquisas semelhantes, sua contribuição e seus objetivos.

1.1 Contextualização do problema

Nas últimas décadas, com a aplicação de sensores e robôs na linha de produção, tem ocorrido crescente automatização dos processos industriais (WOODALL; MONTGOMERY, 1999). Esses processos automatizados permitem medições simultâneas, e em tempo real, de diversas variáveis de qualidade do processo (LOWRY; MONTGOMERY, 1995), gerando dessa forma quantidade significativa de dados. Estes últimos, quando trabalhados, transformam-se em informações de desempenho necessárias para verificar se o processo em curso está satisfatório em relação à qualidade desejada para o produto final. Nesse tipo de processo, as diversas variáveis a serem controladas são frequentemente relacionadas umas com as outras. Nesse caso, a melhor forma de tratar e analisar esses dados é através de esquemas de controle multivariados (APARISI *et al.*, 2001), que sejam simples de ler, bem elaborados conceitualmente e atendam à necessidade intrínseca do processo.

Com pensamento nas necessidades próprias dos processos multivariados, pesquisadores têm elaborado gráficos de controle cada vez mais específicos, pois os gráficos de controle tradicionais não são os mais adequados para tratar estatisticamente grandes volumes de dados e especificidades dos processos produtivos multivariados.

Processos Multivariados requerem monitoramento por métodos específicos que levem em conta a correlação entre as diversas variáveis de qualidade. O maior

clássico é o T^2 de Hotelling (HOTELLING, 1947, 1954), que monitora em apenas um gráfico as diversas variáveis de qualidade. Uma de suas limitações consiste em não indicar onde a causa específica está atuando. A questão de identificação das variáveis afetadas requer uma “análise pós-sinal” (HAWKINS, 1991).

O gráfico T^2 destina-se a sinalizar alterações na média do vetor de qualidade, considerando que as variáveis de qualidade são correlacionadas e seguem uma distribuição normal multivariada. Para monitorar alterações na matriz de variância-covariância, outros esquemas foram propostos, tais como: variância amostral generalizada (ALT, 1985) e, mais recentemente, os esquemas da máxima variância amostral (COSTA; MACHADO, 2009) e do somatório de variâncias (HAO *et al.*, 2008).

Também há extensões multivariadas aos esquemas CUSUM e EWMA, com vistas a maior rapidez de sinalização de alterações pequenas e moderadas nos parâmetros do processo (COSTA *et al.*, 2005), uma vez que o gráfico de T^2 e demais mencionados são gráficos do tipo “Shewhart”, eficientes apenas para grandes alterações nos parâmetros (MASON; YOUNG, 2002).

Estudos recentes (MARANHÃO; EPPRECHT, 2011; HAO *et al.*, 2008; RUNGER; MONTGOMERY, 1997; BARTON; GONZALEZ-BARRETO, 1996; RUNGER, 1996) apresentaram esquemas de controle fundamentados na projeção do vetor de qualidade em um subespaço predefinido. Tal projeção tem por objetivo representar o conjunto original das variáveis em estudo (*variáveis observáveis*) em outro subconjunto de variáveis de tamanho reduzido em relação ao conjunto original (*variáveis latentes*) (NOMIKOS; MACGREGOR, 1995).

Runger e Montgomery (1997) mostraram que, quando mudanças na média do vetor de variáveis observáveis de um processo multivariado ocorrem em direções previsíveis, as estatísticas mais eficazes para o controle do processo são desenvolvidas a partir dos valores das projeções do vetor de variáveis observáveis em cada uma destas direções. Assim, Maranhão e Epprecht (2011), fundamentados em Runger e Montgomery (1997), utilizaram a projeção do vetor das variáveis de qualidade para controlar a média de um processo produtivo através de variáveis latentes ou não observáveis; para tanto, projetaram o vetor das variáveis observáveis (variáveis de qualidade de interesse observadas) no

subespaço definido pelas *direções atribuíveis* (direções devidas aos deslocamentos das variáveis observáveis em função da presença de causas especiais ou atribuíveis). Assim, os autores, em vez de monitorar todas as variáveis observáveis do processo, propuseram novo esquema de controle estatístico multivariado, considerando apenas as alterações do processo nas direções atribuíveis conhecidas.

Hao *et al.* (2008) desenvolveram dois esquemas de controle para monitorar a variabilidade de processo utilizando projeções. O primeiro esquema monitora diretamente a variabilidade das fontes de variação, ao estimá-las pela projeção das variáveis observáveis em um subespaço predefinido (mesma projeção utilizada no gráfico U^2 de Runger, 1996). O segundo esquema, mais robusto que o primeiro (na concepção dos autores), monitora o somatório das variâncias do vetor que corresponde às fontes de variação. Essas variâncias são obtidas pela projeção da matriz de variância-covariância das variáveis observáveis em outro subespaço distinto daquele definido no primeiro esquema.

Pode-se dizer que os gráficos de controle baseados em esquemas de projeções, além de reduzirem a quantidade de gráficos, relacionam as falhas do processo (causadas pelas fontes de variação) com as características de qualidade dos produtos (HAO *et al.*, 2008).

Os esquemas de projeções podem ser aplicados onde a estrutura de correlação entre as variáveis de qualidade (*variáveis observáveis*) se deve ao fato de que as perturbações ocorridas nessas variáveis são efeito de outras perturbações, que podem ser consideradas as perturbações originais, ou “em si”, do processo (APLEY; DING, 2005; APLEY; LEE, 2003). Por exemplo, durante a montagem de portas laterais em veículos dentro de uma linha de produção automotiva, podem surgir variações nos ajustes (variável observável a ser controlada) permitidos para o funcionamento da ação de abrir e fechar a porta do veículo. Tais variações podem surgir em consequência de diversos movimentos que a porta lateral venha a fazer durante a montagem, por exemplo: um deslocamento vertical ou horizontal da porta em relação ao vão da carroceria, ou uma rotação ou torção da porta durante sua colocação. Esses movimentos

indesejados correspondem a fontes de variação que atuam durante o processo de montagem nas variáveis observáveis (ver Apley e Ding (2005)).

Como os movimentos de deslocamento horizontal, deslocamento vertical, rotação e torção são responsáveis pelas variações do padrão de ajuste de montagem das portas (conforme apresentado na Figura (2)), eles são identificados como as fontes de variação inerentes ao processo de montagem.

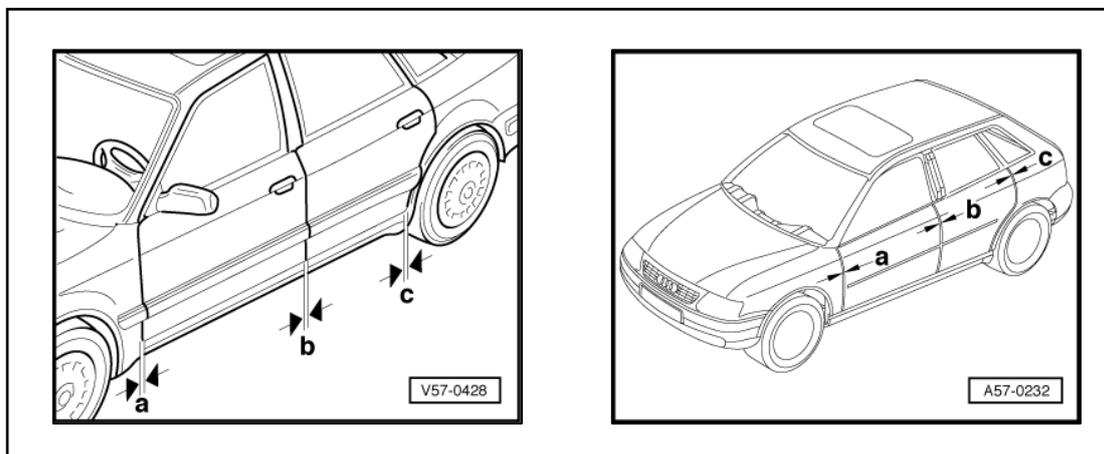


Figura 1– Ajustes da porta lateral do AUDI

Fonte: Catálogo de Manutenção do AUDI

Cada um desses movimentos desloca o vetor de variáveis observáveis em uma direção específica. As direções para as quais são deslocadas as variáveis observáveis denominam-se *direções atribuíveis*, em razão de os deslocamentos serem provenientes de causas especiais ou atribuíveis.

Assim, fundamentada nos trabalhos de Hao *et al.* (2008) e Maranhão e Epprecht (2011), que aplicaram as projeções do vetor de qualidade para controlar, respectivamente, alterações na média e no aumento de variância, esta Tese apresentará um novo esquema de controle. O novo esquema, baseado em projeções, tem por objetivo monitorar a dispersão do processo, no qual os descontroles se devem a causas especiais, que atuam em fontes de variação independentes, cada uma destas podendo ser representada por uma variável aleatória latente. Desta forma, aqui é proposto um esquema de monitoramento da variância de processos multivariados, por meio de gráficos de desvio-padrão S das projeções do vetor observável nas direções atribuíveis. De forma específica, o

procedimento consiste em retirar periodicamente uma amostra de tamanho $n > 1$ do vetor de variáveis observáveis; projetar estes n vetores em cada uma das direções atribuíveis (obtendo assim, para cada direção atribuível, n valores da projeção); calcular, para cada direção individual, o desvio-padrão amostral das n projeções; e lançá-lo em um gráfico de S . Esses gráficos de controle aplicados nas direções atribuíveis são em menor número quando comparados aos gráficos nas variáveis observáveis (HAO *et al.*, 2008); além disso, seus sinais são interpretados diretamente em termos das direções atribuíveis conhecidas, o que permite atuar diretamente nas causas assinaláveis detectadas.

Para o desenvolvimento do esquema proposto, alguns pressupostos serão seguidos:

- i. as direções atribuíveis de variação do vetor \mathbf{x} de variáveis observáveis estão relacionadas às fontes primárias de variabilidade do processo. A variação devida a cada uma dessas fontes primárias pode ser representada por uma variável latente d_j não diretamente observável. Cada variável latente é independente das demais. A cada fonte primária (e, portanto, às variações de cada variável latente) corresponde uma direção de variação atribuível do vetor de variáveis observáveis. Assim, as observações do vetor de variáveis observáveis são a resultante da combinação das realizações das variáveis latentes, acrescidas de ruídos aleatórios e erros de medição nas próprias variáveis observáveis;
- ii. cada fonte de variação e, portanto, cada variável latente, é independente das demais;
- iii. as direções atribuíveis de variação do vetor de variáveis observáveis são ortogonais entre si;
- iv. quando o processo está sob controle, o vetor \mathbf{x} de variáveis observáveis tem valor esperado igual ao seu valor nominal, e sua variabilidade resulta da combinação das (pequenas) variabilidades naturais das variáveis latentes e dos ruídos aleatórios;

- v. o que produz as correlações entre as variáveis observáveis é o fato de que as direções atribuíveis não são em geral colineares com uma única variável observável;
- vi. as causas especiais não agem diretamente sobre as variáveis observáveis de maneira individual, mas sim sobre as fontes principais de variação do processo (variáveis latentes não observáveis). Uma causa especial que atue em uma variável latente, provocando uma mudança no seu valor médio e/ou um aumento da sua variância, corresponde a uma alteração da média do vetor de variáveis observáveis, ou no aumento de sua variabilidade, ao longo da direção de variação correspondente àquela variável latente. (Essa é a razão pela qual as direções de variação foram nomeadas aqui como “direções atribuíveis”). No caso de diversas causas especiais atuando sobre as variáveis latentes, seus efeitos sobre as variáveis observáveis se combinam.

Espera-se atingir com a presente pesquisa os seguintes objetivos:

- i. propor gráficos de S das projeções do vetor observável nas direções atribuíveis, para monitorar a variabilidade do processo ao longo destas direções;
- ii. analisar com dados simulados o desempenho do esquema proposto através de gráficos de controle do desvio-padrão dos valores das projeções do vetor de variáveis observadas em direções específicas;
- iii. comparar o desempenho do esquema proposto com os gráficos da variância amostral generalizada (Det_S), da máxima variância amostral (VMAX), e do somatório de variâncias (VS);
- iv. monitorar a média da norma quadrática do vetor resíduo, para o caso em que causas especiais de natureza desconhecida estejam provocando alterações na média ou na variância do processo, em

direções não contidas no hiperplano varrido pelas direções atribuíveis conhecidas.

Uma das vantagens do esquema proposto é o benefício de redução da dimensionalidade do problema. Em alguns processos, o número de variáveis observáveis pode ser muito grande, e o número de variáveis latentes pode ser bem menor. Tal vantagem, contudo, não é exclusiva do método proposto: outros esquemas de controle multivariado da dispersão, como o gráfico da variância amostral generalizada e, mais recentemente, os gráficos da máxima variância amostral e do somatório de variâncias, também apresentam esta vantagem – neste caso ainda mais acentuada, pois utilizam uma única estatística e um único gráfico de controle. Contudo, é de esperar que o esquema proposto, por monitorar a dispersão das estimativas das próprias variáveis latentes (não observáveis) que correspondem às fontes de variabilidade do processo, seja mais eficiente do que esquemas que confundam (ou misturem) os efeitos de diferentes fontes de variação. Por fim, ao ter um gráfico separado associado a cada fonte de variação, a questão da interpretação do sinal dos gráficos fica facilmente resolvida.

A análise de desempenho do esquema proposto nesta Tese será desenvolvida com dados simulados a partir de um exemplo de montagem do vidro traseiro de um automóvel. Exemplos semelhantes foram apresentados por Apley e Ding (2005); e Maranhão e Epprecht (2011).

1.2

Trabalhos precedentes relacionados

Do ponto de vista histórico, o desenvolvimento do monitoramento da matriz de variância-covariância se deu mais fortemente a partir da década de 1990, pois até então a maioria dos pesquisadores concentravam seus esforços no desenvolvimento de gráficos de controle multivariados, a fim de monitorar mudanças na média do processo (YEH, 2006). Contudo, ainda no período que antecedeu os anos 90, alguns poucos trabalhos com vistas ao monitoramento da

variância também foram publicados, tais como os apresentados por Montgomery e Wadsworth (1972); Alt (1985), Alt e Bedewi (1986); Healy (1987); e Alt e Smith (1988). No entanto, no período pós-anos 90, o aumento do poder computacional e a introdução de técnicas avançadas de aquisição de dados forneceram as ferramentas necessárias para que diversos pesquisadores desenvolvessem e implementassem novos esquemas de controle multivariados, tanto para média, quanto para a variância (YEH *et al.*, 2006). Tal fato fez com que ocorresse aumento significativo no número de publicações que abordavam o tema de controle de processos multivariados. Pela relevância do tema como área de pesquisa, Woodall e Montgomery (1999); Yeh *et al.* (2006); e Bersimis *et al.* (2007) apresentaram panoramas sobre os principais métodos de monitoramento e de melhorias de processos até então publicados.

Woodall e Montgomery (1999), a partir de uma perspectiva histórica dos métodos de controle até então desenvolvidos, apresentaram algumas ideias para futuras pesquisas. O panorama exposto pelos autores abordava temas como métodos de amostragem e tamanho de amostras variável, controle de dados autocorrelacionados, e métodos de controle multivariados. Uma das tendências de pesquisa futura reside na área de monitoramento da variabilidade do processo. Nessa área de pesquisa, concluiu-se que os processos multivariados até então tinham recebido pouca atenção por parte dos pesquisadores e seria necessário intensificar pesquisas em métodos gráficos de visualização de dados, em virtude da dificuldade associada à interpretação de sinais. Os autores também destacaram a importância dos métodos de redução de dados.

Yeh *et al.* (2006), diferentemente de Woodall e Montgomery (1999), focaram suas análises apenas nos gráficos de controle para processos normais multivariados independentes. O objetivo dos autores era acompanhar a evolução dos esquemas de monitoramento da matriz de variância-covariância, desenvolvidos entre 1990 e 2005. Para tanto, fizeram um levantamento dos principais métodos e analisaram o desempenho destes conforme o tipo de gráfico de controle: Shewhart multivariado, CUSUM multivariado, e EWMA multivariado. Os pesquisadores apontaram a necessidade de pesquisas futuras com o objetivo de comparar, de forma sistemática e organizada, todos os gráficos de controle para o monitoramento da matriz de covariância. Indicaram também as

técnicas de diagnóstico como área de pesquisa com futuro promissor, pois a complexidade da matriz de covariância apresenta dificuldade na identificação dos parâmetros que estão fora de controle.

Bersimis *et al.* (2007) revisaram extensões multivariadas para os gráficos univariados dos tipos Shewhart, CUSUM, EWMA, além de analisarem os esquemas dos mínimos quadrados parciais (PLS) e de análise de componentes principais (PCA). Os autores apresentaram os gráficos de controle multivariado tanto para controlar a média do processo, quanto para controlar a dispersão do processo. Destacaram também a necessidade da investigação de processos autocorrelacionados e apontaram os gráficos de Shewhart multivariado como os gráficos mais utilizados nas indústrias, ressaltando que, em virtude da importância desses temas, ambos mereciam destaque em pesquisas futuras. Outra área promissora de pesquisa apontada inclui as técnicas MCUSUM para observações autocorrelacionadas.

Em todos os artigos de revisão citados anteriormente, os autores dedicaram parte de suas análises aos métodos de projeção. A filosofia que embasa esses métodos consiste na redução da dimensão do problema através da formação de novo conjunto de variáveis. Por exemplo, a Análise de Componentes Principais (PCA) permite reduzir a dimensionalidade do problema, e define uma série de novas variáveis, componentes principais – combinação linear das variáveis originais medidas que explicam a máxima variabilidade dos dados. Outra abordagem semelhante é a projeção de estrutura latente ou Mínimos Quadrados Parciais (PLS); este método reduz simultaneamente o espaço de dimensionalidade das variáveis do processo e a qualidade das informações dos produtos. Dessa forma, um modelo é desenvolvido para a predição das variáveis de qualidade na variável do espaço reduzido (MARTIN *et al.*, 2006).

De forma mais específica, pode-se dizer que esses métodos consistem em projetar o vetor das variáveis observáveis no subespaço definido pelas direções atribuíveis, pois este procedimento assegura uma redução na dimensionalidade das variáveis a serem controladas, ao mesmo tempo que concentra informações significativas das variáveis observáveis nas fontes de variação. Nessa linha de argumentação, algumas técnicas foram propostas ao longo dos últimos trinta anos,

tais como: Análise de Componentes Principais apresentada por Hu e Wu (1992); Runger e Montgomery (1997); Bodnar e Schmid (2005); Apley e Shi (2001); González e Sánchez (2008); Maranhão e Epprecht (2011), e a Separação Cega de Fontes (*Blind Source Separation*) via Análise de Componentes Independentes, com Apley e Lee (2003); Lee e Apley (2004); e Shan e Apley (2008).

Hu e Wu (1992) mostraram que um dos pontos críticos na redução da variabilidade de um processo de montagem é a identificação das fontes de variação. Os autores aplicaram a análise de componentes principais para identificar as fontes responsáveis pela variabilidade do processo de colocação de uma peça lateral de um automóvel. No processo de ajuste da peça lateral, estudaram as causas especiais associadas a três direções atribuíveis ortogonais. Para cada uma das direções estudadas foi possível, através das componentes principais, identificar as fontes de variação responsáveis pela variabilidade do processo. Runger e Montgomery (1997) propuseram um método de controle baseado nas projeções das variáveis observáveis sobre as direções das perturbações a serem detectadas. Analisaram as alterações do processo, observando as projeções em direções conhecidas, com o objetivo de identificar as direções de mudança do vetor de média. A mesma abordagem foi utilizada por Bodnar e Schmid (2005), no interesse de controlar mudanças na média com a utilização dos esquemas CUSUM e EWMA. Apley e Shi (2001) apresentaram um modelo fatorial ortogonal capaz de extrair e interpretar informações provenientes das variáveis observáveis, com o propósito de diagnosticar as causas especiais que influenciavam na variabilidade do processo. A ideia desenvolvida pelos autores consistia em determinar as causas especiais responsáveis pela variabilidade do processo, sem o conhecimento, *a priori*, destas. A abordagem permitiu a identificação e eliminação das causas especiais de variabilidade. González e Sánchez (2008) propuseram identificar potenciais perturbações na média do processo a partir de dados obtidos com o processo em controle. Os pesquisadores transformaram as informações das variáveis observáveis em fatores independentes, aplicando a técnica da análise dos componentes independentes para estimar os alarmes principais provenientes de mudança na média. Os autores aplicaram a técnica em um processo de montagem de janelas em portas de carros com controle dimensional manual realizado em dez pontos. Maranhão e Epprecht

(2011) desenvolveram gráficos univariados nas projeções do vetor de variáveis observáveis nas direções assinaláveis, a fim de detectar alterações na média do vetor latente (projeção do vetor de variáveis observáveis), e verificaram o desempenho do esquema proposto por eles em relação a outros gráficos de controle, tais como T^2 de Hotelling e Shewhart, nas componentes principais. Ao mesmo tempo, procuraram identificar em que condições a análise de componentes principais identificava, ou não, as direções de variação do processo (direções previamente conhecidas). O estudo utilizou como exemplo a montagem de dois painéis sobrepostos com quatro pontos de medição de folgas horizontais. No trabalho foram analisados apenas três padrões de variação de montagem, denominados direções atribuíveis de variação: rotação, deslocamento horizontal e contração/dilatação. Como contribuição adicional, os autores analisaram o desempenho da norma quadrática do resíduo, com o objetivo de detectar alterações em direções fora do subespaço das direções assinaláveis conhecidas.

Em estudos mais recentes, outros pesquisadores buscam identificar as fontes de variação, aplicando a técnica de separação cega de fontes aos dados do processo. Essa técnica consiste em obter um conjunto de sinais, denominados fontes de variação, a partir das informações retidas pelas variáveis observáveis. O termo cego é explicado em virtude de as fontes de variação não serem observadas diretamente, e não se conhecer a composição da informação proveniente destas. As fontes de variação não observáveis são desconhecidas e, por hipótese, estatisticamente independentes entre si, o que torna a análise dos componentes independentes apropriada para essa técnica. Apley e Lee (2003) aplicaram a técnica de separação cega de fontes na identificação das causas especiais de variação através de padrões de variação capturados pelos sensores de medição *in-line*, e verificaram que os sinais de medição obtidos pelos sensores traziam informações das diversas fontes de variação. Esses sinais foram separados pela técnica da Separação Cega de Fontes, e seus componentes individuais identificados como as fontes de variação do processo. Os pesquisadores concluíram que o método proposto é eficiente na identificação das causas especiais e na redução da variabilidade do processo. Lee e Apley (2004) utilizaram a técnica de separação cega de fontes para identificar as características individuais de cada padrão de variação (fontes de variação), no intuito de

reconhecer as causas especiais atuantes em cada fonte de variação observada no padrão identificado. Os autores frisaram que o método não tem aplicação universal e depende de certas condições atribuídas às fontes de variação. Shan e Apley (2008) apresentaram um método que combinava diferentes critérios de aplicabilidade e desempenho na utilização da separação cega de fontes. Segundo os pesquisadores, essa abordagem de combinação ótima de diferentes critérios para estimar o vetor de padrão de variação resulta em uma identificação robusta e eficaz em relação a outros tipos de critérios. Os trabalhos que utilizam a técnica da separação cega de fontes têm como suposição o não conhecimento das fontes de variação associadas ao processo.

O exemplo de Apley e Ding (2005) descreve o problema de variabilidade nas dimensões de peças necessárias à fixação de porta traseira de uma minivan por meio de um processo automatizado com medição por sensores. A Figura 2 apresenta a minivan e a disposição dos sensores de medição no contorno do vão da porta. No vão da porta são fixados os sensores, aqui representados pelas letras A, B, C, D, E e F, e na porta a ser fixada (retângulo menor apresentado na Figura 2(b)), os pontos de medição representados pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Cada sensor mede a menor distância entre ele e seu ponto associado; por exemplo, o sensor A mede a distância $\overline{A1}$, que é a distância horizontal entre o sensor A e o ponto de medição 1; assim os sensores A, B, C e D medem as variações sofridas pela porta na direção horizontal (esquerda e direita), e os sensores E e F medem as variações na direção vertical (cima e baixo).

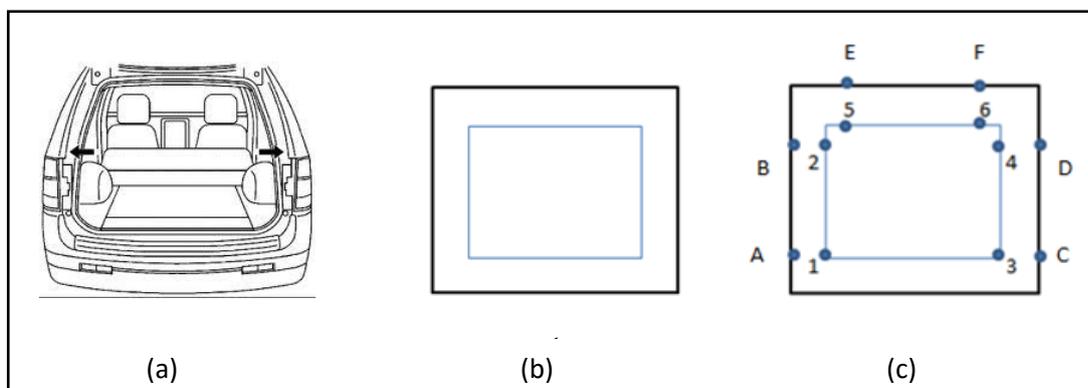


Figura 2 – Minivan (a), porta traseira (b) e disposição dos sensores de medida (c).

Pode ser visto na Figura 3(a) que, quando a porta traseira sofre uma dilatação horizontal, os pontos de medição 1, 2 se aproximam dos sensores A e B, ou seja, se deslocam para a esquerda. De outro lado, os pontos 3 e 4 se aproximam dos sensores C e D com deslocamento pela direita. Os pontos 5 e 6 não se deslocam verticalmente em relação aos sensores E e F; desta forma, o deslocamento medido por esses sensores é nulo. A mesma análise pode ser estendida para as outras fontes de variação.

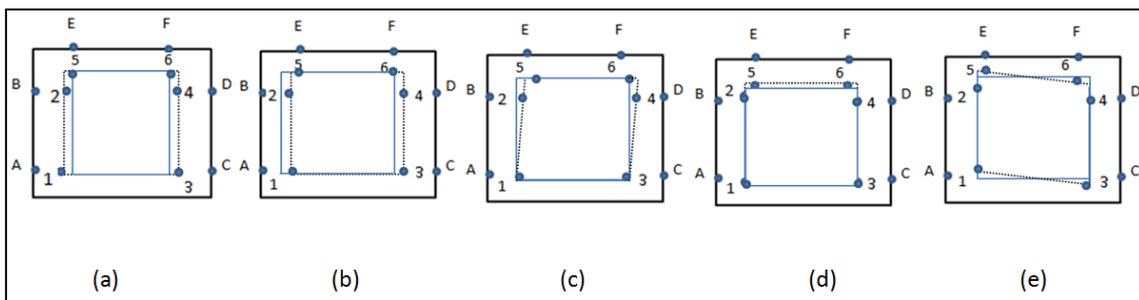


Figura 3 – Padrões de variação: dilatação horizontal (a), translação lateral direita (b), torção horizontal (c), dilatação vertical (d) e torção vertical (e).

O exemplo de Maranhão e Epprecht (2011) descreve o mesmo problema de variabilidade nas dimensões de peças necessárias à fixação de porta traseira de um automóvel, porém com redução no número de pontos de medição.

1.3

Estrutura da tese

A Tese está estruturada em seis capítulos:

Capítulo 1: Introduz o leitor ao tema abordado na Tese, evidenciando-se o estado da arte de trabalhos precedentes e destacando-se a relevância do tema proposto e seus objetivos, assim como as suposições que orientaram a pesquisa.

Capítulo 2: Apresenta os fundamentos teóricos do esquema proposto, ou seja, do uso das projeções no monitoramento da variância como indicador de

problemas no desempenho do processo. Descreve as limitações do esquema proposto e o desenvolvimento matemático do vetor resíduo calculado em função das variáveis observáveis e das variáveis latentes definidas pelo esquema proposto.

Capítulo 3: Para efeito de comparação com o esquema proposto são apresentados outros métodos de controle da variância.

Capítulo 4: Dedicar-se às simulações necessárias para a verificação do desempenho do gráfico de desvio-padrão nas projeções em relação aos gráficos nas estatísticas concorrentes: Máxima variância amostral, Variância amostral generalizada, e Somatório de variâncias. Apresenta, ao final, os resultados obtidos.

Capítulo 5: Contém as conclusões referentes aos resultados obtidos na análise de desempenho do esquema proposto em relação às estatísticas concorrentes.

Referências: Apresenta as referências usadas na fundamentação desta Tese.

Apêndice: Contém as Tabelas para os todos os casos estudados com tamanho de amostra 15.

2 O esquema proposto

2.1

Considerações iniciais

Uma causa especial (ou causas especiais) pode(m) não estar agindo diretamente em uma ou mais variáveis observáveis, mas sim em alguma variável latente, não diretamente observável; seu efeito sobre essa variável não observável pode se refletir sobre as variáveis observáveis em conjunto, alterando a média e/ou variâncias dos elementos do vetor de variáveis observáveis ao longo de direções específicas, aqui denominadas "direções atribuíveis", uma vez que cada um dos elementos do vetor está associado a uma causa atribuível específica.

Portanto, é necessário definir um modelo que represente a relação entre as variáveis aleatórias observáveis, as variações aleatórias e as direções das perturbações, assim como os ruídos próprios de medição. Esse modelo linear é proposto na equação matricial a seguir:

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{d} + \mathbf{e} \quad (1)$$

onde:

\mathbf{x} é o vetor $p \times 1$ das variáveis observáveis;

\mathbf{C} é a matriz $p \times q$ das direções atribuíveis de variação ($q \leq p$);

\mathbf{d} é o vetor $q \times 1$ de variáveis não observáveis que representa as fontes de variação que afetam diretamente o vetor das variáveis observáveis;

\mathbf{e} é o vetor $p \times 1$ que representa os ruídos de medição e possíveis pequenas variações aleatórias nas variáveis observáveis.

A Equação (1) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1q} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{p1} & C_{p2} & \dots & C_{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_p \end{bmatrix}$$

As colunas de \mathbf{C} são vetores ortonormais na direção de cada uma das fontes de variação atribuíveis conhecidas. Que esses vetores sejam unitários pode ser sempre conseguido por uma definição apropriada das unidades de medida das variáveis latentes (elementos de \mathbf{d}) e observáveis (elementos de \mathbf{x}). No caso típico em que as unidades de \mathbf{x} são preestabelecidas, isso determina a escolha apropriada das unidades dos elementos de \mathbf{d} que tornam as colunas de \mathbf{C} vetores unitários.

Esse mesmo modelo foi adotado nos trabalhos de Barton e Gonzalez-Barreto (1996); Jin e Shi (1999); Mantripragada e Whitney (1999); Jin e Shi (1999); Ding *et al.* (2000); Huang *et al.* (2000); Zhou *et al.* (2003); Apley e Ding (2005); Kong *et al.* (2006); e mais recentemente nos trabalhos de Hao *et al.* (2008); e Maranhão e Epprecht (2011).

Para o modelo apresentado na Equação (1) assumem-se as hipóteses que:

- as variáveis latentes (elementos do vetor \mathbf{d}) são independentes, normalmente distribuídas, e com variâncias em controle σ_j^2 , $j = 1, 2, \dots, q$;
- os elementos do vetor \mathbf{e} (ruídos nas variáveis observáveis) são i.i.d., normalmente distribuídos, com $E[\mathbf{e}] = 0$ e variância σ^2 (ou seja, $\Sigma_{\mathbf{e}} = \sigma^2 \mathbf{I}_{p \times p}$) e independentes do vetor \mathbf{d} ;
- causas especiais de variação podem afetar a média de \mathbf{d} e/ou aumentar alguma (ou várias) das variâncias σ_j^2 , $j = 1, 2, \dots, q$, das variáveis latentes (o que, como dito anteriormente, produzirá efeitos sobre a média e/ou as variâncias das variáveis observáveis). A matriz $\Sigma_{\mathbf{d}}$, porém, permanece diagonal, ou seja, as variáveis não observáveis permanecem descorrelacionadas entre si.

Esses pressupostos são válidos em muitas situações reais e foram adotados por vários autores anteriormente, como Apley e Shi (2001); e Maranhão e Epprecht (2011).

Por conveniência, adota-se nesta Tese a forma de medida em que as variáveis são centradas (definidas, portanto, como desvios em relação à média), sem perda de generalidade. Assim, com o processo em controle, tanto \mathbf{d} como \mathbf{x} têm média nula.

2.2

Projeções $\hat{\mathbf{d}}$

Com base no modelo de processo descrito pelas hipóteses assumidas, faz sentido monitorar o processo pelas variáveis latentes em vez de monitorá-lo pelas variáveis observáveis. No entanto, como o vetor de variáveis não observáveis \mathbf{d} não é diretamente observável, ele precisa ser estimado. Para tanto, pode-se utilizar como estimador a projeção do vetor de variáveis observáveis \mathbf{x} no subespaço das direções atribuíveis representadas pelas colunas de \mathbf{C} (na base vetorial formada pelas colunas de \mathbf{C}), ou seja:

$$\hat{\mathbf{d}} = (\mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{x} \quad (2)$$

Aplicando a condição de ortogonalidade $\mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{I}_{q \times q}$, vem:

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{C}^T\mathbf{x} \quad (3)$$

Para verificar a relação dessas projeções com as variáveis latentes e os ruídos, ao substituir a Equação (1) na Equação (3), e novamente lembrando que $\mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{I}_{q \times q}$, vem:

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{C}^T\mathbf{x} \Rightarrow \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{d} + \mathbf{e})$$

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d} + \mathbf{C}^T\mathbf{e} \quad (4)$$

Como, por hipótese, \mathbf{e} tem média nula (ao menos com o processo sob controle), $\hat{\mathbf{d}}$ é não tendencioso. Assim, Maranhão (2012) propôs o uso de gráficos univariados separados nos elementos de $\hat{\mathbf{d}}$, para monitorar a média do processo.

Aqui a preocupação é com o monitoramento da dispersão do processo. Aplicando no membro direito da Equação (4) as propriedades de variância (sem esquecer que \mathbf{d} e \mathbf{e} são independentes por hipótese), obtém-se:

$$\begin{aligned}\Sigma_{\hat{\mathbf{d}}} &= \Sigma_{\mathbf{d}} + \Sigma_{\mathbf{C}^T \mathbf{e}} \\ \Sigma_{\hat{\mathbf{d}}} &= \Sigma_{\mathbf{d}} + \mathbf{E}[\mathbf{C}^T \mathbf{e})(\mathbf{C}^T \mathbf{e})^T] \\ \Sigma_{\hat{\mathbf{d}}} &= \Sigma_{\mathbf{d}} + \mathbf{E}[\mathbf{C}^T \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{C}] \\ \Sigma_{\hat{\mathbf{d}}} &= \Sigma_{\mathbf{d}} + \mathbf{C}^T \mathbf{E}[\mathbf{e} \mathbf{e}^T] \mathbf{C} \\ \Sigma_{\hat{\mathbf{d}}} &= \Sigma_{\mathbf{d}} + \mathbf{C}^T \Sigma_{\mathbf{e}} \mathbf{C}\end{aligned}\quad (5)$$

o que, dada a hipótese de que $\Sigma_{\mathbf{e}} = \sigma_e^2 \mathbf{I}_{p \times p}$, e mais uma vez usando $\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{I}_{q \times q}$, se reduz a

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{d}}} = \Sigma_{\mathbf{d}} + \sigma_e^2 \mathbf{I}_{p \times p} \quad (6)$$

Lembrando que $\Sigma_{\mathbf{d}}$ é diagonal (uma vez que as variáveis latentes são independentes entre si), a Equação (6) mostra que $\Sigma_{\hat{\mathbf{d}}}$ também é diagonal. Esse fato torna válido o monitoramento da variabilidade do processo por gráficos separados nas variâncias (ou nos desvios-padrão) amostrais dos elementos de $\hat{\mathbf{d}}$, pois, como não há efeitos de correlações a considerar, pode-se usar a correção de Bonferroni ou de Dunn-Sidak para limitar a taxa de alarmes falsos. O monitoramento por gráficos separados traz a vantagem adicional de que qualquer sinal em um dos gráficos já indicará automaticamente qual a variável latente que teve sua dispersão aumentada (ou seja, qual a fonte de variação atribuível afetada pela causa especial). Com efeito, aqui é proposta a análise de desempenho de um conjunto de gráficos de S nos elementos de $\hat{\mathbf{d}}$.

2.3

Vetor resíduo

Como o modelo pressupõe que, tanto com o processo em controle quanto fora de controle, as variações se dão, a menos de erros aleatórios nas medidas das variáveis observáveis, em um subespaço formado pelas direções de variação atribuíveis. Se não houver causas especiais que levem a variações fora desse subespaço, os resíduos (diferença entre o vetor de variáveis observadas e sua projeção nesse subespaço) se deverão às flutuações aleatórias e_i nas observações das variáveis x_i , $i = 1, 2, \dots, p$. Contudo, se novas causas especiais (nunca observadas antes) ocorrerem, levando a deslocamentos do vetor médio do processo (média de \mathbf{x}) ou a um aumento da variabilidade do processo em direções não contidas no subespaço das direções atribuíveis, o vetor resíduo terá sua média deslocada do valor zero (valor da sua média em controle) ou as variâncias de seus elementos aumentadas respectivamente. Em qualquer caso, o valor esperado do quadrado da sua norma aumentará. Com efeito,

$$E(\|\mathbf{r}\|^2) = [E(\|\mathbf{r}\|)]^2 + V(\|\mathbf{r}\|) \quad (7)$$

onde $V(\cdot)$ denota *variância*. Quando a média de \mathbf{r} se afasta do vetor $\mathbf{0}$, a primeira parcela do membro direito de (7) aumenta; e, quando a variância dos elementos de \mathbf{r} aumenta, a segunda parcela aumenta. Assim, a média amostral do quadrado da norma do vetor resíduo, $\overline{\|\mathbf{r}\|^2}$, que é um estimador de $E(\|\mathbf{r}\|^2)$, pode ser usada como estatística de controle para sinalizar novas causas atribuíveis que fazem variar o processo em uma direção ortogonal ao subespaço das direções atribuíveis. Note-se também que a média da norma $\overline{\|\mathbf{r}\|}$, que é um estimador de $E(\|\mathbf{r}\|)$, ou seu quadrado $\overline{\|\mathbf{r}\|^2}$ (não confundir com $\overline{\|\mathbf{r}\|^2}$) pode ser utilizada para monitorar a média de \mathbf{r} , mas teria pouca sensibilidade a mudanças em sua variância, enquanto a variância amostral de sua norma $S^2(\|\mathbf{r}\|)$, que é um estimador de $V(\|\mathbf{r}\|)$, pode ser utilizada para monitorar a variância de \mathbf{r} , mas seria insensível às mudanças na sua média. Por outro lado, a média da norma do quadrado de \mathbf{r} , $\overline{\|\mathbf{r}\|^2}$, constitui

uma estatística *omnibus*, sensível a ambos os tipos de mudança. De fato, Maranhão (2012), que considerou as observações individuais do vetor \mathbf{x} , ou seja, amostras de tamanho 1, propôs monitorar as mudanças na média do processo em direções ortogonais ao subespaço das direções atribuíveis com gráficos de $\|\mathbf{r}\|^2$. Com amostras de tamanho 1, $\|\mathbf{r}\|^2$ é um caso particular de ambos $\overline{\|\mathbf{r}\|^2}$ e $\overline{\|\mathbf{r}\|^2}$. Além disso, quando não há nenhuma mudança na média do processo, $\overline{\|\mathbf{r}\|^2}$ é o estimador de máxima verossimilhança de $V(\|\mathbf{r}\|)$, ou seja, uma alternativa para $S^2(\|\mathbf{r}\|)$.

A estatística de controle $\overline{\|\mathbf{r}\|^2}$ também é sensível aos aumentos na variância dos ruídos aleatórios, σ_e^2 , pois o vetor resíduo \mathbf{r} é devido às realizações independentes do ruído aleatório e_i que incide diretamente sobre as observações de x_i , $i = 1, 2, \dots, p$. Um aumento na variância desses e_i resultaria num aumento na variância da norma de \mathbf{r} . Uma outra forma considera que o vetor de ruído aleatório tem dimensão p , enquanto o subespaço das direções atribuíveis tem dimensão $q < p$. Um aumento da variância do ruído aleatório iria resultar em componentes de variação do processo que se encontrariam fora daquele subespaço. É claro que parte do aumento da dispersão do processo devido ao aumento na variabilidade do ruído aleatório será contida nesse subespaço, o que fará com que os gráficos de S nas projeções (esquema proposto) também sejam sensíveis a essas mudanças.

Em suma, um gráfico de controle na média da norma quadrática dos resíduos da amostra (o que se propõe aqui) permitirá detectar a presença de novas fontes de variação atribuíveis e/ou aumentos na variância dos ruídos aleatórios que porventura ainda não tenham sido observados pelos técnicos de produção ou pelos engenheiros de qualidade.

O monitoramento dos resíduos no esquema proposto deve ser realizado em conjunto com os gráficos nas projeções $\hat{\mathbf{d}}$, pois assim é possível detectar alterações causadas pelas fontes de variações atribuíveis, e ao mesmo tempo detectar alterações que viriam a ocorrer no processo, causadas por outras fontes de variação ainda não identificadas, ou ainda aumentos na dispersão do ruído aleatório.

Nesta Tese o vetor resíduo é definido da seguinte forma:

Dada uma amostra de tamanho $n > 1$ do vetor \mathbf{x} , $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, e obtidos os n vetores-projeção $\hat{\mathbf{d}}_1, \hat{\mathbf{d}}_2, \dots, \hat{\mathbf{d}}_n$, os n vetores resíduos são calculados pela equação

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{d}}_k; k=1,2,\dots,n \quad (8)$$

e a média da norma quadrática de \mathbf{r} como

$$\overline{\|\mathbf{r}\|^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k.$$

O vetor resíduo dado na Equação (8) é calculado pela diferença vetorial entre o vetor das variáveis observadas e a sua projeção $\hat{\mathbf{d}}$ no subespaço das variáveis latentes. A pré-multiplicação de $\hat{\mathbf{d}}$ pela matriz \mathbf{C} , nessa equação, corresponde apenas à mudança desta projeção para representá-la no espaço p -dimensional do vetor \mathbf{x} .

Com o processo em controle, o vetor \mathbf{x} é dado pela Equação (1). Contudo, uma nova causa especial que venha a corresponder a variações do vetor \mathbf{x} em direção ortogonal ao subespaço das direções atribuíveis conhecidas – pode ser representada (para efeito do presente desenvolvimento) por uma nova variável latente. Nesse caso, a matriz \mathbf{C} ganha mais uma coluna, que corresponde a um vetor unitário na direção de variação de \mathbf{x} correspondente a essa nova variável latente. Suponhamos ainda que esse vetor seja ortogonal às demais colunas de \mathbf{C} . Essa nova matriz \mathbf{C} é aqui denominada \mathbf{K} . Se \mathbf{C} tem dimensão $p \times q$, \mathbf{K} tem dimensão $p \times (q + 1)$.

Um deslocamento da média ou um aumento da variância da nova variável latente \mathbf{d}_{q+1} provoca deslocamento da média de \mathbf{x} ou aumento de sua variância na direção da coluna $q+1$ da matriz \mathbf{K} .

Vejam agora o que ocorre com o quadrado da norma do vetor resíduo no caso do surgimento da nova variável latente $q+1$. É preciso não perder de vista que sendo a variável $q+1$ desconhecida, o vetor resíduo segue calculado pelo usuário do gráfico proposto pela Equação (8) (que usa a matriz \mathbf{C}), e onde $\hat{\mathbf{d}}$ (ainda de dimensão q) é calculado pela Equação (3), que usa a transposta da mesma matriz. Assim: $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{x}$.

O vetor \mathbf{x} , porém, não mais é dado pela Equação (1) com a matriz \mathbf{C} , mas sim pela sua equivalente

$$\mathbf{x} = \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{e}$$

onde a matriz \mathbf{K} tem dimensão $p \times (q + 1)$ e $\boldsymbol{\delta}$ é o novo vetor \mathbf{d} , com dimensão $q+1$: ele inclui a nova variável latente desconhecida.

Nesse caso, o vetor das variáveis observáveis é calculado a partir de uma nova matriz constante \mathbf{K} , de colunas independentes formadas pelas fontes de variação conhecidas, acrescidas de fontes de variação ainda não identificadas.

Da figura 4, verifica-se a seguinte equação:

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{C}\hat{\mathbf{d}}\|^2$$

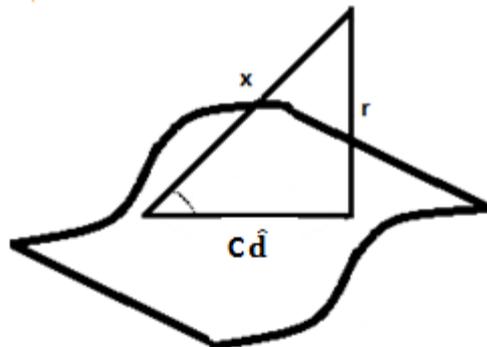


Figura 4 – Composição do vetor resíduo

Lembrando que $\mathbf{x} = \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{e}$ e $\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{C}^T\mathbf{x}$, vem:

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x} - (\mathbf{C}\mathbf{C}^T\mathbf{x})^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T\mathbf{x})$$

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{C}^T\mathbf{x}$$

Substituindo agora \mathbf{x} por $\mathbf{K}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{e}$, temos:

$$\|\mathbf{r}\|^2 = (\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T + \mathbf{e}^T)(\mathbf{K}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{e}) - (\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T + \mathbf{e}^T)(\mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{e})$$

$$\|\mathbf{r}\|^2 = (\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{e}^T \mathbf{e}) - (\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T \mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T \mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{e}^T \mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{e})$$

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T \mathbf{e} - \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T \mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T \mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{e} + \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T \mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{e}^T \mathbf{e} - \mathbf{e}^T \mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{e}$$

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \mathbf{e} + \mathbf{e}^T (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{e}^T \mathbf{e} - \mathbf{e}^T \mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{e}$$

onde:

$$\mathbf{e}^T (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \mathbf{e})^T.$$

Dessa forma,

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \mathbf{e} + [\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \mathbf{e}]^T + \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{e}^T \mathbf{e} - \mathbf{e}^T \mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{e}.$$

Como todas as parcelas são matrizes de tamanho 1

$$\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \mathbf{e} = [\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \mathbf{e}]^T, \text{ assim:}$$

$$\|\mathbf{r}\|^2 = 2\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \mathbf{e} + \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{e}^T \mathbf{e} - \mathbf{e}^T \mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{e}$$

Com isso, a norma quadrática dos resíduos equivale a:

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^T (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{C}^T) (2\mathbf{e} + \mathbf{K}\boldsymbol{\delta}) + \mathbf{e}^T \mathbf{e} - \mathbf{e}^T \mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{e}. \quad (9)$$

Caso não existam causas especiais atuando fora do hiperplano varrido pelas direções atribuíveis identificadas, a matriz \mathbf{K} será igual à matriz \mathbf{C} , permitindo assim, que a Equação (9) possa ser simplificada. Dessa forma, a norma quadrática dos resíduos se reduz a:

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{e} - \mathbf{e}^T \mathbf{C} \mathbf{C}^T \mathbf{e}. \quad (10)$$

Na prática, o monitoramento do vetor $\hat{\mathbf{d}}$ (estimador do vetor \mathbf{d} - vetor aleatório que contém as q variáveis latentes) deve ser realizado conjuntamente com o monitoramento da média da norma quadrática dos resíduos. Uma vez que o processo esteja operando apenas na presença de causas atribuíveis conhecidas, os gráficos nas variáveis latentes (gráficos das projeções $\hat{\mathbf{d}}$) são capazes de sinalizar alterações na variância do processo. Ao mesmo tempo, a média da norma quadrática dos resíduos permanecerá abaixo do limite de controle do seu gráfico, não sinalizando alterações na variância do processo em direções fora do subespaço das direções atribuíveis conhecidas. De outro lado, caso surja nova variável latente atuando no processo, a qual leve a alterações na sua variância em direções fora desse subespaço, o gráfico das projeções não sinalizará, neste caso,, a nova variável latente. Daí a necessidade de monitorar o processo com os dois gráficos, $\hat{\mathbf{d}}$ e $\|\mathbf{r}\|^2$, de forma simultânea.

3 Outros métodos para controle da variância

3.1 Variância amostral generalizada

A variância amostral generalizada é definida como o determinante da matriz de covariâncias teórica do processo (ALT, 1985). Periodicamente, extrai-se

uma amostra de tamanho $n > 1$ do vetor de variáveis observáveis, faz-se a normalização dos dados (MONTGOMERY, 2001), calcula-se a sua matriz de covariâncias amostral \mathbf{S} , e o seu determinante $|\mathbf{S}|$ é calculado e comparado com os limites de controle estabelecidos. A estatística da variância amostral generalizada é dada pelo determinante da Equação (11).

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^T \quad (11)$$

onde

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Existem diversas abordagens para tratar a questão do controle utilizando $|\mathbf{S}|$ (ver Ghute e Shirke (2008), Aparisi (1999) e Djauhari (2009)). Em uma dessas abordagens, Alt e Smith (1988) descrevem os limites de controle como:

$$\text{LIC} = \max(0; |\bar{\mathbf{S}}|(b_1 - c\sqrt{b_2})) \quad (12)$$

$$\text{LSC} = |\bar{\mathbf{S}}|(b_1 + c\sqrt{b_2}) \quad (13)$$

onde:

$$b_1 = \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{k=1}^p (n - k),$$

$$b_2 = b_1 \left\{ \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{k=1}^p (n - k + 2) - b_1 \right\} e$$

$c > 0$ é a probabilidade do erro do tipo I ou do ARL_0 desejado.

O limite inferior de controle é substituído por zero se o seu valor for negativo. Esses limites são definidos levando-se em consideração que a distribuição da Variância generalizada, sob a hipótese nula, segue uma distribuição normal.

Porém, Djauhari (2005) verificou que a distribuição normal não era válida para pequenos tamanhos amostrais, assim, propôs uma modificação na estatística da variância amostral generalizada melhorando sua efetividade através da

eliminação do viés apresentado no cálculo dos limites de controle. Os novos limites foram apresentados como:

$$LIC = |\bar{\mathbf{S}}| \left(\frac{b_1}{b_3} - c \sqrt{\frac{b_2}{b_3^2 + b_4}} \right) \text{ e } LSC = |\bar{\mathbf{S}}| \left(\frac{b_1}{b_3} + c \sqrt{\frac{b_2}{b_3^2 + b_4}} \right), \quad (14)$$

onde: $\bar{\mathbf{S}}$ é a matriz \mathbf{S} média (média aritmética das matrizes de covariâncias amostrais obtidas a partir de m amostras históricas de tamanho n do vetor de variáveis observáveis. $|\bar{\mathbf{S}}|$ é o determinante de $\bar{\mathbf{S}}$ (e, assim, um estimador do determinante da matriz de covariâncias da população),

$$b_3 = \frac{1}{\{m(n-1)\}^p} \prod_{k=1}^p \{m(n-1) - k + 1\},$$

$$b_4 = b_3 \left\{ \frac{1}{\{m(n-1)\}^p} \prod_{k=1}^p \{m(n-1) - k + 3\} - b_3 \right\},$$

onde p é o número de variáveis observáveis, n é o tamanho das amostras e m é o número de amostras iniciais.

A outra abordagem é proposta por Aparisi (1999). O autor analisou a distribuição da variância generalizada obtida por Anderson (1984), com o objetivo de determinar tabelas para essa distribuição e permitir os cálculos adequados para os limites de controle.

A distribuição de $|\mathbf{S}|$ dada por Anderson (1984) é geral e atende processos com p variáveis observáveis e amostras aleatórias de tamanho n .

$$\frac{|\mathbf{S}|(n-1)^p}{|\Sigma_0|} \equiv \prod_{i=1}^p \chi_{n-1}^2. \quad (15)$$

Para desenvolver a tabela para a distribuição dada pela Equação (15), Aparisi definiu uma nova variável, dada por:

$$J_{n,p} \equiv \frac{|\mathbf{S}|(n-1)^p}{|\Sigma_0|}.$$

Assim, para definir os limites de controle de $|\mathbf{S}|$, bastaria obter o quantil referente à taxa de alarme falso da nova variável $J_{n,p}$. Para gráficos com apenas o limite de controle superior a equação é dada por:

$$LSC = \frac{J_{n,p}^\alpha |\Sigma_0|}{(n-1)^p},$$

onde $J_{n,p}^\alpha$ é o quantil $(1 - \alpha)$ da distribuição de $J_{n,p}$ em controle.

Para gráficos com limites superior e inferior, a equação é dada por:

$$LSC = \frac{J_{n,p}^{\alpha/2} |\Sigma_0|}{(n-1)^p}$$

$$LIC = \frac{J_{n,p}^{1-\alpha/2} |\Sigma_0|}{(n-1)^p}$$

Aparisi (1999), com base nas equações obtidas para os limites de controle, desenvolveu tabelas com diversos valores para $J_{n,p}^\alpha$, $J_{n,p}^{\alpha/2}$ e $J_{n,p}^{1-\alpha/2}$, com o intuito de facilitar a obtenção dos limites de controle.

3.2

Máxima variância amostral

Costa e Machado (2009) propuseram monitorar a variabilidade do processo pelo maior valor das variâncias amostrais padronizadas. Periodicamente, extrai-se uma amostra de tamanho $n > 1$ do vetor de variáveis e calculam-se as variâncias amostrais de cada uma das p variáveis separadamente, ou seja, $\{S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2\}$. A estatística VMAX é dada por:

$$VMAX = \max\{S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2\} \quad (16)$$

onde,

$$S_i = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij}^2}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad \text{sendo } x_{ij} = \frac{(X_{ij} - \mu_i)}{\sigma_i}.$$

Se a estatística VMAX apresentar valor maior que o limite superior de controle, isso é considerado sinal de que a dispersão de uma ou mais das variáveis aumentou.

Costa e Machado (2009) apresentaram equações para o cálculo do NMA (número médio de amostras até o sinal) para os casos bivariado e trivariado. Para o caso trivariado, os autores mostraram que a validade da equação requer independência entre duas das três variáveis em estudo. Em toda generalidade, não sendo satisfeita essa condição, os valores calculados serão aproximações do valor

real. Segundo os pesquisadores, o erro de aproximação é pequeno e não afeta, em termos práticos, o resultado. A equação para o cálculo do limite de controle pode ainda ser estendida para o caso de $p > 3$, tornando-se, porém, mais complexa.

Com uso das equações para cálculo do NMA, para o caso de processo em controle, o limite superior de controle para o gráfico VMAX que fornece o NMA_0 (NMA sob controle) desejado é obtido por busca.

Uma vez ocorrido um sinal, considera-se que todas as variáveis, cujas variâncias amostrais excederem os limites de controle, sofreram um aumento em sua dispersão.

O gráfico de VMAX mostrou-se mais eficiente, para monitoramento da matriz de covariâncias, do que o gráfico da variância amostral generalizada $|\mathbf{S}|$, em todos os casos analisados por Costa e Machado (2009).

3.3

Somatório de variâncias

Recentemente, Hao *et al.* (2008) propuseram monitorar a variabilidade de processos multivariados através de gráficos de projeção denominados gráficos VS (“*variances summation*”, ou seja, somatório de variâncias). Em seu trabalho os autores compararam o desempenho do gráfico VS com o gráfico do determinante da variância do vetor de variáveis observáveis $|\mathbf{S}_x|$, e com o gráfico do determinante da variância das projeções que denominaram gráfico $|\mathbf{S}_f|$.

Hao *et al.* (2008) discutiram a aplicação das projeções para monitorar a variabilidade de processos e concluíram que, nos casos em que a matriz \mathbf{C} não tenha posto coluna completo a estatística $|\mathbf{S}_f|$ não tem como ser calculada. Assim, os autores desenvolveram nova estatística menos restritiva sobre o modelo apresentado na Equação (1), a qual se mostrou satisfatória na detecção de alterações do processo, quando comparada com as estatísticas concorrentes analisadas ($|\mathbf{S}_x|$ e $|\mathbf{S}_f|$).

O gráfico $|\mathbf{S}_{\hat{f}}|$ utiliza uma projeção diferente da projeção das variáveis observáveis no espaço coluna da matriz \mathbf{C} . Segundo os autores, a nova projeção proposta procura tirar o máximo proveito da relação variacional fornecida pelo modelo do processo. Nesse caso, é estimado o somatório das variâncias dos elementos do vetor \mathbf{d} , sem que seja preciso ter o conhecimento de cada um de seus elementos.

A matriz que define a relação entre o vetor \mathbf{x} e o vetor \mathbf{d} é dada por:

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = \mathbf{C} \Sigma_{\mathbf{d}} \mathbf{C}^T + \Sigma_e = \sum_{i=1}^{p+1} \sigma_i^2 \mathbf{V}_i$$

e pode ser transformada em

$$\begin{aligned} \text{vec}(\Sigma_{\mathbf{x}}) &= \text{vec}(\mathbf{C} \Sigma_{\mathbf{d}} \mathbf{C}^T + \Sigma_e) = \text{vec}(\sum_{i=1}^{p+1} \sigma_i^2 \mathbf{V}_i) \\ \text{vec}(\Sigma_{\mathbf{x}}) &= \Pi(\mathbf{C})\boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (17)$$

onde

$\text{vec}(\cdot)$ é o operador que empilha as colunas de uma matriz como um vetor (Schott (2005)),

$\boldsymbol{\sigma}$ é dado por $(\sigma_1^2 \mid \dots \mid \sigma_p^2 \mid \sigma_{p+1}^2)^T$,

$\mathbf{V}_i = \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i^T$ para $i = 1, \dots, p$ com \mathbf{c}_i sendo i a i -ésima coluna de \mathbf{C} e $\mathbf{V}_{p+1} = \mathbf{I}_q$,

\mathbf{I}_q é uma matriz identidade $q \times q$.

A Equação (17) fornece nova direção de projeção para monitorar alterações na variância do processo. A proposta dos autores é projetar os elementos de $\Sigma_{\mathbf{x}}$ no espaço coluna de $\Pi(\mathbf{C})$. A estatística VS é dada por:

$$VS \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{1}_{p+1}^T [\Pi(\mathbf{C})]^+ \text{vec}(\mathbf{S}_{\mathbf{x}}) \quad (18)$$

onde

$\mathbf{1}_{p+1}$ é um vetor coluna dos quais os elementos de $p+1$ são todos 1,

$[\Pi(\mathbf{C})]^+$ é a inversa de Moore-Penrose de $\Pi(\mathbf{C})$,

$\Pi(\cdot)$ é o operador definido como $\Pi: \mathbb{R}^{q \times p} \rightarrow \mathbb{R}^{q^2 \times (p+1)}$,

$\mathbf{C} \rightarrow (\text{vec}(\mathbf{V}_1) \mid \dots \mid \text{vec}(\mathbf{V}_p) \mid \text{vec}(\mathbf{I}_q))$.

A estatística apresentada na Equação (18), caso o tamanho das amostras seja na ordem das centenas, segue uma distribuição assintótica normal. Para pequenos tamanhos de amostra, a estatística VS deixa de ser aproximada pela distribuição normal. Com isso, limites de controle de três sigmas podem ser utilizados apenas para tamanhos de amostras significativos. Nesse caso, os limites são dados por:

$$\text{LSC} = E(\text{VS}) + 3\sqrt{\text{VAR}(\text{VS})}$$

$$\text{LIC} = \max\{E(\text{VS}) - 3\sqrt{\text{VAR}(\text{VS})}, 0\}. \quad (19)$$

Para pequenos tamanhos de amostras a taxa de alarme falso, quando utilizados limites de três sigmas, é superior a 0,0027, e nesses casos é recomendado obter os limites de controle por simulação.

4

Aplicação das projeções \hat{d} em um processo simulado

Esta seção descreve o estudo de caso utilizado para a aplicação do esquema proposto e dos esquemas VMAX, Det_S e VS, além de apresentar a

plataforma de desenvolvimento dos algoritmos necessários à simulação, bem como o passo a passo do desenvolvimento destes algoritmos.

4.1

Apresentação do Estudo de Caso

Para ilustrar a aplicação do procedimento proposto, bem como realizar uma análise de desempenho deste último na sinalização de aumentos na dispersão das variáveis latentes, será utilizado exemplo semelhante ao de montagem de portas traseiras em automóveis, apresentado em Maranhão e Epprecht (2011). O exemplo consiste no processo automático de colocação de vidro traseiro em automóveis de passeio. Ao longo do processo de ajuste do vidro na parte traseira do automóvel, este vidro pode sofrer uma rotação ou um deslocamento sobre a estrutura metálica do carro, ou mesmo os dois movimentos em conjunto; esse problema faz com que as folgas laterais entre o vidro e a estrutura metálica sofram variações indesejadas ao longo do contorno do vidro. As Figuras (5a) e (5b) mostram os pontos de ajuste do vidro na carcaça do automóvel.

Determinar se a variação da folga no contorno do vidro se deu em função de uma rotação ou/e deslocamento, ou de outras ações não conhecidas, não é tarefa fácil; nestes casos os operadores do processo devem se empenhar no controle e na identificação das fontes atribuíveis de variação.

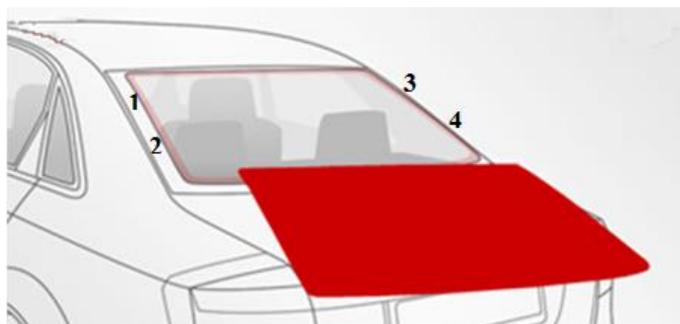


Figura 5a – Ajuste do vidro traseiro

Fonte: Adaptado de www.carglass.com.br

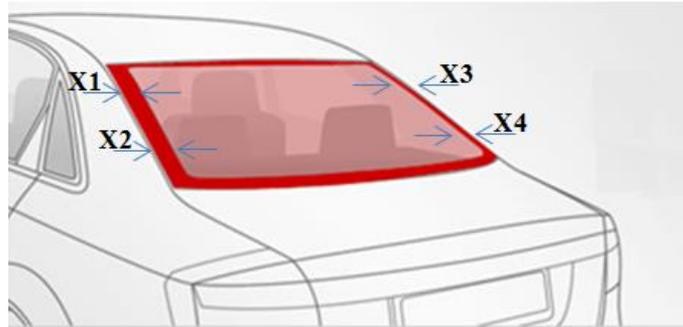


Figura 5b – Folgas de ajuste do vidro traseiro

Fonte: Adaptado de www.carglass.com.br

Durante o processo de ajuste entre o vidro traseiro, representado na Figura (5a) pelo retângulo menor – interno, e a carroceria (retângulo maior – externo), diferenças da posição do vidro em relação à posição especificada (posição nominal de colocação) podem ser representadas por variáveis latentes, associadas a certos padrões de desvio (como rotação ou deslocamento horizontal), as quais não são as variáveis diretamente observadas (estas, no caso, são folgas entre o vidro e a carroceria, medidas em pontos específicos).

Entre a carroceria e o vidro são realizadas medições de folgas em quatro posições específicas, aqui representadas pelas letras A, B, C e D (carroceria – parte externa) e 1, 2, 3 e 4 (vidro – parte interna). As folgas $\overline{A1}$, $\overline{B2}$, $\overline{C3}$ e $\overline{D4}$ são medidas pelas distâncias horizontais dos pontos externos e internos; dessa forma, as folgas obtidas medem as variações sofridas pelo vidro na direção horizontal (esquerda e direita).

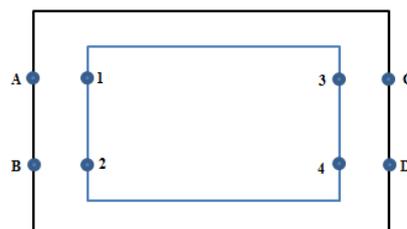


Figura 6 – Posições de medida das folgas

Assim, as variações nas medidas das folgas são provocadas por variações nos padrões de montagem, por exemplo: um deslocamento, uma rotação, uma translação lateral, uma torção, ou mesmo uma contração/dilatação no vidro traseiro. No exemplo de Maranhão e Epprecht (2011), por simplificação, os autores utilizaram apenas os padrões de variação de montagem associados à rotação, ao deslocamento e à contração.

A Figura (7) apresenta o padrão de variação associado à rotação; a Figura (8) ao deslocamento; e a Figura (9) à contração/dilatação.

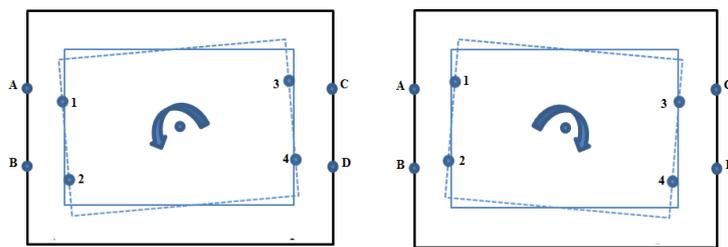


Figura 7 – Rotação positiva e negativa

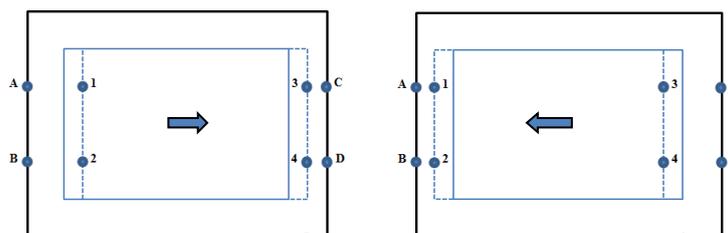


Figura 8 – Deslocamento lateral positivo e negativo

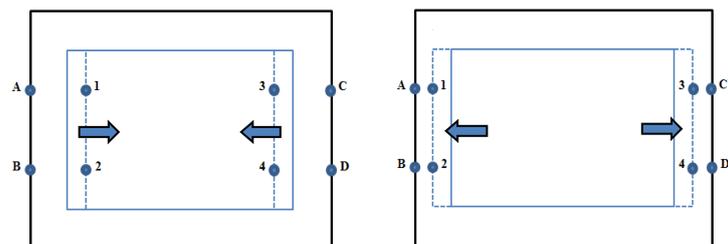


Figura 9 – Contração/dilatação

A cada uma das variações essenciais do processo corresponde a uma direção atribuível específica de variação do vetor de variáveis observáveis \mathbf{x} . Por exemplo, um deslocamento do vidro para a direita em relação à posição central (nominal) faz os valores das folgas $\overline{A1}$ e $\overline{B2}$ (variáveis x_1 and x_2) aumentarem e os valores das folgas $\overline{C3}$ e $\overline{D4}$ (variáveis x_3 and x_4) diminuírem em igual medida (ver Figura (6)) em relação ao seu valor nominal

Na rotação as variações nas variáveis observáveis não são lineares, pois dependem das relações trigonométricas associadas ao ângulo de rotação. Com uma pequena perda de informação, pode-se generalizar o modelo para uma variação linear, levando-se em conta apenas pequenos ângulos de rotação.

Uma rotação da porta em torno de seu ponto central no sentido anti-horário (veja a Figura (7)) faz os valores das folgas $\overline{A1}$ e $\overline{D4}$ diminuírem e os valores das folgas $\overline{B2}$ e $\overline{C3}$ aumentarem em igual medida; uma rotação no sentido horário tem o efeito simétrico.

No caso de uma contração da porta, os valores de todas folgas $\overline{A1}$, $\overline{B2}$, $\overline{C3}$ e $\overline{D4}$ aumentam; no caso de uma dilatação, todos diminuem.

As variáveis observáveis x_1, x_2, x_3, x_4 são definidas aqui como os desvios (diferenças) em relação ao valor nominal das folgas medidas em $\overline{A1}$, $\overline{B2}$, $\overline{C3}$ e $\overline{D4}$.

Em termos do modelo linear apresentado na Equação (1), uma rotação no sentido anti-horário que provoque simultaneamente uma diferença de d unidades para menos nas folgas nos pontos $\overline{A1}$ e $\overline{D4}$ em relação ao valor nominal e uma correspondente diferença de d unidades para mais das folgas nos pontos $\overline{B2}$ e $\overline{C3}$ em relação ao valor nominal faz com que o vetor de variáveis observáveis se desloque $2d$ unidades na direção do vetor unitário $[-0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ -0.5]^T$. Raciocínio análogo se aplica ao caso do deslocamento e da contração/dilatação. Como um resultado, a matriz dos padrões de variação é:

$$\mathbf{C} = 0,5 \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Nesse caso específico, as Equações (1) e (3) tomam a forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0,5 \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_T \\ d_D \\ d_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{d}_T \\ \hat{d}_D \\ \hat{d}_C \end{bmatrix} = 0,5 \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Aqui os elementos do vetor \mathbf{d} estão indexados com letras, indicando a rotação central da porta em relação à carroceria pela letra T, o seu deslocamento horizontal pela letra D, e a contração ou dilatação da porta pela letra C.

4.2

Monitoramento da dispersão no esquema proposto

Conforme caracterizado anteriormente, as projeções $\hat{\mathbf{d}}$ são as projeções do vetor \mathbf{x} no subespaço definido pelas direções atribuíveis. Desta forma, gráficos de controle nessas projeções seriam capazes de detectar, por meio de alterações na dispersão destas últimas, aumento na variabilidade das variáveis observáveis ao longo de uma ou mais direções atribuíveis.

Assim, como já foi visto, Maranhão e Epprecht (2011) mostraram a viabilidade da aplicação das projeções $\hat{\mathbf{d}}$ em monitorar mudanças na média do processo nas direções atribuíveis. A Tese, seguindo as pressuposições de que as causas especiais do processo atuam nas direções atribuíveis associadas às

variações não observáveis, mostrará que gráficos nessas projeções também se aplicam ao monitoramento de mudanças na dispersão do processo nas direções atribuíveis.

Existem diversas possibilidades de controlar a dispersão de um processo multivariado (Yeh et al (2006)) para um aprofundamento no tema); uma delas é o controle da dispersão por gráficos Shewhart aplicados ao desvio-padrão S nas projeções $\hat{\mathbf{d}}$. Esse tipo de gráfico será adotado nessa Tese e seu desempenho comparado com outros gráficos concorrentes, tais como Variância amostral generalizada, Máxima variância amostral e Somatório de variâncias.

Para o monitoramento do desvio-padrão S utilizando o esquema proposto, sabe-se que os parâmetros estatísticos do processo em controle são desconhecidos, mas podem ser estimados a partir de amostras obtidas quando o processo, de alguma forma, for considerado como em controle. Dessa forma, o desvio-padrão do processo, por ser desconhecido, deve ser estimado, possibilitando assim, calcular e estimar os limites de controle. Para o cálculo dos limites superior e inferior deve-se estimar o desvio-padrão $\hat{\sigma}$ a partir de σ estabelecido com dados históricos do processo em controle. Os limites superior e inferior para o gráfico de Shewhart, no monitoramento do desvio-padrão S são dados da seguinte forma:

Periodicamente, retira-se uma amostra de tamanho $n > 1$ do vetor de variáveis observáveis \mathbf{x} , e projetam-se esses n vetores em cada uma das direções atribuíveis, pela Equação (3). Obtêm-se, assim, n vetores $\hat{\mathbf{d}}$. Calculam-se então os q desvios-padrão amostrais de cada elemento de $\hat{\mathbf{d}}$:

$$S_j = \sqrt{\frac{(\hat{\mathbf{d}}_{ij} - \bar{\hat{\mathbf{d}}}_j)^2}{n-1}}; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (23)$$

onde

$$\bar{\hat{\mathbf{d}}}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{d}}_{ij} \quad (24)$$

é a média amostral das n estimativas de $\hat{\mathbf{d}}_j$ (projeções de \mathbf{x} na j -ésima direção atribuível) na amostra.

Para cada direção atribuível j , os valores de S_j nas amostras sucessivas são lançados em um gráfico de S unilateral (já que o propósito é detectar rapidamente aumentos na variância de \mathbf{d}_j) com limite superior para uma probabilidade de alarme falso α dado por

$$LSC_j = S_{j \text{ pooled}} \sqrt{\frac{\chi_{n-1, \alpha}^2}{n-1}} \quad (25)$$

onde $S_{j \text{ pooled}}$ é o desvio-padrão combinado dos m valores de S_j ($S_{j1}, S_{j2}, \dots, S_{jm}$) em m amostras iniciais do processo suposto em controle, ou seja,

$$S_{j \text{ pooled}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^m S_{jk}^2}{m}}, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (26)$$

e constitui uma estimativa do desvio-padrão de $\hat{\mathbf{d}}_j$. De fato, como o desvio-padrão de $\hat{\mathbf{d}}_j$ é desconhecido, precisa ser estimado. A Equação (6) mostra que, mesmo no caso em que a matriz de variância-covariância de $\hat{\mathbf{d}}$ é diagonal, ela é a soma da matriz de variância-covariância dos ruídos \mathbf{e} (diagonal que, no caso restrito de esses ruídos deverem-se apenas ao sistema de medição, pode ser estimada por experimentos específicos) com a matriz de variância-covariância de \mathbf{d} ; esta última não pode ser estimada diretamente. A solução é estimar diretamente as variâncias (e os desvios-padrão) dos q elementos de \mathbf{d} . Outros estimadores poderiam ser usados (como \bar{S}), mas propõe-se usar o desvio-padrão combinado por ser mais eficiente (Mahmoud et al., 2010).

Note-se, ainda, que, para ajustar a probabilidade de alarme falso conjunta dos q gráficos em S_j a um valor α_{conj} especificado, a probabilidade de alarme falso em cada gráfico individual (a ser utilizada na determinação dos limites de controle para os gráficos, pela Equação (25)), deve ser calculada por

$$\alpha_{\text{indiv}} = 1 - (1 - \alpha_{\text{conj}})^{1/q}. \quad (27)$$

4.3

Controle da dispersão no esquema proposto

A análise de desempenho foi realizada por simulação do usual procedimento em duas fases de Controle Estatístico do Processo – a Fase I, de estimação de parâmetros e determinação de limites de controle; e a Fase II, de monitoramento do processo usando os limites determinados na Fase I. Para simular a Fase I, geraram-se dados que simulavam o processo em controle para estimar os limites de todos os esquemas de controle aqui analisados. Para a Fase II, geraram-se dados que simulavam aumentos na dispersão das variáveis latentes.

Os dados do processo foram obtidos com a utilização de rotinas desenvolvidas no software MATLAB. Foram comparados 4 esquemas de controle: o conjunto de gráficos de S nos desvios-padrão amostrais das projeções \hat{d}_j ; o gráfico da variância amostral generalizada (denotado aqui por Det_S ou $|\bar{S}|$); o gráfico da máxima variância amostral (VMAX); e o gráfico do somatório de variâncias (VS). Os dados também foram utilizados para gerar gráficos na média da norma quadrática do resíduo, a fim de capturar desvios em direções assinaláveis ainda não conhecidas.

Três rotinas de programação MATLAB foram desenvolvidas para a simulação do processo e análise de desempenho dos gráficos propostos e concorrentes, a saber:

Fase I: Nesta fase considera-se o processo em controle para estimar os limites de controle de todos os gráficos propostos e concorrentes;

Fase I teste: Esta fase é utilizada para verificação dos limites obtidos na Fase I, ou seja, verificar se os limites foram bem estimados. Para tanto, novo processo em controle é simulado, e verifica-se se o número de alarmes falsos está dentro do previsto;

Fase II: Nesta fase simula-se o desempenho de cada um dos gráficos para efeito de comparação do desempenho de cada uma das estatísticas;

O procedimento de cálculo das estatísticas citadas na Fase I, na Fase I teste e na Fase II consiste na execução de uma sequência com vários passos, descritos a seguir:

A rotina Fase I é iniciada com a definição dos valores dos parâmetros: tamanho da amostra; número de amostras; e os desvios-padrão das fontes atribuíveis e do erro. Após definidos os parâmetros em controle, a rotina chama a função principal (*generator*), que recebe estes parâmetros e calcula todas as estatísticas envolvidas na comparação de desempenho. Na continuidade, a rotina Fase I calcula os limites de controle e chama a Fase I teste.

A função *generator* calcula os $q*n*m$ valores aleatórios de T (rotação), D (deslocamento), C (contração ou dilatação) e os $p*n*m$ valores aleatórios para representar os ruídos aleatórios, com distribuição normal de média zero e desvio-padrão definido na entrada da função (parâmetros passados das rotinas Fase I, Fase I teste e Fase II). O vetor \mathbf{d} é criado, e junto com a matriz \mathbf{C} é utilizado nos cálculos das variáveis observáveis \mathbf{x} ; das projeções $\hat{\mathbf{d}}$; do vetor resíduo \mathbf{r} ; e da média da norma quadrática dos resíduos $\overline{\|\mathbf{r}\|^2}$. Os valores simulados são então agrupados em amostras sequenciais de tamanho n para o cálculo amostral das estatísticas.

A rotina Fase I teste tem como parâmetro de entrada todos os limites de controle calculados na Fase I. Os contadores de alarmes são zerados e ocorre a passagem do tamanho n da amostra, do número de amostras m , e dos desvios-padrão em controle dos elementos do vetor \mathbf{d} e do erro aleatório. Em seguida, inicia-se um *loop*, e a cada passagem a função *generator* é chamada. As estatísticas devolvidas pela função *generator* são comparadas com os limites em controle e inicia-se a contagem dos alarmes falsos. Os alarmes obtidos são armazenados e ao final do *loop* é calculado um valor médio, que será computado como os alarmes falsos do gráfico de cada estatística. O número de alarmes é então disponibilizado na tela do MATLAB para uma verificação visual. Se não estiverem bem estimados, a rotina será então abortada, e será procedida uma verificação nos cálculos; caso contrário, a rotina é continuada chamando a Fase II para obter as quantidades de alarmes verdadeiros de cada estatística avaliada.

Assim como na Fase I teste, a Fase II tem como entrada todos os limites de controle calculados na Fase I. Essa fase acessa a matriz de uma planilha *excel* que contém todas as combinações de desvios-padrão indicativas de que o processo está fora de controle, em função da presença de causas atribuíveis. Desse ponto em diante, a rotina Fase II comporta-se como a rotina Fase I teste, com exceção do cálculo dos contadores de alarmes verdadeiros em conjunto nas projeções $\hat{\mathbf{d}}$. Para cada caso (combinação de desvios-padrão), o número de alarmes verdadeiros computados é utilizado para calcular a probabilidade de sinal em cada estatística avaliada. As probabilidades de sinais são então gravadas na mesma planilha *excel*.

As estatísticas foram computadas e comparadas com os limites em controle; assim, com o processo fora de controle, espera-se para os gráficos de Shewhart, que a estatística com o maior número de alarmes tenha desempenho superior ao das outras.

Para que os quatro esquemas de controle fossem comparados em igualdade de condições estabeleceu-se a mesma probabilidade de alarme falso para cada um dos esquemas. Assim, para os gráficos de S das projeções $\hat{\mathbf{d}}_j$, os limites de controle foram calculados pelas Equações (16) e (18), a fim de fornecer uma probabilidade de alarme falso em cada gráfico individual (para cada projeção $\hat{\mathbf{d}}_j$), que resulte em uma probabilidade de alarmes falsos conjunta igual ao desejado (a mesma das outras estatísticas). Já os limites de controle dos gráficos de $|\bar{S}|$, de VMAX e de VS foram obtidos pelo quantil empírico das amostras da Fase I, a fim de obter a probabilidade de alarme falso igual ao estabelecido. Os limites de controle para $|\bar{S}|$ e VMAX foram definidos desta forma em virtude da não-trivialidade dos cálculos e das respostas aproximadas para o NMA. Por sua vez, o limite de VS também foi obtido pelo quantil empírico em razão de a estatística não seguir uma distribuição normal para pequenos tamanhos de amostra. Essa Tese utilizará apenas dois tamanhos de amostras, consideradas pequenas para utilização dos limites propostos na Equação (19).

Para cada ponto amostral (uma realização do vetor \mathbf{d} e uma realização do vetor \mathbf{e}) obtém-se uma realização do vetor \mathbf{x} pela Equação (21). Com essa realização, simula-se a aplicação de cada um dos procedimentos de controle. Os

limites dos esquemas de controle foram determinados conforme o procedimento a seguir:

Procedimento para o cálculo dos limites de controle simulados

- Gerar os valores dos parâmetros: o número de variáveis observáveis p ; o valor da taxa de probabilidade de alarmes falsos α ; o tamanho das amostras n ; o número de amostras m ; e o número de replicações R ;
- Gerar os $q \cdot n \cdot m$ números pseudo-aleatórios $N(0,1)$ para representar o vetor das variáveis não observáveis;
- Gerar os $p \cdot n \cdot m$ números pseudo-aleatórios com média zero e desvio-padrão dp para representar o vetor de ruídos aleatórios;
- Calcular os valores dos elementos do vetor de variáveis observáveis, pela equação (1);
- Agrupar os valores gerados em m grupos de tamanho n ;
- Calcular V_{MAX} , Det_S e VS para esses grupos;
- Ordenar os valores obtidos nos grupos;
- Calcular o quantil $(1-\alpha)$ dos valores calculados V_{MAX} , Det_S e VS ;
- Repetir todos os passos anteriores R vezes;
- Calcular a média dos R valores dos quantis calculados;
- Tornar a média dos quantis calculados igual ao limite de controle.

Os valores de $\overline{\|\mathbf{r}\|^2}$ nas amostras sucessivas são plotados em um gráfico unilateral (apenas com o limite superior de controle). A determinação do limite de controle para esse gráfico apresenta um problema, uma vez que os resultados existentes para a distribuição de probabilidade de $\|\mathbf{r}\|^2$ são apenas aproximações

da verdadeira distribuição (ver Maranhão (2012)). Com isso, duas possibilidades de determinação do limite foram analisadas: um quantil empírico da distribuição de $\|\mathbf{r}\|^2$; e um limite unilateral de Shewhart da distribuição normal para a transformação Box-Cox de $\|\mathbf{r}\|^2$. A Figura (10) mostra o gráfico de probabilidade normal dessa transformação para dados simulados em controle. Pode-se ver que o gráfico apresenta um ajuste adequado à utilização dessa transformação como alternativa para a normalização dos dados de $\|\mathbf{r}\|^2$ (verifica-se também que o ajuste, não muito bom, nos quantis mais baixos não importa, uma vez que o gráfico apresenta apenas o limite superior).

A simulação do gráfico que utiliza os dados originais de $\|\mathbf{r}\|^2$, com limite de controle obtido com o quantil empírico e a simulação do gráfico com os dados transformados (Box-Cox), com o limite de controle (quantil teórico) calculado por $LSC = \bar{X}(\|\mathbf{r}\|^2) + 2,78S(\|\mathbf{r}\|^2)$ – para uma probabilidade de alarme falso de 0,0027 – apresentaram probabilidades de sinal idênticas (até três ou quatro algarismos significativos) com dados fora de controle. Dessa forma, optou-se, nesta Tese, pela utilização dos limites calculados com os dados normalizados pela transformação Box-Cox. O valor ótimo do parâmetro λ para a transformação, assim como as estimativas dos parâmetros da distribuição dos valores transformados, devem ser determinados a partir dos dados históricos do processo em controle.

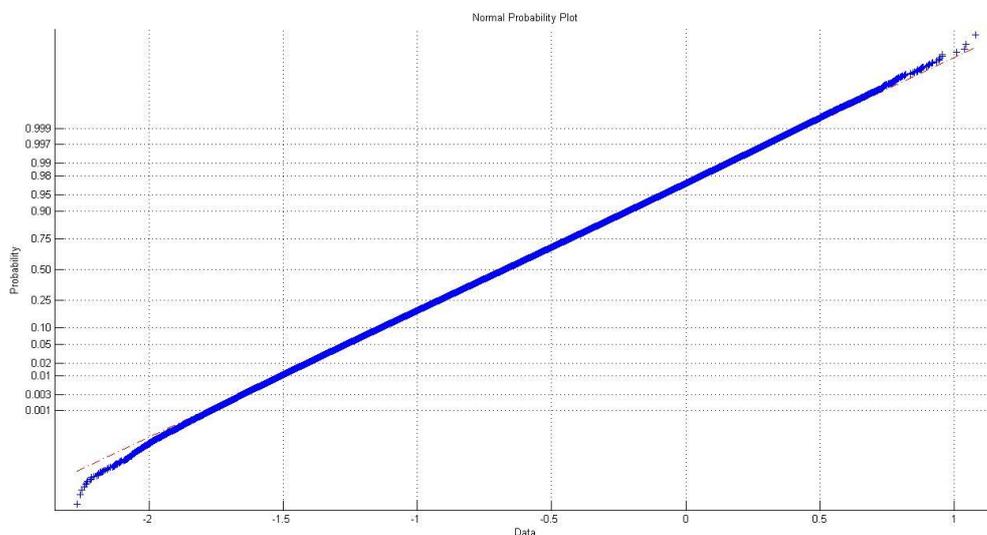


Figura 10 – Gráfico de Probabilidade Normal

5 Desempenho do esquema proposto

5.1

Considerações iniciais

Quando um ponto extrapola os limites de controle estabelecidos em um gráfico, ocorre um sinal. Esse sinal é denominado alarme; pode ser falso quando o ponto cai fora dos limites de controle em razão da aleatoriedade do processo em controle, e pode ser verdadeiro se o ponto cair fora dos limites de controle em virtude de uma mudança no processo, conseqüente à presença de causas atribuíveis.

O número de alarmes é uma ferramenta bastante utilizada para avaliar o desempenho dos gráficos de controle, pois fornece uma medida bastante confiável do andamento do processo. Para os gráficos de Shewhart, é usual medir o desempenho do processo pela probabilidade de ocorrência de alarmes verdadeiros nas situações em que o processo se apresenta fora de controle estatístico – é esta a medida de desempenho adotada aqui. Em virtude da dificuldade de calcular essa probabilidade analiticamente, recorreu-se à simulação. Dessa forma, a simulação do processo ocorreu em duas fases distintas de Controle Estatístico do Processo – a Fase I, de estimação de parâmetros e determinação de limites de controle, e a Fase II, de monitoramento do processo usando os limites determinados na Fase I.

A probabilidade de sinal foi estimada pela razão entre o número total de alarmes e o número total de amostras simuladas em cada caso.

No caso dos gráficos nas projeções, foi considerada a probabilidade de sinal em *pelo menos um* dos gráficos, bem como em cada gráfico individualmente (o que fornece informação da capacidade do esquema de identificar automaticamente a causa especial, ou pelo menos a variável latente que foi afetada).

Aqui, na simulação da Fase I, foram geradas 3704 amostras pseudo-aleatórias $\sim N3(\mathbf{0}, \Sigma_d)$ do vetor \mathbf{d} , de tamanhos 5 e 15, assim como 3704 amostras pseudo-aleatórias do vetor \mathbf{e} de erros aleatórios, $N4(\mathbf{0}, \Sigma_e)$, com $\Sigma_d = \mathbf{I}_{2 \times 2}$ e $\Sigma_e = \sigma^2 \mathbf{I}_{4 \times 4}$. Esse número de amostras não é realista em muitos casos práticos (embora possa sê-lo em ambientes com coleta de dados altamente automatizada e em grande frequência, o que vem se tornando cada vez mais comum), mas o propósito aqui é a comparação do desempenho dos gráficos. Com este objetivo, foi decidido utilizar um número de amostras iniciais (da Fase I) que garantisse boa precisão na determinação dos limites (levando em conta que, no caso de menor número de amostras iniciais, todos os esquemas propostos sofreriam, da mesma forma). Para simular a Fase II, foram geradas 3704000 amostras de tamanhos 5 e 15.

Com o objetivo de analisar o desempenho do esquema proposto no sentido de sinalizar aumentos na variabilidade do processo em uma direção atribuível ainda não identificada (sem indicação no subespaço das direções atribuíveis conhecidas) pelos técnicos do processo, foram realizadas inicialmente simulações em apenas duas direções atribuíveis: aquelas associadas ao deslocamento lateral e à rotação da porta (ver Figuras (6) e (7)). A contração/dilatação, apresentada na Figura (8) foi reservada como uma “nova” fonte de variação para simular a ocorrência de uma nova causa especial. Nesse caso, a sinalização foi verificada na média da norma quadrática do vetor resíduo (com aplicação da transformação Box-Cox).

Assim, para a análise do desempenho do esquema proposto e de seus concorrentes (Det(S), VMAX e VS), os dados foram gerados usando o vetor \mathbf{d} igual a $[\mathbf{d}_T \quad \mathbf{d}_D]^T$, e uma matriz \mathbf{C} de dimensão 4×2 , correspondendo à matriz da Equação (10) sem a última coluna. Esse procedimento foi empregado tanto na simulação da Fase I quanto na da Fase II. Já para a análise do desempenho do gráfico na média da norma quadrática dos resíduos, para simular a ocorrência da nova causa especial contração/dilatação, os dados foram gerados pela Equação (20), com a matriz \mathbf{C} completa (de dimensão 4×3) e com o vetor \mathbf{d} de dimensão 3; neste caso, as variâncias dos dois primeiros elementos de \mathbf{d} (i.e., de \mathbf{d}_T e de \mathbf{d}_D) foram mantidas em seus valores em controle. Em todos os casos, porém, a matriz

\mathbf{c}^T utilizada para calcular $\hat{\mathbf{d}}$ (neste caso um vetor de dois elementos apenas) foi uma matriz de dimensão 2×4 , pois os técnicos do processo conhecem apenas duas direções atribuíveis. Desta forma, $\hat{\mathbf{d}}$ foi calculado como

$$\begin{bmatrix} \hat{d}_T \\ \hat{d}_D \end{bmatrix} = 0.5 \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

A seguir serão apresentados os resultados obtidos com o esquema proposto (gráficos nas projeções) e com os esquemas concorrentes: VMAX, Det_S e VS. Os resultados com a Média da Norma Quadrática dos Resíduos serão também apresentados para cada um dos casos.

5.2

Resultados obtidos

As simulações foram realizadas conforme os parâmetros apresentados no Quadro I, a saber: valores para o desvio-padrão do erro σ_e em controle (0,1; 0,5; 1,0); probabilidade de alarme falso α (0,0027; 0,0500; 0,0100); número de variáveis observáveis \mathbf{x} (4; 8); número de direções atribuíveis do vetor \mathbf{d} ; direção associada à variável latente deslocamento D; direções associadas às variáveis latentes rotação T e deslocamento D; direções associadas às variáveis latentes rotação T e deslocamento D, e à uma variável latente adicional contração C para a análise dos resíduos.

Com esses parâmetros foram geradas corridas de simulação para todas as combinações de 3 valores distintos de probabilidades de alarme falso, 3 valores de desvio-padrão do erro aleatório em controle e 5 direções atribuíveis, totalizando 45 combinações para cada tamanho de amostra (5 e 15), conforme mostra o Quadro (1).

Quadro 1 – Combinações geradas na simulação para cada tamanho de amostra

Direção atribuível	Quantidade de variáveis observáveis do vetor x	σ_e em controle			Probabilidade de alarme falso		
		0,1	0,5	1,0	0,0027	0,005	0,01
D	4	0,1	0,5	1,0	0,0027	0,005	0,01
TD	4	0,1	0,5	1,0	0,0027	0,005	0,01
TD	8	0,1	0,5	1,0	0,0027	0,005	0,01
TD	4	0,1*	0,5*	1,0*	0,0027	0,005	0,01
TD/C (resíduo)	4	0,1	0,5	1,0	0,0027	0,005	0,01

* valores em controle apenas na Fase I

Para cada direção atribuível associada à variável latente mostrada no Quadro (1), estarão presentes no corpo da Tese apenas os resultados obtidos com tamanho de amostra igual a 5. Os resultados das outras combinações geradas para o tamanho de amostra igual a 15 serão apresentados no Apêndice (A).

No desempenho das estatísticas de controle a simples contagem dos alarmes verdadeiros individuais nas projeções \hat{d} não é parâmetro de comparação, pois os gráficos nas projeções \hat{d} podem sinalizar conjuntamente, mascarando o resultado e o poder do gráfico. Desta forma, considerou-se também a contagem de alarmes verdadeiros em *pelo menos um* dos gráficos nas projeções \hat{d} .

Para a fase I, em todas as simulações, não houve diferença significativa nos valores das probabilidades de alarme falso do esquema proposto e dos esquemas concorrentes — o que era esperado, já que os esquemas foram ajustados para uma mesma probabilidade de alarme falso.

Em cada linha das tabelas a seguir, a probabilidade máxima de sinal é marcada em **negrito**, o que indica o esquema mais eficaz para dada combinação de parâmetros.

5.2.1

Uma única direção atribuível e quatro variáveis observáveis

Esse caso ocorre quando em um processo se conhece apenas uma variável latente atuando em quatro variáveis observáveis. A direção atribuível para as quais essas quatro variáveis observáveis são deslocadas deve-se unicamente à causa especial associada à variável latente deslocamento D, que em controle tem desvio-padrão igual a 1,0. Assim, foram simulados cinco casos para cada desvio-padrão do erro σ_e em controle (0,1; 0,5 e 1,0) e para cada probabilidade de alarme falso (0,0027; 0,0050 e 0,0100). Cada caso foi simulado com uma variação distinta do desvio-padrão da variável latente deslocamento D em relação ao seu desvio-padrão em controle. Essas variações foram de 1,5 a 3,5 desvios-padrão em controle, conforme pode ser visto nas Tabelas (1), (2) e (3).

A Tabela (1) apresenta o desempenho do gráfico de S do valor da projeção \hat{a}_D e dos esquemas concorrentes VS, VMAX, e Det(S), além da média da norma quadrática dos resíduos $\overline{\|\mathbf{r}\|^2}$. Observa-se, nessa tabela, que o esquema proposto (gráfico na projeção \hat{a}_D) e o esquema VS apresentam probabilidades de sinais bastante próximas, com leve vantagem para o esquema VS nos casos em que o desvio-padrão do erro em controle é igual a 0,1 e 1,0.

Tabela 1 – Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - m=5 e $\alpha=0,0027$

σ_e em controle	σ_D	\hat{a}_D	VS	VMAX	Det(S)	$\overline{\ \mathbf{r}\ ^2}$
0,1	1,5	0,1225	0,1230	0,1208	0,0118	0,0026
	2	0,3916	0,3948	0,3881	0,0273	0,0027
	2,5	0,6230	0,6245	0,6196	0,0462	0,0026
	3	0,7674	0,7681	0,7649	0,0687	0,0028
	3,5	0,8552	0,8545	0,8535	0,0930	0,0025
0,5	1,5	0,0891	0,0875	0,0565	0,0095	0,0027
	2	0,3147	0,3116	0,2255	0,0215	0,0027
	2,5	0,5407	0,5379	0,4341	0,0371	0,0029
	3	0,7031	0,7000	0,6121	0,0568	0,0027
	3,5	0,8072	0,8025	0,7356	0,0755	0,0026
1	1,5	0,0405	0,0405	0,0149	0,0067	0,0026
	2	0,1659	0,1666	0,0579	0,0139	0,0027
	2,5	0,3459	0,3461	0,1519	0,0235	0,0026
	3	0,5172	0,5174	0,2787	0,0365	0,0027
	3,5	0,6539	0,6552	0,4165	0,0504	0,0026

Observa-se na Tabela (2) o mesmo comportamento identificado na Tabela (1). O esquema proposto é inferior ao esquema VS para os desvios-padrão do erro 0,1 e 1,0, e superior para o desvio-padrão do erro igual a 0,5 para todas as variações do desvio-padrão da variável latente deslocamento.

Tabela 2 – Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - $m=5$ e $\alpha=0,0050$

σ_e em controle	σ_D	\hat{a}_D	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1,5	0,1501	0,1566	0,1528	0,0189	0,0049
	2	0,4341	0,4417	0,4364	0,0398	0,0050
	2,5	0,6558	0,6641	0,6577	0,0651	0,0049
	3	0,7921	0,7976	0,7933	0,0933	0,0050
	3,5	0,8713	0,8739	0,8718	0,1216	0,0050
0,5	1,5	0,1225	0,1151	0,0768	0,0159	0,0050
	2	0,3695	0,3583	0,2694	0,0334	0,0049
	2,5	0,5932	0,5815	0,4857	0,0540	0,0050
	3	0,7429	0,7349	0,6542	0,0775	0,0050
	3,5	0,8359	0,8294	0,7679	0,1031	0,0049
1	1,5	0,0535	0,0582	0,0237	0,0116	0,0050
	2	0,1931	0,2050	0,0817	0,0219	0,0049
	2,5	0,3805	0,3941	0,1914	0,0364	0,0050
	3	0,5517	0,5648	0,3319	0,0526	0,0051
	3,5	0,6828	0,6923	0,4709	0,0703	0,0050

O comportamento observado nas Tabelas (1) e (2), não se repetiu na Tabela (3). Observa-se nesta última tabela que o esquema proposto é superior ao esquema VS apenas no caso em que o desvio-padrão do erro é igual a 0,1.

As diferenças tão pequenas (na grande maioria das vezes, só no 4º significativo) e as irregularidades do padrão (em relação ao valor de σ_e em controle) fazem supor que passam ser devidas ao erro experimental. Embora a Fase II tenha sido simulada com 3704000 corridas, os limites de controle estão em função de percentis (ou os parâmetros de \hat{a}_D) estimados com 3704 amostras na Fase I.

Tabela 3 - Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - $m=5$ e $\alpha=0,0100$

σ_e em controle	σ_D	\hat{a}_D	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1,5	0,2092	0,2039	0,2000	0,0324	0,0102
	2	0,5071	0,5016	0,4959	0,0620	0,0100
	2,5	0,7153	0,7095	0,7062	0,0965	0,0101
	3	0,8333	0,8285	0,8270	0,1319	0,0100
	3,5	0,8979	0,8948	0,8939	0,1653	0,0103
0,5	1,5	0,1567	0,1564	0,1121	0,0272	0,0096
	2	0,4180	0,4188	0,3310	0,0520	0,0100
	2,5	0,6341	0,6356	0,5479	0,0814	0,0102
	3	0,7733	0,7745	0,7035	0,1118	0,0098
	3,5	0,8564	0,8572	0,8058	0,1439	0,0097
1	1,5	0,0800	0,0854	0,0399	0,0204	0,0097
	2	0,2475	0,2577	0,1205	0,0367	0,0103
	2,5	0,4435	0,4544	0,2502	0,0567	0,0102
	3	0,6076	0,6180	0,3996	0,0785	0,0100
	3,5	0,7266	0,7340	0,5355	0,1024	0,0101

Da análise da probabilidade de sinal devido ao aumento do desvio-padrão da variável latente deslocamento, apresentado nas Tabelas (1), (2) e (3), verifica-se que:

- i. com o aumento da probabilidade de alarme falso de 0,0027 para 0,0100, o esquema proposto passou a apresentar melhor desempenho que o esquema VS, nos casos de menor σ_e em controle;
- ii. apesar de ambos os esquemas, o proposto e o gráfico de VS, apresentarem probabilidades de sinal bastante próximas, o esquema VS é superior na maioria dos casos;
- iii. por apresentarem baixa probabilidade de sinalização, em comparação com o esquema proposto e o esquema VS, os esquemas VMAX e Det(S) não são adequados para monitorar este tipo de processo;

- iv. A probabilidade de sinal do gráfico da média da norma quadrática dos resíduos $\overline{\|\mathbf{r}\|^2}$ é praticamente constante e igual à probabilidade de alarme falso. Essa sinalização confirma que não existem causas especiais atuando fora do hiperplano varrido pela direção atribuível identificada (deslocamento), e o desvio do erro está em controle, ou seja, não varia ao longo do processo.

5.2.2

Duas direções atribuíveis e quatro variáveis observáveis

Esse caso ocorre quando em um processo se conhecem duas variáveis latentes atuando em quatro variáveis observáveis. As direções atribuíveis ao longo das quais essas quatro variáveis observáveis são deslocadas devem-se às causas especiais associadas às variáveis latentes rotação e deslocamento, que, em controle, têm desvios-padrão iguais a 1,0.

Para uma probabilidade de alarme falso igual a 0,0027, a Tabela (4) mostra que os valores médios obtidos na Fase I são praticamente iguais para todos os quatro esquemas analisados: conjunto dos gráficos nas projeções T e D, denotado por $\hat{d}_T \cup \hat{d}_D$; gráfico de VMAX; gráfico Det_S; e gráfico VS. Além disso, a Tabela (4) mostra os valores médios obtidos para a probabilidade de alarme falso para cada projeção \hat{d}_T e \hat{d}_D , de forma individual.

Tabela 4 – Probabilidade de alarme falso nos esquemas avaliados

σ_e em controle	σ_T	σ_D	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T \cup \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)
0,1	1	1	0,0014	0,0016	0,0030	0,0028	0,0026	0,0027
0,5	1	1	0,0013	0,0013	0,0026	0,0026	0,0026	0,0028
1	1	1	0,0013	0,0013	0,0026	0,0027	0,0028	0,0027

Para todos os valores de σ_e , observa-se nas Tabelas (5) e (6), que o esquema proposto (conjunto de gráficos nas projeções $\hat{d}_T U \hat{d}_D$) nos casos em que ocorre variação de desvio-padrão em uma única variável latente, apresenta vantagem em relação aos demais esquemas concorrentes. Quando os desvios-padrão de ambas as variáveis latentes aumentam simultaneamente, o esquema VS passa a ser mais vantajoso.

O esquema VMAX oferece pequena vantagem em relação aos outros esquemas apenas para o menor valor de σ_e , quando ambas as variáveis apresentam a maior variação simulada. Mesmo assim, seu desempenho não é muito superior ao desempenho de VS.

Essa diferença de comportamento (VS e VMAX em relação às projeções nos casos de aumentos simultâneos do desvio-padrão das variáveis latentes) pode ser atribuída ao fato de que o aumento simultâneo do desvio-padrão das variáveis latentes acumulam seus efeitos sobre as variáveis observáveis, o que beneficia o esquema VMAX, uma vez que a estatística deste último é realizada em função das variáveis observáveis. Quanto ao esquema VS, ele considera um somatório dos desvios-padrão das variáveis latentes, enquanto o esquema proposto monitora a variância de cada variável latente separadamente. Esse aspecto faz com que o esquema proposto não aproveite o acúmulo dos aumentos simultâneos das variáveis latentes; Em contrapartida, o fato de concentrar-se sobre a variação de cada variável latente separadamente o torna mais eficiente do que os outros esquemas. quando consideradas as sinalizações provenientes de aumentos na variação de apenas uma variável latente.

Tabela 5 – Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - m=5 e $\alpha=0,0027$

σ_c em controle	σ_T	σ_D	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T \cup \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1,5	1	0,0935	0,0013	0,0947	0,0778	0,0595	0,0115	0,0025
	2	1	0,3440	0,0014	0,3449	0,3016	0,2584	0,0267	0,0025
	1,5	1,5	0,0932	0,0929	0,1772	0,2281	0,2138	0,0362	0,0025
	2	1,5	0,3445	0,0934	0,4053	0,4664	0,4552	0,0689	0,0027
	2	2	0,3457	0,3436	0,5706	0,6540	0,6576	0,1164	0,0027
0,5	1,5	1	0,0637	0,0013	0,0649	0,0543	0,0344	0,0096	0,0023
	2	1	0,2645	0,0013	0,2654	0,2271	0,1602	0,0219	0,0024
	1,5	1,5	0,0632	0,0638	0,1231	0,1602	0,1239	0,0267	0,0025
	2	1,5	0,2639	0,0635	0,3103	0,3620	0,3015	0,0511	0,0024
	2	2	0,2640	0,2622	0,4566	0,5419	0,4859	0,0887	0,0025
1	1,5	1	0,0271	0,0014	0,0285	0,0242	0,0132	0,0066	0,0025
	2	1	0,1294	0,0014	0,1306	0,1063	0,0504	0,0136	0,0024
	1,5	1,5	0,0266	0,0271	0,0530	0,0673	0,0370	0,0147	0,0025
	2	1,5	0,1292	0,0274	0,1531	0,1769	0,0996	0,0274	0,0026
	2	2	0,1309	0,1293	0,2432	0,3018	0,1885	0,0472	0,0026

Tabela 6 – Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - m=5 e $\alpha=0,0050$

σ_c em controle	σ_T	σ_D	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T \cup \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1,5	1	0,1181	0,0024	0,1202	0,1036	0,0835	0,0189	0,0046
	2	1	0,3875	0,0026	0,3890	0,3475	0,3099	0,0398	0,0047
	1,5	1,5	0,1193	0,1190	0,2242	0,2784	0,2661	0,0525	0,0048
	2	1,5	0,3873	0,1181	0,4596	0,5190	0,5145	0,0930	0,0047
	2	2	0,3876	0,3883	0,6251	0,7004	0,7075	0,1500	0,0050
0,5	1,5	1	0,0843	0,0024	0,0865	0,0743	0,0516	0,0160	0,0047
	2	1	0,3066	0,0027	0,3085	0,2703	0,2036	0,0333	0,0047
	1,5	1,5	0,0844	0,0838	0,1611	0,2021	0,1634	0,0403	0,0046
	2	1,5	0,3050	0,0841	0,3633	0,4150	0,3604	0,0720	0,0046
	2	2	0,3041	0,3058	0,5171	0,5949	0,5484	0,1170	0,0045
1	1,5	1	0,0390	0,0024	0,0413	0,0363	0,0213	0,0119	0,0046
	2	1	0,1614	0,0024	0,1634	0,1379	0,0732	0,0218	0,0046
	1,5	1,5	0,0386	0,0384	0,0755	0,0935	0,0563	0,0237	0,0048
	2	1,5	0,1604	0,0380	0,1924	0,2202	0,1337	0,0412	0,0047
	2	2	0,1606	0,1597	0,2945	0,3557	0,2385	0,0660	0,0049

Para uma probabilidade de alarme falso igual a 0,0100, o comportamento de todos os esquemas são semelhantes aos apresentados nas Tabelas (5) e (6), excetuando-se pequena melhora no desempenho do esquema VMAX. Pode ser observado na Tabela (7) que, para o menor valor de σ_e , o desempenho de VMAX é ligeiramente superior, quando comparado com o esquema VS para os casos de maiores variações simultâneas do desvio-padrão das variáveis latentes rotação e deslocamento.

Tabela 7 – Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - $m=5$ e $\alpha=0,0100$

σ_e em controle	σ_T	σ_D	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T U \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1,5	1	0,1568	0,0051	0,1611	0,1428	0,1227	0,0319	0,0097
	2	1	0,4429	0,0050	0,4457	0,4073	0,3805	0,0628	0,0096
	1,5	1,5	0,1565	0,1565	0,2885	0,3439	0,3374	0,0787	0,0095
	2	1,5	0,4417	0,1562	0,5288	0,5852	0,5878	0,1315	0,0098
	2	2	0,4419	0,4428	0,6882	0,7513	0,7654	0,1980	0,0098
0,5	1,5	1	0,1157	0,0051	0,1202	0,1071	0,0802	0,0278	0,0098
	2	1	0,3592	0,0051	0,3625	0,3258	0,2639	0,0530	0,0096
	1,5	1,5	0,1146	0,1145	0,2159	0,2599	0,2205	0,0626	0,0096
	2	1,5	0,3591	0,1146	0,4328	0,4827	0,4363	0,1047	0,0095
	2	2	0,3567	0,3595	0,5881	0,6565	0,6222	0,1597	0,0097
1	1,5	1	0,0579	0,0052	0,0628	0,0567	0,0365	0,0209	0,0096
	2	1	0,2037	0,0050	0,2076	0,1821	0,1108	0,0368	0,0095
	1,5	1,5	0,0572	0,0583	0,1122	0,1324	0,0876	0,0391	0,0094
	2	1,5	0,2039	0,0574	0,2494	0,2784	0,1887	0,0643	0,0098
	2	2	0,2033	0,2027	0,3646	0,4227	0,3106	0,0973	0,0098

Outra forma de verificar o desempenho dos esquemas apresentados é a visualização gráfica. Ao considerar os casos descritos na Tabela (6), verifica-se mais uma vez, observando as Figuras (11a) a (11e), o desempenho do esquema proposto e de seus concorrentes. Além disso, mantendo constantes os desvios-padrão das variáveis latentes, é possível verificar para qual valor do desvio-padrão do erro ocorreu uma mudança de comportamento do esquema em relação à probabilidade de sinal (cruzamento entre as linhas visualizadas nas Figuras (11c), (11d) e (11e)). Note-se que as Figuras (11a) a (11e) apresentam uma linha inferior tracejada que representa a média da norma quadrática dos resíduos. Como já era

de esperar, essa linha é uma reta praticamente constante ao longo dos aumentos do desvio-padrão do erro, o que mostra mais uma vez que não existem causas especiais atuando fora do hiperplano varrido pelas direções atribuíveis identificadas (rotação e deslocamento), e que o desvio do erro está em controle.

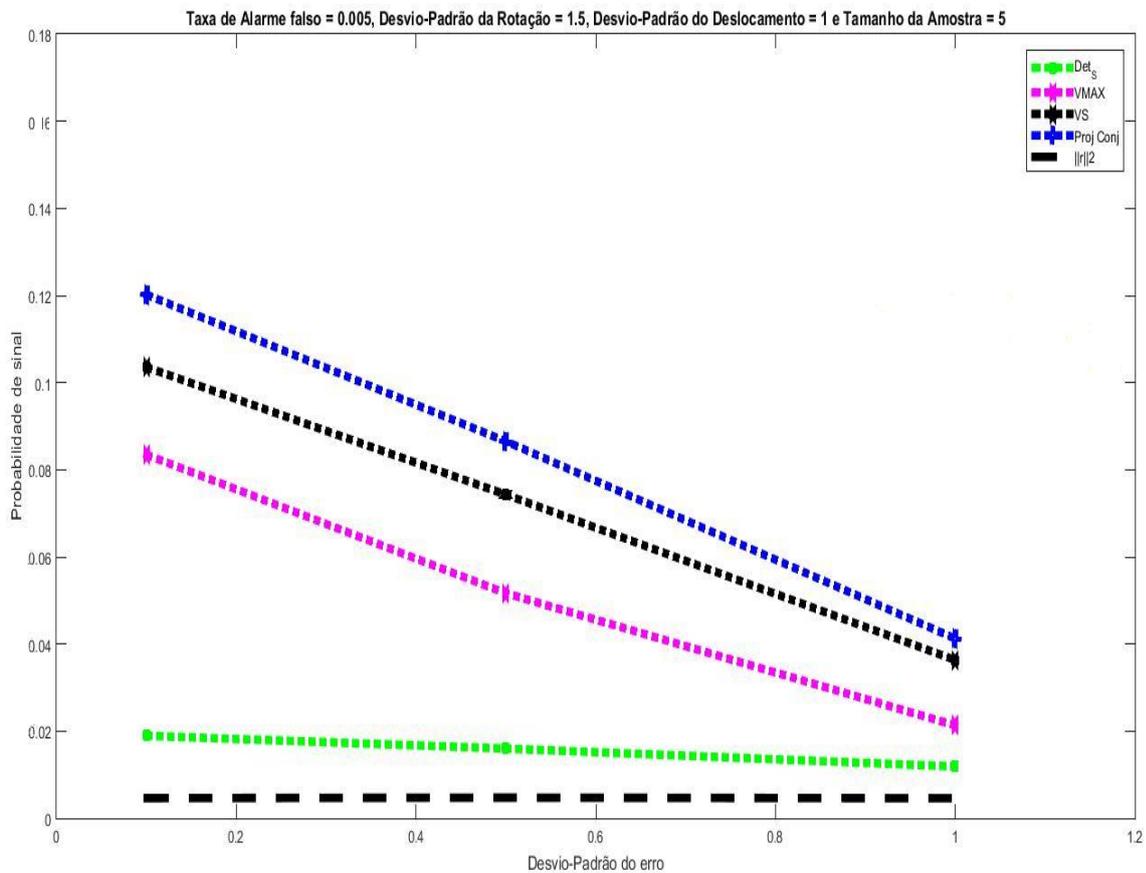


Figura 11a – Gráfico de Probabilidade de sinal ($\alpha=0,005$; $\sigma T=1,5$; $\sigma D=1,0$)

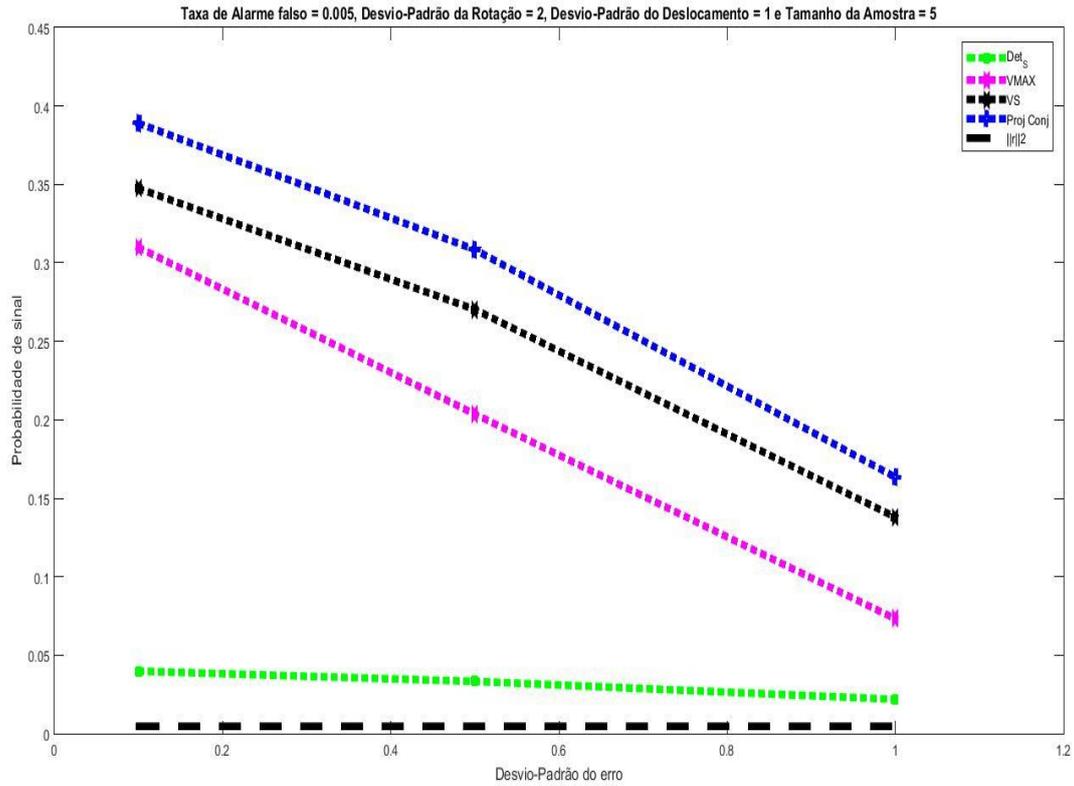


Figura 11b – Gráfico de Probabilidade de sinal ($\alpha=0,005; \sigma T=2,0; \sigma D=1,0$)

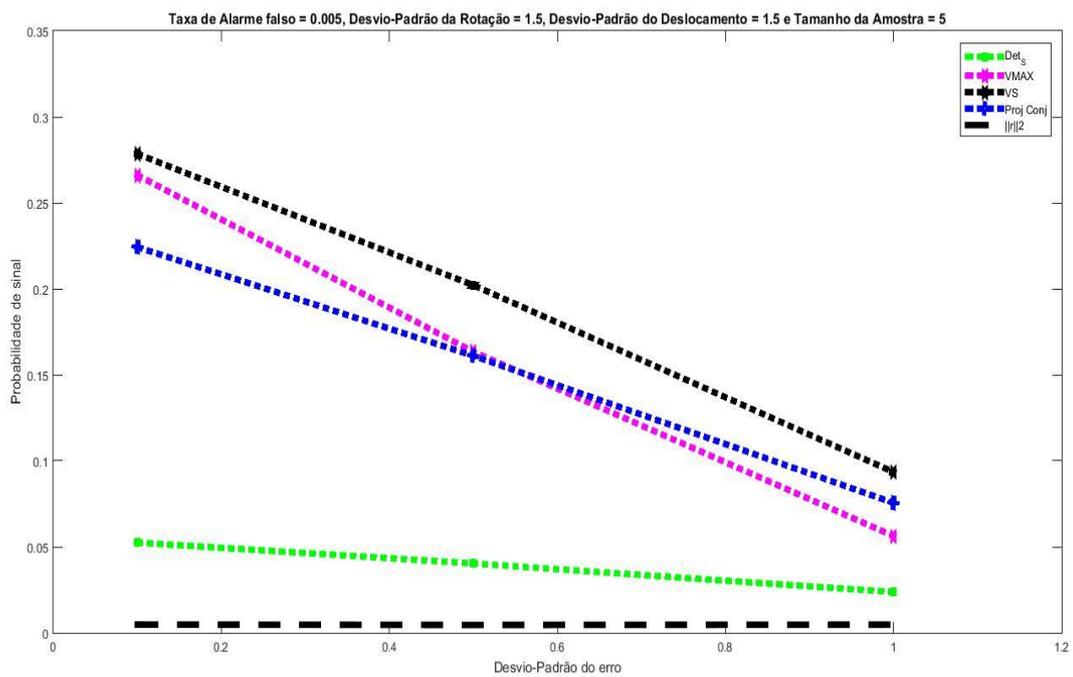


Figura 11c – Gráfico de Probabilidade de sinal ($\alpha=0,005; \sigma T=1,5; \sigma D=1,5$)

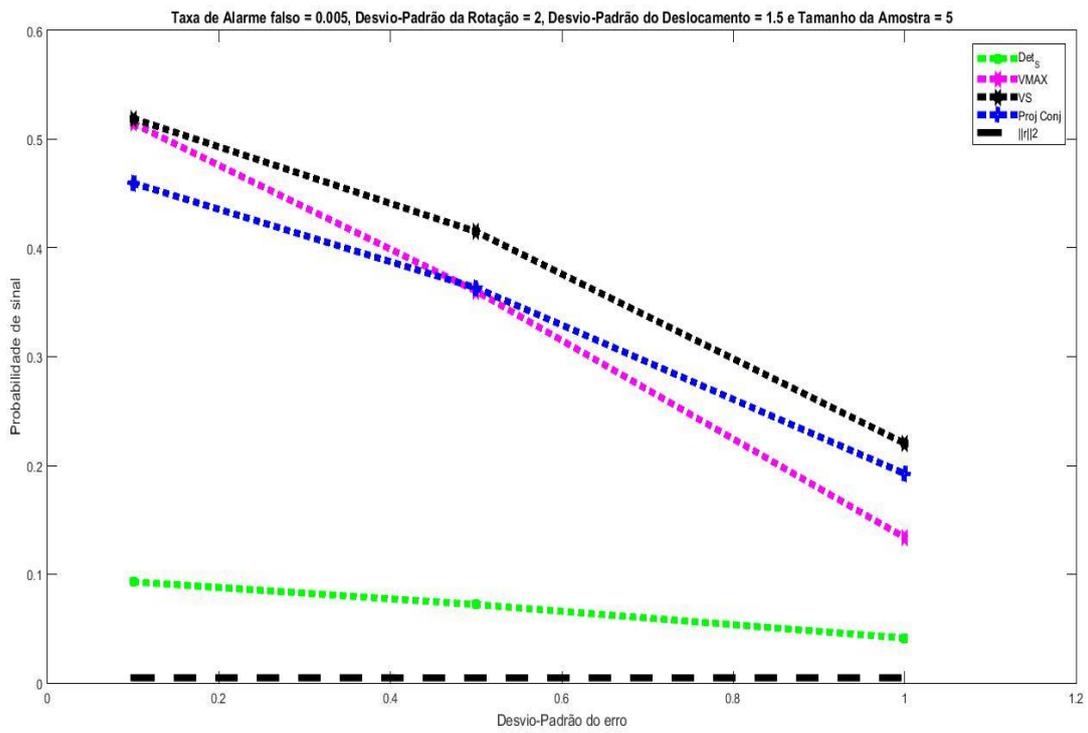


Figura 11d – Gráfico de Probabilidade de sinal ($\alpha=0,005; \sigma T=2,0; \sigma D=1,5$)

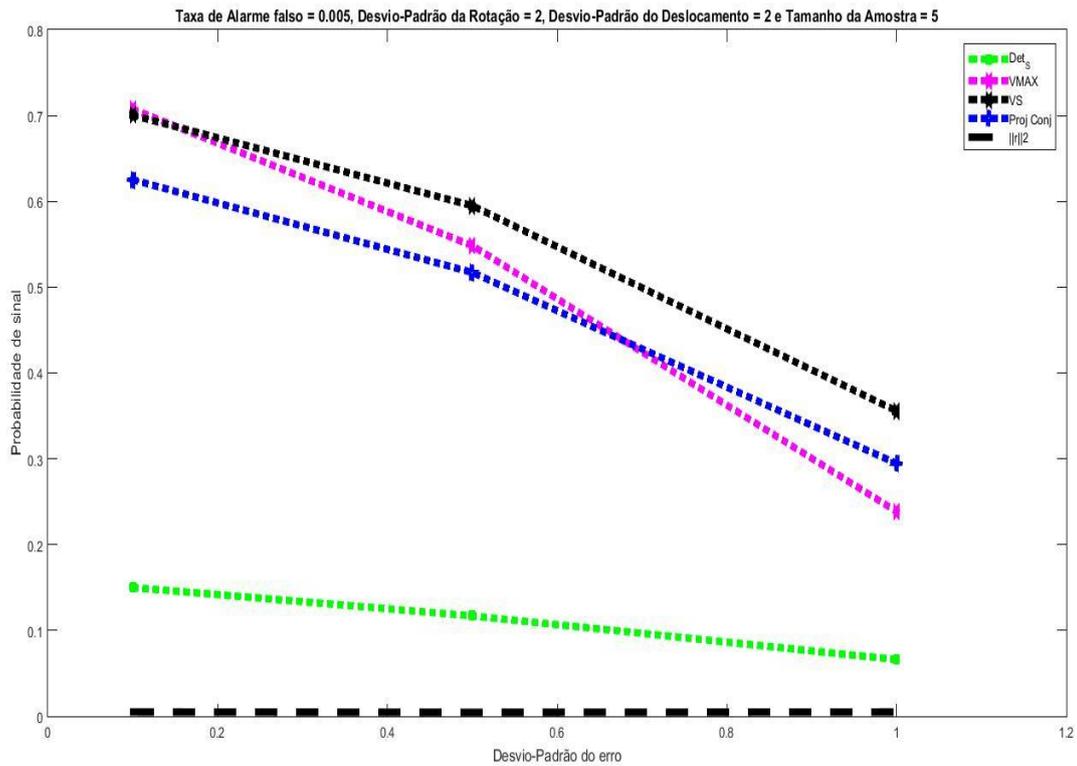


Figura 11e – Gráfico de Probabilidade de sinal ($\alpha=0,005; \sigma T=2,0; \sigma D=2,0$)

Da análise da probabilidade de sinal devido ao aumento do desvio-padrão das variáveis latentes rotação e deslocamento, apresentado nas Tabelas (5), (6) e (7), verifica-se que:

- i. quando ocorre aumento na variância de apenas uma das variáveis latentes, o esquema proposto é bastante superior aos outros esquemas. Nesses casos, a probabilidade de sinal do gráfico individual da variável latente que não teve seu desvio-padrão aumentado manteve-se igual à probabilidade de alarme falso;
- ii. as sinalizações das variáveis latentes são independentes entre si o que confirma o caráter ortogonal dessas variáveis;
- iii. a última coluna das referidas tabelas apresentam as probabilidades de sinal do gráfico da média quadrática da norma do vetor resíduo (utilizando a transformação de Box-Cox), para mostrar que a probabilidade de sinal permanece no nível α especificado, mesmo quando as variâncias de uma ou mais das variáveis latentes aumentam;
- iv. se mudanças nas variâncias das diferentes variáveis latentes não são susceptíveis de surgir no mesmo ponto no tempo, o conjunto proposto de gráficos S é o sistema de controle mais eficiente. Na situação inversa, o esquema proposto é superado pelos esquemas VMAX e VS;
- v. para uma decisão final sobre qual esquema de controle adotar, a complexidade do gráfico VS deve ser levada em consideração, bem como o fato de que o conjunto de gráficos de S, ao sinalizar, já indica a variável latente afetada, facilitando assim, o diagnóstico do problema.

5.2.3

Duas direções atribuíveis e oito variáveis observáveis

Esse caso foi simulado mantendo constante o número de variáveis latentes e aumentando o número de variáveis observáveis. Com isso era possível verificar se o desempenho dos esquemas variava conforme a razão entre o número de variáveis observáveis p e o número de variáveis latentes q .

O processo foi simulado adaptando o modelo apresentado na Figura (6) para oito posições de medições, sendo quatro do lado esquerdo (variáveis x_1 , x_2 , x_3 e x_4) e quatro do lado direito do vidro (variáveis x_5 , x_6 , x_7 e x_8) e com atuação de duas variáveis latentes, rotação e deslocamento. Assim, foi proposta uma matriz C , com as seguintes características:

- para a variável latente rotação, as posições das quatro extremidades do vidro (superior esquerda - variável x_1 ; superior direita - variável x_4 ; inferior esquerda - variável x_5 ; e inferior direita - variável x_8) se deslocam três vezes mais do que as outras posições interiores (lateral esquerda - variáveis x_2 e x_3 e lateral direita - variáveis x_6 e x_7);
- para a variável latente deslocamento todas as posições se deslocam na mesma medida e para o mesmo lado (variáveis x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ; x_5 ; x_6 ; x_7 ; e x_8). Assim, a matriz constante C de direções atribuíveis associadas às variáveis latentes rotação e deslocamento é estabelecida como mostrado a seguir:

$$C = \frac{\sqrt{10}}{20} \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{5} \\ -1 & \sqrt{5} \\ 1 & \sqrt{5} \\ 3 & \sqrt{5} \\ 3 & \sqrt{5} \\ 1 & \sqrt{5} \\ -1 & \sqrt{5} \\ -3 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

As Tabelas (8), (9) e (10) apresentam os resultados para os casos simulados.

Tabela 8 – Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - m=5 e $\alpha=0,0027$

σ_s em controle	σ_T	σ_D	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T U \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1,5	1	0,0854	0,0015	0,0868	0,0781	0,0682	0,0241	0,0025
	2,0	1	0,3297	0,0014	0,3306	0,3019	0,2960	0,0895	0,0027
	1,5	1,5	0,0845	0,0958	0,1722	0,2295	0,2260	0,0928	0,0027
	2,0	1,5	0,3306	0,0967	0,3953	0,4668	0,4658	0,1781	0,0026
	2,0	2,0	0,3310	0,3497	0,5647	0,6540	0,6734	0,2863	0,0025
	2,5	2,0	0,5648	0,3494	0,7170	0,7889	0,8099	0,3611	0,0025
	3,0	3,0	0,7266	0,7406	0,9293	0,9549	0,9692	0,5088	0,0026
0,5	1,5	1	0,0639	0,0012	0,0651	0,0547	0,0305	0,0179	0,0027
	2,0	1	0,2621	0,0014	0,2632	0,2274	0,1534	0,0628	0,0026
	1,5	1,5	0,0628	0,0634	0,1224	0,1606	0,0913	0,0598	0,0027
	2,0	1,5	0,2622	0,0616	0,3077	0,3629	0,2519	0,1208	0,0027
	2,0	2,0	0,2631	0,2595	0,4536	0,5440	0,4080	0,2085	0,0028
	2,5	2,0	0,4896	0,2587	0,6226	0,6993	0,5918	0,2831	0,0027
	3,0	3,0	0,6597	0,6576	0,8834	0,9220	0,8866	0,4577	0,0026
1,0	1,5	1	0,0272	0,0012	0,0283	0,0244	0,0091	0,0085	0,0027
	2,0	1	0,1295	0,0013	0,1306	0,1087	0,0364	0,0245	0,0026
	1,5	1,5	0,0265	0,0259	0,0517	0,0690	0,0203	0,0207	0,0025
	2,0	1,5	0,1285	0,0257	0,1508	0,1783	0,0586	0,0426	0,0026
	2,0	2,0	0,1277	0,1256	0,2374	0,3055	0,1020	0,0785	0,0026
	2,5	2,0	0,2961	0,1264	0,3847	0,4575	0,2005	0,1227	0,0027
	3,0	3,0	0,4677	0,4627	0,7138	0,7872	0,5205	0,2875	0,0026

Tabela 9 – Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - m=5 e $\alpha=0,0050$

σ_e em controle	σ_T	σ_D	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T U \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1,5	1	0,1220	0,0025	0,1242	0,1037	0,0921	0,0358	0,0049
	2,0	1	0,3916	0,0027	0,3932	0,3479	0,3467	0,1154	0,0050
	1,5	1,5	0,1214	0,1221	0,2288	0,2781	0,2784	0,1203	0,0050
	2,0	1,5	0,3914	0,1210	0,4653	0,5204	0,5259	0,2145	0,0048
	2,0	2,0	0,3914	0,3905	0,6295	0,6999	0,7216	0,3222	0,0049
	2,5	2,0	0,6223	0,3920	0,7703	0,8222	0,8450	0,3947	0,0049
	3,0	3,0	0,7685	0,7671	0,9462	0,9634	0,9761	0,5220	0,0050
0,5	1,5	1	0,0795	0,0025	0,0818	0,0743	0,0452	0,0269	0,0050
	2,0	1	0,2974	0,0026	0,2992	0,2700	0,1922	0,0842	0,0051
	1,5	1,5	0,0791	0,0851	0,1576	0,2031	0,1240	0,0792	0,0049
	2,0	1,5	0,2979	0,0850	0,3576	0,4166	0,3058	0,1519	0,0048
	2,0	2,0	0,2982	0,3071	0,5136	0,5978	0,4720	0,2441	0,0048
	2,5	2,0	0,5228	0,3065	0,6687	0,7392	0,6470	0,3169	0,0048
	3,0	3,0	0,6894	0,6984	0,9060	0,9370	0,9116	0,4794	0,0050
1,0	1,5	1	0,0383	0,0023	0,0405	0,0365	0,0151	0,0134	0,0049
	2,0	1	0,1601	0,0024	0,1621	0,1387	0,0519	0,0359	0,0049
	1,5	1,5	0,0389	0,0376	0,0750	0,0952	0,0320	0,0302	0,0050
	2,0	1,5	0,1597	0,0377	0,1915	0,2232	0,0826	0,0594	0,0049
	2,0	2,0	0,1610	0,1564	0,2925	0,3605	0,1402	0,1027	0,0048
	2,5	2,0	0,3396	0,1563	0,4418	0,5117	0,2524	0,1511	0,0049
	3,0	3,0	0,5118	0,5075	0,7596	0,8192	0,5826	0,3223	0,0047

Tabela 10 – Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - $m=5$ e $\alpha=0,0100$

σ_e em controle	σ_T	σ_D	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T U \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1,5	1	0,1575	0,0054	0,1620	0,1425	0,1308	0,0559	0,0101
	2,0	1	0,4435	0,0052	0,4464	0,4055	0,4091	0,1531	0,0101
	1,5	1,5	0,1575	0,1569	0,2896	0,3434	0,3485	0,1611	0,0098
	2,0	1,5	0,4432	0,1569	0,5305	0,5854	0,5980	0,2616	0,0100
	2,0	2,0	0,4427	0,4441	0,6905	0,7510	0,7768	0,3684	0,0098
	2,5	2,0	0,6639	0,4418	0,8126	0,8564	0,8795	0,4318	0,0101
	3,0	3,0	0,7975	0,7994	0,9592	0,9724	0,9831	0,5377	0,0099
0,5	1,5	1	0,1169	0,0047	0,1211	0,1065	0,0697	0,0432	0,0095
	2,0	1	0,3609	0,0050	0,3640	0,3260	0,2464	0,1161	0,0101
	1,5	1,5	0,1171	0,1136	0,2175	0,2627	0,1745	0,1124	0,0098
	2,0	1,5	0,3625	0,1127	0,4345	0,4846	0,3769	0,1943	0,0097
	2,0	2,0	0,3618	0,3554	0,5881	0,6571	0,5474	0,2894	0,0101
	2,5	2,0	0,5857	0,3564	0,7332	0,7868	0,7118	0,3613	0,0098
	3,0	3,0	0,7375	0,7336	0,9295	0,9511	0,9335	0,5033	0,0099
1,0	1,5	1	0,0598	0,0052	0,0647	0,0568	0,0274	0,0244	0,0098
	2,0	1	0,2079	0,0055	0,2122	0,1845	0,0818	0,0552	0,0100
	1,5	1,5	0,0597	0,0604	0,1165	0,1341	0,0532	0,0489	0,0099
	2,0	1,5	0,2079	0,0597	0,2553	0,2805	0,1229	0,0863	0,0102
	2,0	2,0	0,2072	0,2077	0,3717	0,4281	0,1953	0,1389	0,0099
	2,5	2,0	0,3972	0,2076	0,5221	0,5787	0,3251	0,1918	0,0099
	3,0	3,0	0,5673	0,5671	0,8130	0,8559	0,6575	0,3620	0,0099

Da análise da probabilidade de sinal devida ao aumento do desvio-padrão das variáveis latentes rotação e deslocamento, apresentado nas Tabelas (8), (9) e (1), verifica-se que:

- i. tanto o desempenho relativo entre os esquemas, como o desempenho absoluto de cada um, praticamente não se alterou com o aumento do número de variáveis observáveis;
- ii. mais uma vez verifica-se que a probabilidade de sinal permanece no nível α especificado, mesmo quando as variâncias de uma ou mais das variáveis latentes aumentam.

5.2.4

Duas direções atribuíveis e quatro variáveis observáveis com desvio-padrão do erro aumentado

A primeira linha de cada bloco das Tabelas (11), (12) e (13) apresenta as probabilidades estimadas de sinal para todos os gráficos com o processo sob controle (variáveis latentes e ruído aleatório - sem a presença de qualquer nova variável latente). Nota-se que essas probabilidades correspondem as probabilidades de alarme falso especificadas na segunda e terceira linhas de cada bloco as variáveis latentes continuam em controle, mas há aumentos na variância do ruído aleatório (por exemplo, em virtude de uma deterioração do sistema de medição). Nas outras linhas de cada bloco as variáveis latentes e o ruído aleatório apresentam-se fora de controle.

Visto que σ_e^2 faz parte da variância das estatísticas de todos os esquemas de controle analisados (incluindo os \hat{d}_j 's dos gráficos de S), verifica-se que todos os gráficos têm as suas probabilidades de sinal aumentadas, e cujos valores serão tão maiores quanto maior for o valor de σ_e^2 em controle (o que se explica pela maior proporção da variância das estatísticas, correspondentes ao ruído aleatório). Em qualquer caso, no entanto, o gráfico da transformação de Box-Cox ($\overline{\|r\|^2}$) – continua a ser o mais potente, e os gráficos conjuntos de S permanecem menos sensíveis a essas mudanças – o que significa uma vantagem, porque a sinalização do gráfico de S, neste caso, seria enganosa, levando o usuário a uma interpretação errada do sinal. Além disso, uma vez que o gráfico da transformação de Box-Cox ($\overline{\|r\|^2}$) tem seu limite de controle estabelecido como uma função da distribuição em controle apenas do vetor resíduo (o qual é apenas devido ao ruído aleatório), as suas probabilidades de sinal, em contraste com o que ocorre nos outros gráficos, dependem somente da razão entre os valores de σ_e^2 fora de controle e em controle, sendo invariantes no que diz respeito ao valor em controle de σ_e^2 sozinho.

Tabela 11 – Probabilidade de sinal para σ_e fora de controle - $m=5$ e $\alpha=0,0027$

σ_e	σ_T	σ_D	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T U \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1	1	0,0013	0,0013	0,0026	0,0027	0,0027	0,0028	0,0025
0,15	1	1	0,0015	0,0016	0,0031	0,0030	0,0037	0,0377	0,2822
0,2	1	1	0,0016	0,0017	0,0033	0,0034	0,0051	0,1240	0,7454
0,15	1,5	1	0,0954	0,0015	0,0967	0,0802	0,0690	0,0891	0,2810
0,15	1,5	1,5	0,0943	0,0949	0,1805	0,2318	0,2325	0,1700	0,2823
0,2	1	1,5	0,0018	0,0971	0,0987	0,0821	0,0807	0,2179	0,7464
0,2	1,5	1,5	0,0975	0,0968	0,1848	0,2350	0,2542	0,3320	0,7470
0,5	1	1	0,0014	0,0013	0,0026	0,0027	0,0027	0,0026	0,0025
0,75	1	1	0,0067	0,0067	0,0134	0,0121	0,0388	0,0609	0,2814
1	1	1	0,0249	0,0253	0,0496	0,0410	0,2078	0,2299	0,7447
0,75	1,5	1	0,0948	0,0066	0,1008	0,0869	0,1382	0,1073	0,2805
0,75	1,5	1,5	0,0943	0,0951	0,1805	0,2061	0,2828	0,1694	0,2804
1	1	1,5	0,0253	0,1449	0,1663	0,1413	0,3678	0,3000	0,7459
1	1,5	1,5	0,1446	0,1445	0,2681	0,2674	0,5222	0,3738	0,7453
1	1	1	0,0013	0,0014	0,0027	0,0027	0,0026	0,0028	0,0025
1,5	1	1	0,0274	0,0269	0,0535	0,0438	0,1472	0,1014	0,2811
2	1	1	0,1297	0,1286	0,2416	0,1679	0,6092	0,3592	0,7459
1,5	1,5	1	0,0950	0,0267	0,1191	0,1004	0,2234	0,1325	0,2813
1,5	1,5	1,5	0,0957	0,0950	0,1813	0,1726	0,3072	0,1694	0,2797
2	1	1,5	0,1298	0,2224	0,3238	0,2377	0,6729	0,3969	0,7464
2	1,5	1,5	0,2225	0,2215	0,3946	0,3087	0,7256	0,4308	0,7466

Tabela 12 – Probabilidade de sinal para σ_e fora de controle - $m=5$ e $\alpha=0,0050$

σ_e	σ_T	σ_D	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T u \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1	1	0,0025	0,0025	0,0051	0,0049	0,0049	0,0050	0,0049
0,15	1	1	0,0027	0,0027	0,0054	0,0054	0,0066	0,0542	0,3375
0,2	1	1	0,0032	0,0033	0,0065	0,0062	0,0092	0,1579	0,7868
0,15	1,5	1	0,1211	0,0027	0,1235	0,1054	0,0959	0,1167	0,3378
0,15	1,5	1,5	0,1212	0,1206	0,2272	0,2809	0,2865	0,2097	0,3371
0,2	1	1,5	0,0030	0,1238	0,1264	0,1090	0,1108	0,2620	0,7861
0,2	1,5	1,5	0,1247	0,1239	0,2333	0,2865	0,3106	0,3813	0,7856
0,5	1	1	0,0024	0,0026	0,0050	0,0049	0,0048	0,0050	0,0045
0,75	1	1	0,0107	0,0108	0,0214	0,0191	0,0586	0,0831	0,3362
1	1	1	0,0356	0,0357	0,0700	0,0568	0,2674	0,2762	0,7856
0,75	1,5	1	0,1215	0,0106	0,1307	0,1144	0,1821	0,1381	0,3372
0,75	1,5	1,5	0,1204	0,1204	0,2262	0,2507	0,3449	0,2095	0,3366
1	1	1,5	0,0365	0,1769	0,2070	0,1751	0,4356	0,3466	0,7861
1	1,5	1,5	0,1769	0,1778	0,3230	0,3142	0,5909	0,4233	0,7867
1	1	1	0,0024	0,0024	0,0048	0,0049	0,0048	0,0051	0,0048
1,5	1	1	0,0381	0,0391	0,0757	0,0609	0,1946	0,1319	0,3378
2	1	1	0,1612	0,1602	0,2954	0,2029	0,6760	0,4118	0,7867
1,5	1,5	1	0,1208	0,0385	0,1547	0,1298	0,2830	0,1688	0,3393
1,5	1,5	1,5	0,1208	0,1204	0,2268	0,2104	0,3729	0,2098	0,3375
2	1	1,5	0,1604	0,2615	0,3799	0,2781	0,7317	0,4472	0,7860
2	1,5	1,5	0,2617	0,2629	0,4563	0,3541	0,7803	0,4800	0,7864

Tabela 13 – Probabilidade de sinal para σ_e fora de controle - $m=5$ e $\alpha=0,0100$

σ_e	σ_T	σ_D	\hat{a}_r	\hat{a}_D	$\hat{a}_r U \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1	1	0,0051	0,0050	0,0100	0,0098	0,0097	0,0101	0,0098
0,15	1	1	0,0054	0,0055	0,0109	0,0110	0,0131	0,0816	0,4109
0,2	1	1	0,0063	0,0062	0,0125	0,0119	0,0178	0,2061	0,8295
0,15	1,5	1	0,1586	0,0056	0,1634	0,1455	0,1388	0,1607	0,4104
0,15	1,5	1,5	0,1579	0,1588	0,2918	0,3470	0,3603	0,2647	0,4103
0,2	1	1,5	0,0060	0,1619	0,1669	0,1481	0,1567	0,3208	0,8299
0,2	1,5	1,5	0,1614	0,1619	0,2975	0,3499	0,3865	0,4432	0,8304
0,5	1	1	0,0050	0,0050	0,0100	0,0103	0,0104	0,0100	0,0098
0,75	1	1	0,0182	0,0183	0,0362	0,0324	0,0915	0,1192	0,4095
1	1	1	0,0542	0,0546	0,1058	0,0835	0,3483	0,3349	0,8289
0,75	1,5	1	0,1580	0,0185	0,1736	0,1538	0,2469	0,1853	0,4090
0,75	1,5	1,5	0,1586	0,1581	0,2914	0,3108	0,4261	0,2638	0,4095
1	1	1,5	0,0544	0,2217	0,2640	0,2223	0,5226	0,4096	0,8288
1	1,5	1,5	0,2217	0,2219	0,3940	0,3743	0,6694	0,4858	0,8292
1	1	1	0,0050	0,0050	0,0099	0,0097	0,0101	0,0104	0,0099
1,5	1	1	0,0569	0,0575	0,1110	0,0876	0,2639	0,1770	0,4089
2	1	1	0,2043	0,2052	0,3676	0,2496	0,7515	0,4741	0,8299
1,5	1,5	1	0,1592	0,0584	0,2083	0,1715	0,3628	0,2184	0,4086
1,5	1,5	1,5	0,1588	0,1576	0,2913	0,2632	0,4590	0,2644	0,4095
2	1	1,5	0,2025	0,3119	0,4508	0,3263	0,7986	0,5052	0,8292
2	1,5	1,5	0,3120	0,3129	0,5270	0,4032	0,8376	0,5397	0,8293

Das Tabelas (11), (12) e (13), conclui-se que:

- i. as probabilidades individuais de sinal nos elementos dos gráficos da projeção $\hat{\mathbf{d}}$ (rotação e deslocamento), são bastante próximas e independem do aumento da variância do erro. Esse fato é indício de que causas especiais estão atuando ao mesmo tempo sobre as fontes de variação (rotação e deslocamento) ou que o próprio erro aleatório esteja contribuindo para o descontrole do processo;
- ii. quando o processo em controle é alterado exclusivamente por variações no desvio do erro, as projeções $\hat{\mathbf{d}}$ não conseguem desempenho satisfatório;
- iii. nesses casos, o monitoramento do processo unicamente pelas projeções $\hat{\mathbf{d}}$ não é indicado; assim, propõe-se o monitoramento do processo com

gráficos conjuntos nas projeções $\hat{\mathbf{d}}$ e na média da norma quadrática dos resíduos $\overline{\|\mathbf{r}\|^2}$.

5.2.5

Duas direções atribuíveis, quatro variáveis observáveis e uma direção atribuível adicional

Aqui será apresentado o controle em conjunto com o gráfico de S nas projeções $\hat{\mathbf{d}}$ e o gráfico na média da norma quadrática dos resíduos $\overline{\|\mathbf{r}\|^2}$. Esse tipo de controle conjunto é importante, pois além de o gráfico da média da norma quadrática dos resíduos ser bastante sensível às mudanças no erro aleatório, ele também é capaz de detectar outras causas especiais de perturbação no processo, diferentes das causas consideradas mais frequentes, ou seja, fora do hiperplano varrido pelas direções atribuíveis conhecidas – neste caso, rotação e deslocamento.

Para verificar tal possibilidade, na simulação da fase I considerou-se apenas duas direções de variação (rotação e deslocamento). A fase II foi simulada para rotação, deslocamento, erro aleatório em controle e presença de uma contração (nesse caso, a contração é o elemento novo a ser detectado pelo gráfico da média da norma quadrática do vetor resíduo). Nessa fase, as projeções $\hat{\mathbf{d}}$ são calculadas projetando o vetor das variáveis observáveis apenas na direção da rotação e do deslocamento, e comparando as estatísticas assim determinadas com os limites de controle obtidos na fase I.

As Tabelas (14), (15) e (16) mostram, na última coluna, a probabilidade de sinal do gráfico de Box-Cox da média da norma quadrática dos resíduos ($\overline{\|\mathbf{r}\|^2}$) quando surge uma nova variável latente, aumentando a variabilidade do processo na direção associada à contração/dilatação do vidro traseiro. A variabilidade de d_T e d_D foi mantida em controle. A sensibilidade do gráfico para essa nova causa especial é muito alta.

A probabilidade de sinal estimada dos outros gráficos é mantida nessas tabelas, a fim de mostrar o que ocorre com suas probabilidades nos casos apresentados. As probabilidades de sinal dos gráficos de VMAX e de $\det(S)$ aumentam, mas continuam substancialmente menores do que a probabilidade de sinal do gráfico da transformação de Box-Cox de $(\|\hat{r}\|^2)$. As probabilidades de sinal dos gráficos de S nas projeções \hat{d} permanecem nos mesmos níveis que para o processo em controle, mostrando a separação de causas especiais monitoradas por cada um dos gráficos do esquema proposto.

Observam-se também valores decrescentes da probabilidade de sinal do gráfico VS, conforme aumenta a variabilidade da contração/dilatação. Esse comportamento pode ser explicado observando-se a Equação (26). Nessa equação o produto dos dois primeiros fatores (1_{p+1}^T) e $([\Pi(C)]^+)$ gera um vetor de valores constantes ao longo do tempo, pois é calculado com os parâmetros p e C invariantes (parâmetros que o usuário reconhece – número de variáveis observáveis e matriz de direções atribuíveis associadas às variáveis latentes rotação e deslocamento), e não é influenciado pelo surgimento da nova fonte de variação – (pois, até então, o usuário não reconhece a contração/dilatação como uma nova fonte de variação). Assim, esse vetor serve como um ponderador para os elementos do vetor $\text{vec}(S_x)$ (calculado já com a nova fonte de variação) na obtenção de VS (soma das variâncias ponderadas pelo vetor constante). O vetor constante pode ter seus elementos com sinais positivos e negativos, dependendo unicamente dos sinais dos elementos da matriz C . Assim, a probabilidade de sinal de VS pode aumentar ou diminuir conforme os valores do novo vetor coluna da matriz K (definida na Seção 2.3).

Tabela 14 – Probabilidade de sinal para direção adicional - m=5 e $\alpha=0,0027$

σ_c em controle	σ_T	σ_D	σ_C	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T \cup \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1	1	0	0,0013	0,0014	0,0027	0,0027	0,0026	0,0027	0,0029
			0,2	0,0014	0,0014	0,0028	0,0026	0,0037	0,0357	0,5005
			0,6	0,0013	0,0013	0,0026	0,0021	0,0146	0,2165	0,9881
			1	0,0014	0,0014	0,0028	0,0013	0,0653	0,3632	0,9988
			1,2	0,0013	0,0013	0,0026	0,0011	0,1245	0,4205	0,9996
			1,6	0,0014	0,0013	0,0027	0,0006	0,3108	0,5084	0,9999
			2	0,0014	0,0013	0,0027	0,0004	0,5220	0,5715	0,9999
0,5	1	1	0	0,0013	0,0016	0,0029	0,0027	0,0027	0,0027	0,0025
			0,2	0,0013	0,0017	0,0030	0,0027	0,0030	0,0037	0,0054
			0,6	0,0013	0,0019	0,0031	0,0022	0,0076	0,0132	0,1191
			1	0,0014	0,0017	0,0031	0,0016	0,0273	0,0361	0,4937
			1,2	0,0013	0,0019	0,0032	0,0013	0,0507	0,0509	0,6577
			1,6	0,0014	0,0019	0,0033	0,0009	0,1465	0,0861	0,8528
			2	0,0013	0,0018	0,0030	0,0006	0,3017	0,1244	0,9336
1	1	1	0	0,0012	0,0015	0,0027	0,0028	0,0027	0,0026	0,0024
			0,2	0,0014	0,0015	0,0028	0,0026	0,0028	0,0031	0,0031
			0,6	0,0014	0,0015	0,0029	0,0024	0,0044	0,0049	0,0120
			1	0,0013	0,0015	0,0028	0,0021	0,0103	0,0097	0,0619
			1,2	0,0013	0,0015	0,0027	0,0018	0,0160	0,0130	0,1205
			1,6	0,0012	0,0016	0,0028	0,0013	0,0392	0,0234	0,2955
			2	0,0013	0,0015	0,0029	0,0010	0,0903	0,0362	0,4949

Tabela 15 – Probabilidade de sinal para direção adicional - $m=5$ e $\alpha=0,0050$

σ_c em controle	σ_T	σ_D	σ_C	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T \cup \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1	1	0	0,0026	0,0025	0,0051	0,0048	0,0049	0,0050	0,0050
			0,2	0,0025	0,0025	0,0049	0,0049	0,0066	0,0525	0,5484
			0,6	0,0027	0,0026	0,0052	0,0040	0,0238	0,2596	0,9903
			1	0,0027	0,0026	0,0053	0,0027	0,0960	0,4145	0,9991
			1,2	0,0025	0,0024	0,0049	0,0020	0,1686	0,4675	0,9996
			1,6	0,0026	0,0025	0,0051	0,0012	0,3770	0,5549	0,9999
			2	0,0026	0,0024	0,0050	0,0008	0,5889	0,6161	1,0000
0,5	1	1	0	0,0025	0,0024	0,0049	0,0052	0,0052	0,0049	0,0048
			0,2	0,0025	0,0024	0,0049	0,0050	0,0058	0,0067	0,0097
			0,6	0,0024	0,0023	0,0047	0,0041	0,0126	0,0210	0,1528
			1	0,0023	0,0024	0,0047	0,0031	0,0419	0,0521	0,5423
			1,2	0,0023	0,0023	0,0046	0,0025	0,0740	0,0723	0,6983
			1,6	0,0025	0,0025	0,0050	0,0016	0,1907	0,1142	0,8723
			2	0,0026	0,0025	0,0051	0,0010	0,3625	0,1586	0,9445
1	1	1	0	0,0025	0,0026	0,0051	0,0050	0,0053	0,0048	0,0047
			0,2	0,0026	0,0026	0,0053	0,0050	0,0054	0,0052	0,0058
			0,6	0,0025	0,0028	0,0053	0,0044	0,0080	0,0087	0,0194
			1	0,0027	0,0027	0,0054	0,0037	0,0168	0,0160	0,0860
			1,2	0,0027	0,0027	0,0054	0,0034	0,0256	0,0214	0,1539
			1,6	0,0027	0,0027	0,0054	0,0026	0,0598	0,0347	0,3461
			2	0,0027	0,0028	0,0055	0,0018	0,1251	0,0524	0,5445

Tabela 16 – Probabilidade de sinal para direção adicional - m=5 e $\alpha=0,0100$

σ_c em controle	σ_T	σ_D	σ_C	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T \cup \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1	1	0	0,0051	0,0050	0,0101	0,0100	0,0096	0,0096	0,0106
			0,2	0,0050	0,0049	0,0099	0,0097	0,0132	0,0786	0,6049
			0,6	0,0052	0,0050	0,0102	0,0081	0,0423	0,3197	0,9921
			1	0,0052	0,0047	0,0099	0,0051	0,1416	0,4735	0,9994
			1,2	0,0054	0,0048	0,0101	0,0042	0,2351	0,5283	0,9997
			1,6	0,0051	0,0048	0,0099	0,0027	0,4629	0,6091	0,9999
			2	0,0054	0,0048	0,0102	0,0019	0,6613	0,6662	1,0000
0,5	1	1	0	0,0052	0,0058	0,0109	0,0102	0,0101	0,0101	0,0098
			0,2	0,0050	0,0059	0,0109	0,0098	0,0112	0,0129	0,0177
			0,6	0,0050	0,0059	0,0109	0,0081	0,0232	0,0357	0,2030
			1	0,0051	0,0057	0,0108	0,0061	0,0679	0,0783	0,6011
			1,2	0,0049	0,0060	0,0109	0,0050	0,1135	0,1049	0,7432
			1,6	0,0049	0,0059	0,0108	0,0036	0,2571	0,1569	0,8953
			2	0,0049	0,0058	0,0106	0,0021	0,4407	0,2083	0,9544
1	1	1	0	0,0052	0,0055	0,0106	0,0100	0,0096	0,0100	0,0097
			0,2	0,0053	0,0055	0,0107	0,0100	0,0106	0,0106	0,0112
			0,6	0,0053	0,0053	0,0106	0,0090	0,0152	0,0160	0,0332
			1	0,0050	0,0055	0,0105	0,0075	0,0299	0,0282	0,1219
			1,2	0,0054	0,0053	0,0107	0,0066	0,0437	0,0359	0,2041
			1,6	0,0051	0,0053	0,0104	0,0052	0,0916	0,0554	0,4078
			2	0,0052	0,0053	0,0104	0,0039	0,1765	0,0790	0,6023

Das Tabelas (14), (15) e (16), conclui-se que:

- i. o gráfico na média da norma quadrática dos resíduos $\overline{\|\mathbf{r}\|^2}$ é capaz de detectar outras causas especiais de perturbação no processo, diferentes das causas consideradas mais frequentes, e que provoquem alterações no controle do processo em direções para fora do subespaço das direções de variação conhecidas;
- ii. quando menor for a variabilidade do erro aleatório em controle, melhor é o desempenho (sinaliza muito mais rápido essas alterações) do gráfico na média da norma quadrática dos resíduos $\overline{\|\mathbf{r}\|^2}$;

- iii. nesse caso, os gráficos de VMAX e de $\det(S)$ conseguem sinalizar que existe algo perturbando o processo, mas nada comparado ao desempenho de $\|\mathbf{r}\|^2$;
- iv. para os gráficos de S no conjunto das projeções $\hat{\mathbf{d}}$, verifica-se total incapacidade de detectar alterações no processo, pois esses gráficos se comportam como se o processo estivesse em controle;
- v. para esses casos, o gráfico da soma das variâncias VS apresenta um comportamento imprevisível, dependendo dos sinais dos elementos dos vetores formadores da estatística de controle suas probabilidades de sinal podem até mesmo diminuir. Nesses casos, não é recomendada a sua utilização.

Antes de propor o uso da média do quadrado da norma do vetor resíduo, foram testadas outras estatísticas que utilizam o vetor resíduo, para escolher a melhor estatística de controle a ser utilizada nesses casos. A saber, foram examinadas as seguintes estatísticas:

- o desvio absoluto médio do vetor diferença entre o vetor resíduo e o vetor resíduo médio;
- a média da norma quadrática do vetor diferença do resíduo ao resíduo médio;
- a norma quadrática do vetor resíduo médio;
- a variância do módulo do vetor diferença do resíduo ao resíduo médio e
- a variância da norma quadrática do vetor resíduo médio.

Verificou-se posteriormente que as estatísticas *média da norma quadrática do vetor diferença do resíduo ao resíduo médio* (segunda coluna das estatísticas apresentadas na Tabela (17)) e *variância do módulo do vetor diferença do resíduo ao resíduo médio* (quarta estatística da mesma tabela), eram na realidade a mesma estatística, fato que ficou comprovado nas probabilidades de sinal apresentadas na Tabela (17) para essas duas estatísticas. Além disso, dentre

as seis estatísticas simuladas, essas duas estatísticas apresentam um desempenho bastante próximo ao de $\overline{\|\mathbf{r}\|^2}$, mas sem superar o desempenho de $\overline{\|\mathbf{r}\|^2}$. Dessa forma, a média da norma quadrática dos resíduos $\overline{\|\mathbf{r}\|^2}$ foi a estatística escolhida para desempenhar o papel de sinalizar aumentos na variância dos erros aleatórios e sinalizar perturbações provenientes de fontes de variação ainda não identificadas.

Tabela 17 – Probabilidade de sinal para resíduos - m=5 e $\alpha=0,0027$

σ_e em controle	σ_T	σ_D	σ_C	DAM	$\overline{\ \mathbf{dif}\ ^2}$	$\overline{\ \mathbf{r}\ ^2}$	$\text{Var}(\overline{\ \mathbf{dif}\ ^2})$	$\text{Var}(\overline{\ \mathbf{r}\ ^2})$	$\overline{\ \mathbf{r}\ ^2}$
0,1	1	1	0	0,0027	0,0028	0,0027	0,0027	0,0028	0,0029
			0,2	0,2086	0,4234	0,1449	0,4219	0,1726	0,5005
			0,6	0,8005	0,9705	0,5902	0,9704	0,6997	0,9881
			1	0,9206	0,9956	0,7440	0,9955	0,8530	0,9988
			1,2	0,9443	0,9977	0,7869	0,9977	0,8882	0,9996
			1,6	0,9682	0,9993	0,8385	0,9993	0,9288	0,9999
			2	0,9791	0,9997	0,8704	0,9997	0,9501	0,9999
0,5	1	1	0	0,0026	0,0028	0,0027	0,0028	0,0028	0,0025
			0,2	0,0046	0,0056	0,0044	0,0056	0,0044	0,0054
			0,6	0,0500	0,1024	0,0393	0,1024	0,0442	0,1191
			1	0,2088	0,4239	0,1460	0,4239	0,1720	0,4937
			1,2	0,3090	0,5771	0,2110	0,5771	0,2524	0,6577
			1,6	0,4850	0,7823	0,3279	0,7823	0,3972	0,8528
			2	0,6185	0,8851	0,4269	0,8851	0,5165	0,9336
1	1	1	0	0,0027	0,0026	0,0028	0,0026	0,0028	0,0024
			0,2	0,0030	0,0032	0,0030	0,0032	0,0032	0,0031
			0,6	0,0078	0,0113	0,0072	0,0113	0,0073	0,0120
			1	0,0284	0,0542	0,0236	0,0542	0,0256	0,0619
			1,2	0,0505	0,1013	0,0389	0,1013	0,0438	0,1205
			1,6	0,1189	0,2491	0,0848	0,2491	0,0989	0,2955
			2	0,2119	0,4233	0,1447	0,4233	0,1727	0,4949

6 Considerações finais

6.1

Conclusões

Maranhão e Epprecht (2011) dedicaram-se a desenvolver um esquema de controle destinado a sinalizar alterações na média das variáveis latentes de processos multivariados. Inspirado tanto no trabalho desses autores quanto no conhecimento de que aumentos na variância dos processos têm impacto na qualidade destes, tão ou mais acentuado que as alterações na média dos processos, foi proposto nesta Tese, com o objetivo de monitorar aumentos na variância das variáveis latentes, um esquema de controle baseado em projeções do vetor de variáveis observáveis em direções específicas, direções estas associadas a variações nas variáveis latentes do processo.

Assim, este estudo apresentou um esquema de controle que pode ser aplicado em processos cuja estrutura de correlação entre as variáveis observáveis se deve ao fato que as perturbações ocorridas nestas variáveis são efeito de outras perturbações provenientes de variáveis não observáveis.

Para efeito de desempenho do esquema aqui desenvolvido, foram realizadas simulações de um caso prático, no qual o desempenho do esquema proposto foi comparado com o desempenho de outros esquemas de controle da variância. O desempenho foi medido pela probabilidade de alarmes verdadeiros em cada um dos gráficos: Shewhart no desvio-padrão das projeções propostas; somatório de variâncias VS; máxima variância amostral VMAX; e variância amostral generalizada $\det(S)$, além de Shewhart na média da norma quadrática dos resíduos.

O caso prático estudado foi a colocação do vidro traseiro na estrutura de um automóvel. O nível de qualidade dessa colocação foi medido em algumas posições de folga entre o vidro e a estrutura, gerando as variáveis observáveis. As

simulações dos casos foram realizadas supondo aumentos da variância nas direções conhecidas e/ou no erro aleatório das diversas combinações possíveis.

Verificou-se a baixa sensibilidade de sinalização na detecção de alterações na variância do processo provocadas por uma nova fonte de variação atuando ao longo do processo. Nesse caso, o usuário, ao analisar o gráfico de S nas projeções propostas, não perceberia nenhuma modificação substancial no processo. Assim, foi proposto também o monitoramento na média da norma quadrática dos resíduos, a fim de reconhecer a existência da nova fonte de variação e, ao mesmo tempo, identificá-la.

As projeções do vetor de variáveis observáveis nas direções atribuíveis permitem induzir as alterações em termos de componentes independentes, correspondentes a fontes naturais de variação do processo, bem como estabelecer gráficos de controle para detectar aumento de variação em cada uma dessas fontes de variação, separadamente.

A identificação dessas fontes é fator de sucesso para a qualidade do produto, pois permite corrigir, em tempo, fontes tais como falha nos sensores de medição; mau posicionamento de braços robóticos; erro nas dimensões geométricas das peças a serem ajustadas; ou erros aleatórios ao processo.

Com base no desenvolvimento do esquema proposto e nos resultados de desempenho dos diversos gráficos obtidos por simulação, chegou-se às seguintes conclusões:

- I. o esquema proposto é bastante simples de ser implementado, pois basta que o usuário tenha conhecimento da matriz C , de dimensão $p \times q$, das direções atribuíveis de variação mais frequentes, e projetar os n vetores de dimensão p das variáveis observáveis, obtidos a partir de uma amostra de tamanho maior que 1, nessas direções atribuíveis. Com os n vetores de dimensão q , resultantes dessa projeção, são calculados os q desvios-padrão dos q elementos dos n vetores resultantes. Após esse procedimento, é só plotar o resultado no gráfico e verificar o comportamento do processo;

- II. desde que se tenha conhecimento das direções atribuíveis, o esquema proposto constitui uma alternativa viável, ao sinalizar possíveis desvios no processo e, ao mesmo tempo, identificar a variável latente cuja dispersão aumentou. Desta forma, é possível controlar o que se vê e o que não se vê;
- III. o número de gráficos individuais do esquema proposto depende apenas do número de direções atribuíveis determinado pelo usuário. Além disso, não há restrição de número de variáveis observáveis e nem restrição de não-correlacionamento entre elas, pois o esquema proposto opera com direções atribuíveis ortogonais associadas a cada uma das variáveis latentes;
- IV. dentre os esquemas analisados, VMAX e Det(S), por terem suas estatísticas determinadas diretamente pelas variáveis observáveis, não se mostraram à altura dos esquemas das projeções propostas e do somatório da variância VS, calculados em função das variáveis latentes;
- V. praticamente em todos os casos analisados, o esquema do somatório da variância VS apresentou uma probabilidade de sinal muito boa, na maioria das vezes superior ao esquema proposto. Nesses casos, a desvantagem em relação ao esquema proposto, consiste no fato de que o gráfico de VS, ao sinalizar uma alteração no processo, não identifica a variável latente cuja dispersão aumentou;
- VI. no caso do surgimento de nova direção atribuível ainda não identificada pelo usuário, o gráfico do somatório da variância VS, além de não apresentar probabilidade de sinal satisfatória, revela um comportamento anômalo nas sinalizações. As projeções propostas também não apresentam boa sinalização, pois são muito lentas na identificação dessas alterações. Nesses casos, o esquema soberano é o da média da norma quadrática dos resíduos;

- VII. por não saber quando o processo será influenciado por nova fonte de variação ainda não identificada, o gráfico do somatório de variâncias VS não é indicado para controlar esse tipo de processo;
- VIII. essas conclusões tornam o monitoramento conjunto, nas projeções \hat{d} e na média da norma quadrática dos resíduos $\|r\|^2$, soberano na detecção de novas causas especiais.

Assim, o esquema proposto nesta Tese procura *facilitar* o controle de qualidade através da utilização de projeções do vetor de variáveis observáveis na direção atribuível associada às variáveis latentes. Essas variáveis latentes carregam informações sobre as fontes originais de variação, intrínsecas ao processo, e permitem o controle de cada componente da dispersão do processo, correspondente a cada uma dessas fontes de variação.

O esquema proposto é matematicamente simples e fácil de implementar; assim, espera-se que seja realmente aplicado em processos industriais, pois conforme Woodall (2000) manifestou em seu artigo sobre Controvérsias e Contradições no Controle Estatístico do Processo: “*Espera-se que os usuários entendam melhor como a pesquisa em CEP pode melhorar o uso dos métodos na prática. Além disso, espera-se que os pesquisadores em CEP entendam melhor como os seus modelos se encaixam no contexto de uma estratégia global de CEP*”.

6.2

Sugestões para Pesquisa Futura

No que diz respeito a trabalhos futuros no âmbito da temática desenvolvida nesta Tese, considerou-se relevante desenvolver estudos de extensão na seguintes linhas de trabalho:

- i. verificar o comportamento do esquema proposto para diversas razões entre o número de variáveis observáveis p e o número de variáveis latentes q , com o objetivo de identificar a razão ótima de trabalho do gráfico de S nas projeções propostas;
- ii. desenvolver esquema de controle para projeção do vetor de variáveis observáveis em direções atribuíveis não ortogonais entre si; e
- iii. desenvolver metodologia de obtenção dos vetores colunas da matriz K para o caso de surgir uma ou mais direções atribuíveis ainda não identificadas pelo usuário.

7

Referências bibliográficas

ALT, F. B. Multivariate control charts. In: KOTZ, S.; JOHNSON, N. L. (Ed.). **Encyclopedia of Statistical Sciences**. New Jersey: Wiley, 1985.

_____; BEDEWI, G. E. SPC for dispersion for multivariate data. In: ASQC QUALITY CONGRESS TRANSACTIONS, 40th, 1986, Anaheim, CA. [Proceedings...] Anaheim, CA: [ASQC], 1986. p. 248-254.

_____; SMITH, N. D. Multivariate process control. In: KRISNAIAH, P. R.; RAO, C. R. (Ed.). **Handbook of Statistic**. New York: Elsevier, 1988. p. 331-351.

ANDERSON, T. W. **Introduction to multivariate statistical analysis**. New York: Wiley, 1984.

APARISI, F.; JABALOYES, J.; CARRIÓN, A. Statistical properties of the $|S|$ multivariate control chart. **Communication in Statistics – Theory and Methods**, Oxford, v. 28, n.11, p. 2671-2686, 1999.

APARISI, F.; JABALOYES, J.; CARRIÓN, A. Generalized variance chart design with adaptive sample sizes. The bivariate case. **Communication in Statistics – Simulation and Computation**, v.30, p.931-948, 2001.

APLEY, W. Daniel; DING, Yu. A characterization of diagnosability conditions for variance components analysis in assembly operations. **IEEE Transactions on Automation Science and Engineering**, New Jersey, v.2, n.2, p. 101-110, Apr. 2005.

_____; LEE, H. Young. Identifying spatial variation patterns in multivariate manufacturing processes: a blind separation approach. **Technometrics**, Virginia, v. 45, n. 3, p. 220-234, Aug. 2003.

_____; SHI, JIANJUN. A factor-analysis method for diagnosing variability in multivariate manufacturing processes. **Technometrics**, Virginia, v.43, n.1, p. 84-95, Feb. 2001.

BARTON, R. R.; GONZALEZ-BARRETO, D. R. Process-oriented basis representations for multivariate process diagnostics. **Quality Engineering**, Pennsylvania, v. 9, n. 1, p. 107-118, Sept. 1996.

BERSIMIS, S.; PSARAKIS, S.; PANERETOS, J. Multivariate statistical process control charts: an overview. **Quality & Reliability Engineering International**, Oxford, v. 23, n. 5, p. 517-543, Aug. 2007.

COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. **Controle estatístico de qualidade**. 2.ed. São Paulo: Atlas, 2005. 334 p.

_____; MACHADO, M. A. G. A new chart based on the sample variances for monitoring the covariance matrix of multivariate processes. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, Arlington, v. 41, n. 7-8, p. 770-779, 2009.

DING, Y.; GEGLAREK, D.; SHI, J. Modeling and diagnosis of multistage manufacturing processes: part I: state space model. In: JAPAN/USA SYMPOSIUM ON FLEXIBLE AUTOMATION, 2000. [S.l.: s.n.], 2000.

_____; ZHOU, S.; Chen, Y. A comparison of process variance estimation methods for in-process dimensional measurement and control. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, New York, v. 127, n.1, p. 69-79, Mar. 2005.

DJAUHARI, M. A. Asymptotic distribution of sample covariance determinant. **Matematika**, Malaysian, v. 25, n. 1, p. 79-85, 2009.

_____. Improved monitoring of multivariate process variability. **Journal of Quality Technology**, Wisconsin, v. 37, n.1, p. 32-39, Jan. 2005.

GHUTE, V. B.; SHIRKE, D. T. A multivariate synthetic control chart for process dispersion. **Quality Technology & Quantitative Management**, Taiwan, v. 5, n. 3, p. 271-288, 2008.

GONZÁLEZ, I.; SÁNCHEZ, I. Principal alarms in multivariate statistical process control using independent component analysis. **International Journal of Production Research**, Oxon, v. 46, n. 22, p. 6345-6366, 2008.

HAO, S.; ZHOW, S.; DING, Y. Multivariate process variability monitoring through projection, **Journal of Quality Technology**, Wisconsin, v. 40, n. 2, p. 214-226, 2008.

HAWKINS, D. M. Multivariate quality control based on regression – adjustes variables. **Technometrics**, Virginia, v. 33, n. 1, p. 61-75, Feb. 1991.

HEALY, J. D. A note on multivariate CUSUM procedures. **Technometrics**, Virginia, v. 29, n. 4, p. 409-412, Nov. 1987.

HOTELLING, H. **Multivariate methods in testing complex equipment**. North Carolina: Institute of Statistics, May 1954. (Mimeograph Series, n. 106).

_____.Multivariate quality control, illustrated by the air testing of sample bombsights. In: _____. **Selected Techniques of Statistical Analysis**. New York: McGraw Hill, 1947. p. 111-184.

HU, S. Jack; WU, S. M. Identifying sources of variation in automobile body assembly using principal component analysis. **Transactions of NAMRI/SME**, Michigan, v. 20, 1992.

HUANG, Q.; ZHOU, N.; SHI, J. Stream of variation modeling and diagnosis of multi-station machining processes. In: ASME INTERNATIONAL MECHANICAL ENGINEERING CONGRESS & EXPOSITION, 2000, Orlando, FL. [**Proceedings...**], Orlando, FL: ASME, 2000. v. 11, p. 81–88.

JIN, J.; SHI, J. State space modeling of sheet metal assembly for dimensional control. **Journal of Manufacturing and Engineering - Transation of ASME**, Michigan, v. 121, n. 4, p. 756-762, Nov. 1999.

KONG, Z. Stream of variation analysis for multiple station assembly process with consideration of various tolerance modes. **Transactions of NAMRI**, Wisconsin, v. 34, p. 469-476, 2006.

LEE, H. Y., APLEY, W. Daniel. Diagnosing manufacturing variation using second-order and fourth-order statistics. **International Journal of Flexible Manufacturing Systems**, New York, v. 16, n. 1, p. 45-64, 2004.

LOWRY, C. A.; MONTGOMERY, D. C. A review of multivariate control charts. **IIE Transactions**, Oxon, v. 27, n. 6, p. 800-810, 1995.

MACHADO, M. A. Gráficos de controle para monitoramento de processos multivariados. 2009. 158f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2009.

MANTRIPRAGADA, R.; WHITNEY, D. E. Modeling and controlling variation propagation in mechanical assemblies using state transition models. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, New Jersey, v. 15, n.1, p. 124-140, 1999.

MARANHÃO, P. H. Gráficos de controle de variáveis transformadas para monitoramento de processos multivariados. 2012. 121f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

MARANHÃO, P. H.; EPPRECHT, E. K. O uso de variáveis transformadas no controle estatístico de processos multivariados. **PODes**, Rio de Janeiro, v. 3, n. 3, p. 201-217, set./dez. 2011.

MARTIN, E. B.; MORRIS, A. J.; ZHANG, J. Process performance monitoring using multivariate statistical process control. **IEE Proceedings - Control Theory and Applications**, London, v. 143, n. 2, p. 132, Mar. 1996.

MASON, R. L.; YOUNG, J. C. **Multivariate statistical process control with industrial applications**. Philadelphia: ASA-SIAM, 2002. 263p. (ASA-SIAM Series on Statistics and Applied Mathematics)

MONTGOMERY, D. C. **Introduction to statistical quality control**. 4th ed. New York: John Wiley Sons, 2001.

_____; WADSWORTH Jr., H. M. Some techniques for multivariate quality control applications. In: ASQC TECHNICAL CONFERENCE TRANSACTIONS, 1972, Washington, DC. [**Proceedings...**] Washington, DC: [ASQC], 1972.

NOMIKOS, P.; MACGREGOR, J. F. Multivariate SPC charts for monitoring batch process. **Technometrics**, Virginia, v. 37, n. 1, p.41-59, Feb. 1995,

RUNGER, G. C. Projections and the U2 Multivariate Control Chart. **Journal of Quality Technology**, Wisconsin, v. 28, n. 3, p.313-319, 1996.

_____; MONTGOMERY, D. C. Multivariate and univariate process control: geometry and shift directions. **Quality and Reliability Engineering International**, New York, v. 13, n. 3, p. 909-922, Dec. 1997.

SCHOTT, J. R. **Matrix analysis for statistics**. New York: Wiley, 2005.

SHAN, Xuemei; APLEY, W. Daniel. Blind identification of manufacturing variation patterns by combining source separation criteria. **Technometrics**, Virginia, v. 50, n. 3, p. 332-343, Aug. 2008.

STOUMBOS, Z. G. et al. The state of statistical process control as we proceed into the 21st century. **Journal of the American Statistical Association**, Virginia, v. 95, n. 451, p. 992-998, Sept. 2000.

SULLIVAN, J. H.; WOODALL, W. H. Change-point detection of mean vector or covariance matrix shifts using multivariate individual observations. **IIE Transactions on Quality and Reliability Engineering**, Oxon, v. 32, n. 6, p. 537-549, 2000.

WOODALL, H. W. Controversies and contradictions in statistical process control. **Journal of Quality Technology**, Wisconsin, v. 32, n. 4, p. 341-350, Oct. 2000.

_____; MONTGOMERY, D. C. Research issues and ideas in statistical process control. **Journal of Quality Technology**, Wisconsin, v. 31, n. 4, p. 376-386, Oct. 1999.

YEH, A. B.; LIN, D. K. J.; MCGRATH, R. N. Multivariate control charts for monitoring covariance matrix: a review. **Quality Technology and Quantitative Management**, Wisconsin, v. 3, p. 415-436, 2006.

ZHOU, S.; HUANG, Q.; SHI, J. State space modeling of dimensional variation propagation in multistage machining process using differential motion vectors. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, New Jersey, v. 19, n. 2, p. 296-309, Apr. 2003.

APÊNDICE

Probabilidade de alarmes verdadeiros nas projeções propostas e nos esquemas concorrentes para amostras de tamanho 15 para os diversos casos estudados.

Uma única direção atribuível e quatro variáveis observáveis

Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - $m=15$ e $\alpha=0,0027$

σ_c em controle	σ_D	\hat{a}_D	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1,5	0,3996	0,3894	0,3848	0,0487	0,0026
	2	0,8737	0,8702	0,8659	0,1828	0,0026
	2,5	0,9814	0,9804	0,9797	0,3646	0,0027
	3	0,9970	0,9971	0,9968	0,5373	0,0027
	3,5	0,9995	0,9994	0,9995	0,6762	0,0027
0,5	1,5	0,2723	0,2789	0,1700	0,0351	0,0025
	2	0,7756	0,7798	0,6395	0,1340	0,0028
	2,5	0,9544	0,9558	0,9031	0,2849	0,0025
	3	0,9913	0,9921	0,9778	0,4465	0,0027
	3,5	0,9983	0,9983	0,9951	0,5889	0,0027
1	1,5	0,1201	0,1167	0,0316	0,0179	0,0027
	2	0,5113	0,5034	0,1810	0,0656	0,0027
	2,5	0,8243	0,8206	0,4750	0,1520	0,0026
	3	0,9491	0,9476	0,7427	0,2683	0,0028
	3,5	0,9861	0,9861	0,8934	0,3918	0,0028

Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - m=15 e $\alpha=0,0050$

σ_e em controle	σ_D	\hat{a}_D	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1,5	0,4477	0,4506	0,4447	0,0715	0,0050
	2	0,8936	0,8948	0,8918	0,2353	0,0052
	2,5	0,9852	0,9850	0,9848	0,4316	0,0050
	3	0,9977	0,9979	0,9977	0,6045	0,0050
	3,5	0,9996	0,9997	0,9996	0,7329	0,0050
0,5	1,5	0,3421	0,3349	0,2196	0,0524	0,0050
	2	0,8216	0,8166	0,6961	0,1782	0,0052
	2,5	0,9674	0,9658	0,9250	0,3477	0,0049
	3	0,9942	0,9940	0,9841	0,5162	0,0052
	3,5	0,9989	0,9989	0,9964	0,6526	0,0048
1	1,5	0,1613	0,1537	0,0484	0,0291	0,0050
	2	0,5730	0,5630	0,2348	0,0936	0,0050
	2,5	0,8585	0,8532	0,5443	0,2013	0,0050
	3	0,9612	0,9591	0,7916	0,3308	0,0050
	3,5	0,9898	0,9894	0,9187	0,4624	0,0048

Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - m=15 e $\alpha=0,0100$

σ_e em controle	σ_D	\hat{a}_D	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1,5	0,5304	0,5247	0,5187	0,1082	0,0104
	2	0,9227	0,9216	0,9184	0,3084	0,0100
	2,5	0,9900	0,9894	0,9893	0,5158	0,0105
	3	0,9986	0,9985	0,9985	0,6809	0,0104
	3,5	0,9998	0,9997	0,9997	0,7947	0,0101
0,5	1,5	0,4081	0,4087	0,2880	0,0829	0,0100
	2	0,8578	0,8575	0,7583	0,2422	0,0098
	2,5	0,9756	0,9755	0,9458	0,4302	0,0101
	3	0,9960	0,9958	0,9892	0,5983	0,0101
	3,5	0,9992	0,9992	0,9976	0,7247	0,0101
1	1,5	0,2092	0,2126	0,0773	0,0482	0,0100
	2	0,6329	0,6324	0,3094	0,1372	0,0098
	2,5	0,8873	0,8875	0,6243	0,2682	0,0101
	3	0,9714	0,9714	0,8428	0,4135	0,0101
	3,5	0,9925	0,9924	0,9421	0,5466	0,0100

Duas direções atribuíveis e quatro variáveis observáveis

Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - $m=15$ e $\alpha=0,0027$

σ_e em controle	σ_T	σ_D	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1,5	1	0,3284	0,0013	0,3294	0,2450	0,1622	0,0484	0,0027
	2	1	0,8389	0,0013	0,8391	0,7620	0,6522	0,1831	0,0028
	1,5	1,5	0,3292	0,3291	0,5500	0,6896	0,5763	0,2680	0,0025
	2	1,5	0,8378	0,3291	0,8906	0,9374	0,8919	0,5342	0,0025
	2	2	0,8379	0,8389	0,9738	0,9907	0,9805	0,7739	0,0028
0,5	1,5	1	0,2239	0,0012	0,2249	0,1627	0,0850	0,0351	0,0026
	2	1	0,7347	0,0014	0,7351	0,6357	0,4467	0,1348	0,0026
	1,5	1,5	0,2245	0,2253	0,3991	0,5357	0,3563	0,1853	0,0027
	2	1,5	0,7353	0,2244	0,7948	0,8647	0,7285	0,4072	0,0027
	2	2	0,7337	0,7352	0,9293	0,9698	0,9161	0,6554	0,0026
1	1,5	1	0,0848	0,0014	0,0861	0,0607	0,0240	0,0178	0,0027
	2	1	0,4441	0,0014	0,4448	0,3375	0,1372	0,0653	0,0028
	1,5	1,5	0,0858	0,0853	0,1639	0,2366	0,0952	0,0746	0,0025
	2	1,5	0,4426	0,0854	0,4900	0,5662	0,2873	0,1888	0,0025
	2	2	0,4405	0,4415	0,6877	0,8020	0,5241	0,3638	0,0028

Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - $m=15$ e $\alpha=0,0050$

σ_e em controle	σ_T	σ_D	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1,5	1	0,3822	0,0024	0,3837	0,3007	0,2132	0,0713	0,0050
	2	1	0,8663	0,0024	0,8666	0,8000	0,7094	0,2331	0,0052
	1,5	1,5	0,3824	0,3824	0,6183	0,7438	0,6452	0,3310	0,0048
	2	1,5	0,8661	0,3824	0,9175	0,9535	0,9200	0,6005	0,0050
	2	2	0,8659	0,8666	0,9823	0,9936	0,9871	0,8203	0,0049
0,5	1,5	1	0,2701	0,0024	0,2719	0,2064	0,1188	0,0523	0,0048
	2	1	0,7744	0,0025	0,7750	0,6881	0,5163	0,1776	0,0049
	1,5	1,5	0,2715	0,2724	0,4698	0,5993	0,4294	0,2367	0,0048
	2	1,5	0,7751	0,2722	0,8361	0,8939	0,7838	0,4769	0,0048
	2	2	0,7750	0,7753	0,9493	0,9779	0,9400	0,7139	0,0046
1	1,5	1	0,1134	0,0026	0,1157	0,0856	0,0384	0,0287	0,0050
	2	1	0,4969	0,0024	0,4982	0,3932	0,1828	0,0929	0,0052
	1,5	1,5	0,1140	0,1132	0,2144	0,2928	0,1332	0,1054	0,0048
	2	1,5	0,4961	0,1135	0,5530	0,6256	0,3544	0,2407	0,0050
	2	2	0,4983	0,4968	0,7474	0,8412	0,5990	0,4327	0,0049

Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - $m=15$ e $\alpha=0,0100$

σ_c em controle	σ_T	σ_D	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T U \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1,5	1	0,4507	0,0049	0,4533	0,3717	0,2853	0,1077	0,0096
	2	1	0,8956	0,0051	0,8962	0,8435	0,7746	0,3063	0,0101
	1,5	1,5	0,4515	0,4501	0,6983	0,8008	0,7229	0,4128	0,0100
	2	1,5	0,8959	0,4495	0,9423	0,9683	0,9468	0,6782	0,0102
	2	2	0,8949	0,8955	0,9891	0,9959	0,9921	0,8672	0,0098
0,5	1,5	1	0,3338	0,0050	0,3373	0,2712	0,1726	0,0830	0,0101
	2	1	0,8181	0,0048	0,8189	0,7465	0,6003	0,2425	0,0097
	1,5	1,5	0,3350	0,3340	0,5571	0,6719	0,5190	0,3098	0,0100
	2	1,5	0,8171	0,3338	0,8781	0,9226	0,8415	0,5589	0,0097
	2	2	0,8170	0,8177	0,9664	0,9853	0,9603	0,7788	0,0097
1	1,5	1	0,1549	0,0049	0,1590	0,1252	0,0629	0,0482	0,0096
	2	1	0,5652	0,0051	0,5674	0,4675	0,2513	0,1367	0,0101
	1,5	1,5	0,1557	0,1552	0,2865	0,3664	0,1920	0,1530	0,0100
	2	1,5	0,5652	0,1538	0,6319	0,6939	0,4452	0,3162	0,0102
	2	2	0,5640	0,5635	0,8095	0,8810	0,6851	0,5164	0,0098

Duas direções atribuíveis e oito variáveis observáveis

Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - $m=15$ e $\alpha=0,0027$

σ_c em controle	σ_T	σ_D	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T U \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1,5	1	0,3378	0,0014	0,3387	0,2462	0,2022	0,0184	0,0027
	2,0	1	0,8443	0,0014	0,8446	0,7597	0,7256	0,0540	0,0026
	1,5	1,5	0,3394	0,3313	0,5590	0,6907	0,5912	0,0778	0,0028
	2,0	1,5	0,8430	0,3304	0,8946	0,9389	0,8994	0,1692	0,0026
	2,0	2,0	0,8433	0,8398	0,9750	0,9909	0,9816	0,3060	0,0027
	2,5	2,0	0,9751	0,8404	0,9960	0,9987	0,9972	0,4337	0,0027
	3,0	3,0	0,9961	0,9960	1,0000	1,0000	1,0000	0,7596	0,0026
0,5	1,5	1	0,2162	0,0015	0,2173	0,1647	0,0788	0,0148	0,0027
	2,0	1	0,7268	0,0015	0,7272	0,6371	0,4520	0,0411	0,0026
	1,5	1,5	0,2167	0,2297	0,3966	0,5378	0,2637	0,0549	0,0028
	2,0	1,5	0,7278	0,2292	0,7895	0,8660	0,6577	0,1201	0,0028
	2,0	2,0	0,7291	0,7373	0,9285	0,9711	0,8590	0,2244	0,0028
	2,5	2,0	0,9406	0,7400	0,9846	0,9946	0,9645	0,3375	0,0027
	3,0	3,0	0,9884	0,9895	0,9999	1,0000	0,9996	0,6654	0,0027
1,0	1,5	1	0,0859	0,0013	0,0870	0,0634	0,0161	0,0091	0,0026
	2,0	1	0,4427	0,0013	0,4434	0,3419	0,0974	0,0227	0,0027
	1,5	1,5	0,0864	0,0836	0,1627	0,2401	0,0444	0,0255	0,0026
	2,0	1,5	0,4442	0,0830	0,4903	0,5726	0,1682	0,0557	0,0027
	2,0	2,0	0,4436	0,4393	0,6878	0,8087	0,3043	0,1075	0,0027
	2,5	2,0	0,7821	0,4386	0,8774	0,9365	0,5670	0,1727	0,0028
	3,0	3,0	0,9328	0,9317	0,9952	0,9986	0,9395	0,4387	0,0025

Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - $m=15$ e $\alpha=0,0050$

σ_e em controle	σ_T	σ_D	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T U \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1,5	1	0,3828	0,0027	0,3844	0,3005	0,2541	0,0291	0,0051
	2,0	1	0,8675	0,0027	0,8678	0,8014	0,7736	0,0781	0,0051
	1,5	1,5	0,3826	0,3854	0,6207	0,7432	0,6562	0,1093	0,0049
	2,0	1,5	0,8671	0,3850	0,9182	0,9538	0,9238	0,2192	0,0049
	2,0	2,0	0,8666	0,8679	0,9823	0,9936	0,9878	0,3714	0,0049
	2,5	2,0	0,9801	0,8682	0,9973	0,9992	0,9982	0,5038	0,0050
	3,0	3,0	0,9968	0,9969	1,0000	1,0000	1,0000	0,8081	0,0050
0,5	1,5	1	0,2662	0,0028	0,2683	0,2098	0,1098	0,0236	0,0051
	2,0	1	0,7708	0,0028	0,7714	0,6892	0,5168	0,0618	0,0050
	1,5	1,5	0,2664	0,2775	0,4698	0,6005	0,3302	0,0796	0,0050
	2,0	1,5	0,7704	0,2787	0,8344	0,8952	0,7186	0,1620	0,0050
	2,0	2,0	0,7696	0,7791	0,9493	0,9786	0,8948	0,2846	0,0049
	2,5	2,0	0,9537	0,7793	0,9899	0,9963	0,9752	0,4058	0,0050
	3,0	3,0	0,9910	0,9916	0,9999	1,0000	0,9998	0,7249	0,0050
1,0	1,5	1	0,1209	0,0024	0,1231	0,0882	0,0260	0,0154	0,0049
	2,0	1	0,5101	0,0026	0,5113	0,4003	0,1350	0,0358	0,0049
	1,5	1,5	0,1207	0,1114	0,2183	0,2990	0,0668	0,0398	0,0048
	2,0	1,5	0,5102	0,1127	0,5654	0,6337	0,2216	0,0810	0,0049
	2,0	2,0	0,5098	0,4961	0,7527	0,8470	0,3790	0,1476	0,0050
	2,5	2,0	0,8245	0,4948	0,9112	0,9518	0,6366	0,2252	0,0048
	3,0	3,0	0,9488	0,9458	0,9973	0,9992	0,9584	0,5087	0,0050

Probabilidade de sinal nos esquemas avaliados - $m=15$ e $\alpha=0,0100$

σ_e em controle	σ_T	σ_D	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T U \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1,5	1	0,4459	0,0046	0,4485	0,3736	0,3255	0,0492	0,0099
	2,0	1	0,8929	0,0048	0,8933	0,8436	0,8228	0,1182	0,0100
	1,5	1,5	0,4456	0,4437	0,6921	0,8003	0,7313	0,1590	0,0099
	2,0	1,5	0,8928	0,4435	0,9406	0,9682	0,9486	0,2912	0,0100
	2,0	2,0	0,8931	0,8924	0,9888	0,9959	0,9927	0,4564	0,0100
	2,5	2,0	0,9847	0,8932	0,9982	0,9995	0,9990	0,5892	0,0099
	3,0	3,0	0,9976	0,9977	1,0000	1,0000	1,0000	0,8595	0,0099
0,5	1,5	1	0,3376	0,0045	0,3406	0,2715	0,1568	0,0405	0,0097
	2,0	1	0,8181	0,0046	0,8188	0,7458	0,5919	0,0956	0,0100
	1,5	1,5	0,3362	0,3270	0,5533	0,6741	0,4185	0,1198	0,0102
	2,0	1,5	0,8187	0,3262	0,8780	0,9231	0,7842	0,2252	0,0103
	2,0	2,0	0,8180	0,8130	0,9662	0,9856	0,9293	0,3667	0,0101
	2,5	2,0	0,9666	0,8128	0,9936	0,9978	0,9849	0,4929	0,0099
	3,0	3,0	0,9938	0,9936	1,0000	1,0000	0,9999	0,7916	0,0097
1,0	1,5	1	0,1567	0,0051	0,1609	0,1284	0,0446	0,0281	0,0099
	2,0	1	0,5670	0,0051	0,5692	0,4758	0,1907	0,0592	0,0100
	1,5	1,5	0,1572	0,1558	0,2883	0,3759	0,1049	0,0657	0,0098
	2,0	1,5	0,5670	0,1546	0,6338	0,7045	0,2984	0,1222	0,0101
	2,0	2,0	0,5671	0,5642	0,8114	0,8863	0,4728	0,2051	0,0100
	2,5	2,0	0,8553	0,5658	0,9372	0,9667	0,7209	0,2973	0,0098
	3,0	3,0	0,9601	0,9598	0,9984	0,9995	0,9746	0,5947	0,0098

Duas direções atribuíveis, quatro variáveis observáveis com desvio-padrão do erro variável

Probabilidade de sinal para σ_e fora de controle - $m=15$ e $\alpha=0,0027$

σ_e	σ_T	σ_D	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T U \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1	1	0,0014	0,0014	0,0028	0,0028	0,0027	0,0028	0,0027
0,15	1	1	0,0016	0,0016	0,0032	0,0032	0,0040	0,2837	0,7279
0,2	1	1	0,0018	0,0018	0,0036	0,0037	0,0064	0,7985	0,9939
0,15	1,5	1	0,3345	0,0015	0,3355	0,2511	0,1887	0,6526	0,7267
0,15	1,5	1,5	0,3325	0,3348	0,5564	0,6925	0,6077	0,9022	0,7281
0,2	1	1,5	0,0020	0,3414	0,3426	0,2575	0,2200	0,9562	0,9943
0,2	1,5	1,5	0,3428	0,3405	0,5663	0,6964	0,6435	0,9942	0,9942
0,5	1	1	0,0013	0,0013	0,0027	0,0026	0,0026	0,0027	0,0027
0,75	1	1	0,0133	0,0135	0,0266	0,0207	0,0957	0,4786	0,7254
1	1	1	0,0778	0,0781	0,1501	0,0917	0,5682	0,9643	0,9940
0,75	1,5	1	0,3336	0,0137	0,3428	0,2598	0,3915	0,7387	0,7270
0,75	1,5	1,5	0,3336	0,3333	0,5561	0,6125	0,7034	0,9040	0,7266
1	1	1,5	0,0780	0,4830	0,5233	0,3938	0,8212	0,9893	0,9939
1	1,5	1,5	0,4836	0,4821	0,7321	0,6916	0,9394	0,9973	0,9942
1	1	1	0,0014	0,0014	0,0027	0,0026	0,0027	0,0026	0,0027
1,5	1	1	0,0857	0,0855	0,1640	0,0993	0,4287	0,7127	0,7271
2	1	1	0,4415	0,4428	0,6888	0,3821	0,9760	0,9966	0,9940
1,5	1,5	1	0,3337	0,0851	0,3903	0,2724	0,6051	0,8240	0,7286
1,5	1,5	1,5	0,3339	0,3327	0,5558	0,4789	0,7512	0,9014	0,7276
2	1	1,5	0,4418	0,6627	0,8119	0,5421	0,9876	0,9983	0,9941
2	1,5	1,5	0,6636	0,6636	0,8863	0,6805	0,9939	0,9991	0,9941

Probabilidade de sinal para σ_e fora de controle - $m=15$ e $\alpha=0,0050$

σ_e	σ_T	σ_D	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T U \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1	1	0,0025	0,0024	0,0049	0,0050	0,0049	0,0049	0,0048
0,15	1	1	0,0030	0,0029	0,0058	0,0056	0,0072	0,3460	0,7769
0,2	1	1	0,0034	0,0035	0,0069	0,0068	0,0110	0,8411	0,9961
0,15	1,5	1	0,3881	0,0028	0,3898	0,3046	0,2407	0,7110	0,7775
0,15	1,5	1,5	0,3889	0,3898	0,6272	0,7473	0,6765	0,9270	0,7772
0,2	1	1,5	0,0033	0,3961	0,3981	0,3130	0,2787	0,9679	0,9960
0,2	1,5	1,5	0,3965	0,3950	0,6359	0,7490	0,7084	0,9963	0,9960
0,5	1	1	0,0025	0,0024	0,0049	0,0051	0,0050	0,0050	0,0048
0,75	1	1	0,0209	0,0210	0,0415	0,0314	0,1370	0,5483	0,7770
1	1	1	0,1041	0,1045	0,1978	0,1202	0,6491	0,9749	0,9960
0,75	1,5	1	0,3873	0,0214	0,4004	0,3119	0,4668	0,7875	0,7754
0,75	1,5	1,5	0,3876	0,3880	0,6248	0,6672	0,7660	0,9275	0,7760
1	1	1,5	0,1049	0,5381	0,5868	0,4481	0,8692	0,9929	0,9959
1	1,5	1,5	0,5383	0,5365	0,7859	0,7364	0,9588	0,9982	0,9960
1	1	1	0,0023	0,0025	0,0049	0,0049	0,0050	0,0048	0,0049
1,5	1	1	0,1134	0,1130	0,2135	0,1291	0,5104	0,7654	0,7768
2	1	1	0,4976	0,4982	0,7474	0,4259	0,9853	0,9978	0,9961
1,5	1,5	1	0,3889	0,1135	0,4584	0,3247	0,6835	0,8633	0,7776
1,5	1,5	1,5	0,3879	0,3884	0,6255	0,5349	0,8103	0,9260	0,7761
2	1	1,5	0,4969	0,7095	0,8538	0,5875	0,9926	0,9990	0,9962
2	1,5	1,5	0,7106	0,7092	0,9159	0,7172	0,9967	0,9995	0,9959

Probabilidade de sinal para σ_e fora de controle - $m=15$ e $\alpha=0,0100$

σ_e	σ_T	σ_D	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T U \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1	1	0,0048	0,0049	0,0097	0,0100	0,0099	0,0100	0,0096
0,15	1	1	0,0057	0,0057	0,0113	0,0111	0,0139	0,4298	0,8294
0,2	1	1	0,0066	0,0070	0,0135	0,0126	0,0210	0,8835	0,9975
0,15	1,5	1	0,4552	0,0057	0,4585	0,3760	0,3186	0,7777	0,8305
0,15	1,5	1,5	0,4571	0,4560	0,7043	0,8018	0,7500	0,9496	0,8292
0,2	1	1,5	0,0066	0,4633	0,4668	0,3840	0,3605	0,9795	0,9975
0,2	1,5	1,5	0,4650	0,4634	0,7131	0,8053	0,7814	0,9975	0,9976
0,5	1	1	0,0050	0,0051	0,0100	0,0102	0,0100	0,0100	0,0094
0,75	1	1	0,0335	0,0344	0,0667	0,0500	0,1982	0,6285	0,8280
1	1	1	0,1437	0,1443	0,2672	0,1630	0,7382	0,9837	0,9975
0,75	1,5	1	0,4575	0,0341	0,4762	0,3834	0,5647	0,8422	0,8290
0,75	1,5	1,5	0,4561	0,4567	0,7050	0,7305	0,8327	0,9499	0,8300
1	1	1,5	0,1447	0,6015	0,6588	0,5130	0,9138	0,9958	0,9975
1	1,5	1,5	0,6028	0,6027	0,8421	0,7868	0,9767	0,9990	0,9974
1	1	1	0,0050	0,0051	0,0101	0,0098	0,0100	0,0098	0,0098
1,5	1	1	0,1554	0,1554	0,2866	0,1720	0,6112	0,8233	0,8303
2	1	1	0,5645	0,5635	0,8090	0,4797	0,9921	0,9987	0,9975
1,5	1,5	1	0,4564	0,1550	0,5403	0,3868	0,7650	0,9006	0,8302
1,5	1,5	1,5	0,4552	0,4546	0,7027	0,5978	0,8705	0,9496	0,8295
2	1	1,5	0,5633	0,7606	0,8952	0,6349	0,9964	0,9994	0,9976
2	1,5	1,5	0,7613	0,7600	0,9428	0,7578	0,9984	0,9997	0,9976

Duas direções atribuíveis, quatro variáveis observáveis e uma direção atribuível adicional

Probabilidade de sinal para direção adicional - $m=15$ e $\alpha=0,0027$

σ_c em controle	σ_T	σ_D	σ_C	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T U \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1	1	0	0,0013	0,0015	0,0028	0,0029	0,0027	0,0026	0,0014
			0,2	0,0014	0,0016	0,0030	0,0026	0,0040	0,2683	0,8859
			0,6	0,0014	0,0014	0,0028	0,0014	0,0232	0,9544	1,0000
			1	0,0013	0,0014	0,0027	0,0004	0,1632	0,9967	1,0000
			1,2	0,0014	0,0015	0,0029	0,0002	0,3331	0,9989	1,0000
			1,6	0,0014	0,0016	0,0029	0,0001	0,7234	0,9998	1,0000
			2	0,0015	0,0016	0,0031	0,0000	0,9255	1,0000	1,0000
0,5	1	1	0	0,0013	0,0013	0,0026	0,0028	0,0028	0,0028	0,0027
			0,2	0,0014	0,0013	0,0027	0,0026	0,0032	0,0052	0,0080
			0,6	0,0014	0,0013	0,0027	0,0016	0,0111	0,0612	0,3424
			1	0,0013	0,0013	0,0026	0,0007	0,0595	0,2700	0,9067
			1,2	0,0013	0,0012	0,0026	0,0005	0,1316	0,4048	0,9753
			1,6	0,0014	0,0013	0,0027	0,0001	0,4106	0,6429	0,9983
			2	0,0013	0,0013	0,0027	0,0000	0,7222	0,8004	0,9999
1	1	1	0	0,0013	0,0012	0,0025	0,0027	0,0027	0,0027	0,0027
			0,2	0,0012	0,0013	0,0026	0,0024	0,0029	0,0033	0,0033
			0,6	0,0013	0,0014	0,0026	0,0018	0,0058	0,0092	0,0218
			1	0,0013	0,0013	0,0026	0,0012	0,0170	0,0349	0,1690
			1,2	0,0012	0,0012	0,0024	0,0008	0,0307	0,0607	0,3343
			1,6	0,0013	0,0012	0,0026	0,0004	0,1020	0,1468	0,6991
			2	0,0013	0,0013	0,0026	0,0002	0,2600	0,2678	0,9043

Probabilidade de sinal para direção adicional - $m=15$ e $\alpha=0,0050$

σ_c em controle	σ_T	σ_D	σ_C	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T U \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1	1	0	0,0029	0,0025	0,0054	0,0050	0,0051	0,0050	0,0028
			0,2	0,0028	0,0024	0,0052	0,0047	0,0069	0,3301	0,9088
			0,6	0,0027	0,0026	0,0053	0,0028	0,0377	0,9674	1,0000
			1	0,0027	0,0024	0,0051	0,0010	0,2204	0,9978	1,0000
			1,2	0,0026	0,0023	0,0049	0,0005	0,4115	0,9994	1,0000
			1,6	0,0026	0,0025	0,0051	0,0001	0,7844	0,9999	1,0000
			2	0,0029	0,0025	0,0053	0,0000	0,9471	1,0000	1,0000
0,5	1	1	0	0,0023	0,0024	0,0046	0,0051	0,0049	0,0049	0,0048
			0,2	0,0023	0,0026	0,0049	0,0046	0,0057	0,0092	0,0136
			0,6	0,0021	0,0024	0,0045	0,0032	0,0179	0,0875	0,4011
			1	0,0023	0,0026	0,0049	0,0014	0,0894	0,3322	0,9259
			1,2	0,0024	0,0024	0,0048	0,0009	0,1798	0,4726	0,9811
			1,6	0,0023	0,0027	0,0050	0,0002	0,4892	0,7021	0,9989
			2	0,0023	0,0024	0,0048	0,0001	0,7803	0,8421	0,9999
1	1	1	0	0,0027	0,0026	0,0053	0,0048	0,0049	0,0049	0,0045
			0,2	0,0029	0,0026	0,0055	0,0047	0,0055	0,0059	0,0061
			0,6	0,0027	0,0026	0,0053	0,0037	0,0100	0,0158	0,0343
			1	0,0026	0,0027	0,0053	0,0024	0,0279	0,0524	0,2151
			1,2	0,0026	0,0026	0,0053	0,0015	0,0488	0,0883	0,3946
			1,6	0,0028	0,0026	0,0054	0,0008	0,1418	0,1924	0,7462
			2	0,0026	0,0027	0,0053	0,0003	0,3277	0,3302	0,9235

Probabilidade de sinal para direção adicional - $m=15$ e $\alpha=0,0100$

σ_c em controle	σ_T	σ_D	σ_C	\hat{a}_T	\hat{a}_D	$\hat{a}_T U \hat{a}_D$	VS	VMAX	Det(S)	$\ \mathbf{r}\ ^2$
0,1	1	1	0	0,0050	0,0051	0,0100	0,0096	0,0096	0,0098	0,0058
			0,2	0,0052	0,0052	0,0103	0,0094	0,0141	0,4120	0,9308
			0,6	0,0053	0,0049	0,0102	0,0054	0,0646	0,9787	1,0000
			1	0,0053	0,0050	0,0102	0,0020	0,3052	0,9988	1,0000
			1,2	0,0051	0,0052	0,0102	0,0011	0,5131	0,9996	1,0000
			1,6	0,0053	0,0051	0,0104	0,0002	0,8472	0,9999	1,0000
			2	0,0051	0,0052	0,0102	0,0001	0,9672	1,0000	1,0000
0,5	1	1	0	0,0051	0,0046	0,0097	0,0100	0,0098	0,0099	0,0100
			0,2	0,0053	0,0047	0,0099	0,0095	0,0116	0,0172	0,0243
			0,6	0,0052	0,0045	0,0097	0,0063	0,0330	0,1306	0,4778
			1	0,0051	0,0045	0,0096	0,0028	0,1353	0,4132	0,9456
			1,2	0,0053	0,0045	0,0098	0,0017	0,2524	0,5557	0,9868
			1,6	0,0054	0,0045	0,0098	0,0005	0,5848	0,7693	0,9993
			2	0,0051	0,0046	0,0096	0,0001	0,8401	0,8843	0,9999
1	1	1	0	0,0046	0,0049	0,0095	0,0098	0,0102	0,0100	0,0093
			0,2	0,0046	0,0045	0,0092	0,0094	0,0110	0,0115	0,0120
			0,6	0,0048	0,0049	0,0096	0,0075	0,0191	0,0289	0,0561
			1	0,0045	0,0046	0,0091	0,0047	0,0476	0,0823	0,2815
			1,2	0,0047	0,0048	0,0095	0,0034	0,0797	0,1310	0,4719
			1,6	0,0047	0,0049	0,0096	0,0016	0,2044	0,2612	0,7996
			2	0,0048	0,0047	0,0095	0,0007	0,4172	0,4116	0,9430